LABORATORIET FOR VARMEISOLERING
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

MEDDELELSE NR. 9

El-modeller til beregning af flerdimensionale varmestrømme i bygningskonstruktioner

Resistance-Capacitance Network Analog for solving multi-dimensional thermal field problems in building constructions

Af Vagn Korsgaard og Mogens R. Byberg

SÆRTRYK ★ „INGENIØREN" NR. 6 ★ 15. MARTS 1965

SKANDINAVISK BOGTRYK - KØBENHAVN

El-modeller til beregning af flerdimensionale varmestrømme i bygningskonstruktioner

Resistance-Capacitance Network Analog for
solving multi-dimensional thermal field problems
in building constructions

Af Vagn Korsgaard og Mogens R. Byberg

Det forenkler beregningsarbejdet, når så mange dellegemer som muligt er ens.

Har dellegemet kantlængderne a, b og e m efter akserne (se fig.1) og materialet varmeledningstallet $\lambda \frac{\text{kcal}}{\text{m h C}}$ fås varmemodstanden efter z-aksen:

$M_z = \frac{e}{\lambda\, a\, b} \frac{h\, C}{\text{kcal}}$, og de analoge udtryk for M_x og M_y.

Den elektriske modstand R_z, som skal repræsentere dellegemets M_z i modellen, fås ved at multiplicere M_z med den for hele modellen gældende modstandsfaktor $f_m \frac{}{h\, C}$

R_z fordeles langs dellegemets fire kanter efter z-aksen, se fig. 2, hvor hver af de viste el-modstande har værdien $4\, R_z$. Hvis fire ens dellegemer har en fælles kant (se fig. 3), fås den resulterende modstand R_z, idet

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{4R_z} + \frac{1}{4R_z} + \frac{1}{4R_z} + \frac{1}{4R_z}.$$

Hvis derimod inddelingerne efter x- og y-akserne ikke er ækvidistante, må man i hvert enkelt tilfælde beregne den resulterende modstand mellem knudepunkterne. Det bemærkes, at i en begrænsningsflade skal kun to modstande parallelforbindes, og i et hjørne anvendes dellegemets modstand uændret.

El-model til undersøgelse i det ikke-stationære tilfælde.

Hvis el-modellen skal anvendes til undersøgelse af ikke-stationære forhold, må der yderligere tages hensyn til materialernes varmekapacitet. For det i fig. 1 viste dellegeme fås varmekapaciteten K, når materialet har varmefylden $c \frac{\text{kcal}}{\text{C kg}}$ og rumvægten $\gamma \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ af udtrykket:

$$K = a\, b\, e\, \gamma\, c \frac{\text{kcal}}{\text{C}}.$$

Den elektriske kapacitet C, som skal repræsentere dellegemet i el-modellen fås ved at multiplicere K med den for hele modellen gældende kapacitetsfaktor $f_k \frac{\text{F C}}{\text{kcal}}$ og fordele den i legemets otte hjørner med $^1/_8$ C hvert sted (fig. 4). Støder otte ens dellegemer til hinanden i et knudepunkt, fås den resulterende kapacitet i knudepunktet = C.

Todimensional el-model.

Skal der udarbejdes en todimensional el-model, får alle de indgående dellegemer samme størrelse efter f. eks. z-aksen. Den kan da vælges til 1 m. Dellegemets varmemodstand M_x tilsvares i en todimensional el-model af kun to elektriske modstande, hver med værdien $2\, R_x = 2\, f_m\, M_x$, ligesom dellegemets varmekapacitet K tilsvares af fire kondensatorer, hver med værdien $^1/_4\, C = {}^1/_4\, f_k\, K$.

På analog måde fås for en endimensional el-model: Alle dellegemer får samme grundflade, som f. eks. kan vælges til 1 m². Dellegemets varmemodstand M_x tilsvares af en elektrisk modstand $R_x = f_m\, M_x$, og dets varmekapacitet K af to kondensatorer, hver med værdien $^1/_2\, C = {}^1/_2\, f_k\, K$.

Apparat til udførelse af el-modeller.

De bygningsdele, man ønsker at lave el-modeller af, er som regel karakteristiske derved, at de i to retninger har

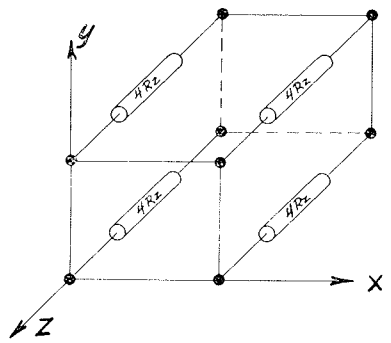

Fig. 2. Dellegemets modstande efter z-aksen.
The resistors simulating the thermal resistance of the rect. solid in the z direction.

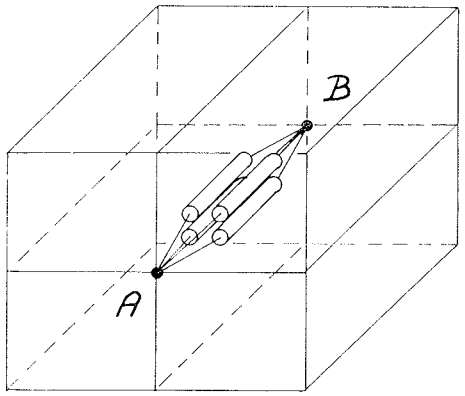

Fig. 3. Sammensætning af modstande langs en fælles kant.
The combination of resistors along the common edge of four rect. solids.

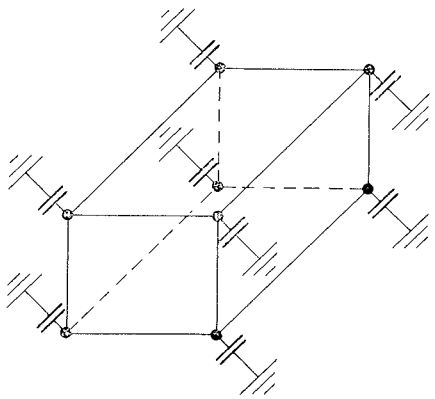

Fig. 4. Dellegemets kondensatorer.
The capacitors simulating the thermal capacitance of the rect. solid.

stor udstrækning, hvorimod udstrækningen er beskeden i den tredie retning (tykkelsen). I tykkelsen kan der så til gengæld være flere forskellige materialelag.

På laboratoriet for Varmeisolering er der bygget et apparat, som giver et system af faste knudepunkter, hvor modstande og kondensatorer kan skrues fast. På den måde er det både enkelt og overkommeligt at lave og ændre el-modellerne. Apparatet, som er vist på fig. 5, består af 8 plader, hver med 15 x 11 knudepunkter. Pladerne er hængslet sammen, så man kan »blade i bogen« og dermed få fri adgang til de enkelte lag, som tænkes at svare til bygningsdelens materialelag eller -dellag, d.v.s. man får tykkelsen i z-aksens retning, fig. 6. På den enkelte plade, fig. 7, er der for hvert af de knudepunkter, som skal bruges til R_x- og R_y-modstandene (A_1, A_2, A_3 og

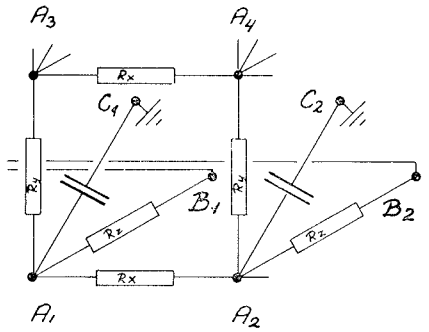

Fig. 8. Pladeapparatets knudepunkter.
The terminals of the plate apparatus.

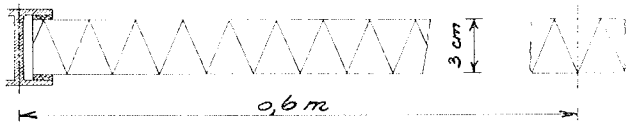

Fig. 9. Snit i brystningselement.
Cross section of the Curtain Wall Panel.

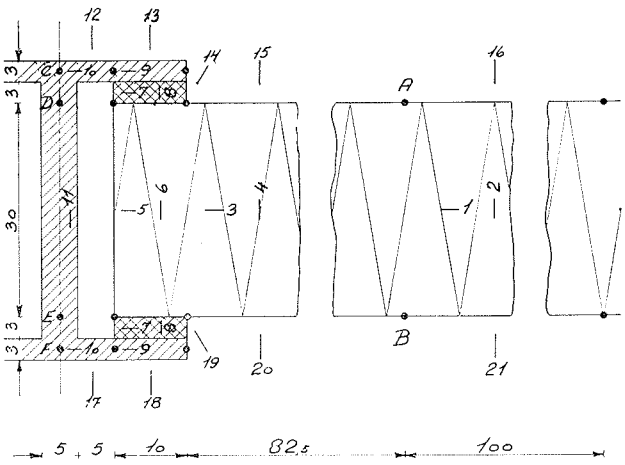

Fig. 10. Snit i brystningselement med indlagte knudepunkter.
Cross section of the panel with inlaid nodes.

ningen fra indvendig til udvendig side (42 mm). Den tilsvarende modstand R_{11} anbringes mellem knudepunkterne D og E, medens knudepunkterne C og D henholdsvis E og F forbindes med kortslutningsbøjler. Denne beregnings- og montagemæssige forenkling er tilladelig, fordi der ikke tilsluttes andre modstande end R_{11} på strækningen fra C til F, hvilket svarer til, at der ikke regnes med nogen varmeudveksling i hulrummet. Endvidere falder C, D, E, F i symmetrilinien, og varmeledningen på tværs af denne linie sættes = 0. Ved beregningen af M-værdierne er anvendt følgende talværdier, som for overgangsmodstandenes vedkommende er skønnede:

Indv. overgangsmodstand	$m_i = 0{,}15$	$\frac{m^2\,h\,C}{kcal}$	for polystyrenskum
– –	$m_i = 0{,}10$	–	for aluminium
Udv. –	$m_u = 0{,}05$	–	for alle flader
Aluminium	$\lambda = 180$	$\frac{kcal}{m\,h\,C}$	
Plastisk fugemasse	$\lambda = 0{,}56$	–	
Polystyrenskum	$\lambda = 0{,}035$	–	

El-modellen kan herefter bestemmes, idet modstandene i dette tilfælde vælges som den nærmeste værdi i rækken. På fig. 11 vises den færdige el-model.

Målinger på el-modellen.

Fremgangsmåden ved målinger på el-modellen er følgende: Mellem den udvendige spændingsskinne og den indvendige lægges en spænding på f. eks. 20 V fra en stabil strømkilde (0 V på den udvendige skinne). Dette svarer f. eks. til indvendig temperatur 20°C og udvendig 0°C. Med et rørvoltmeter måles herefter spændingen i hvert af modellens knudepunkter, hvilket direkte svarer til bygningsdelens temperatur i °C.

Tabel over temperaturer målt på el-modellen i fig. 11.

20,00	20,00	20,00	20,00					
6,95	7,02	7,08	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
6,95	7,39	10,00	17,08	17,02	17,04	17,03	17,01	17,00
6,44	6,00	3,35	1,00	0,99	0,99	1,00	1,01	0,99
6,44	6,37	6,30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00					

I tabellen ses resultatet af en sådan måling. Med et amperemeter måles strømforbruget, her $16{,}6\ \frac{mA}{20\ V} \sim 1{,}66\ \frac{kcal}{h\ 20\ C}$. Ved omregning til varmestrøm skal erindres om, at der for denne model benyttes omsætningerne:

$$1\ \frac{h\,C}{kcal} = 10^2\ \Omega$$

$$1\ °C = 1\ V$$

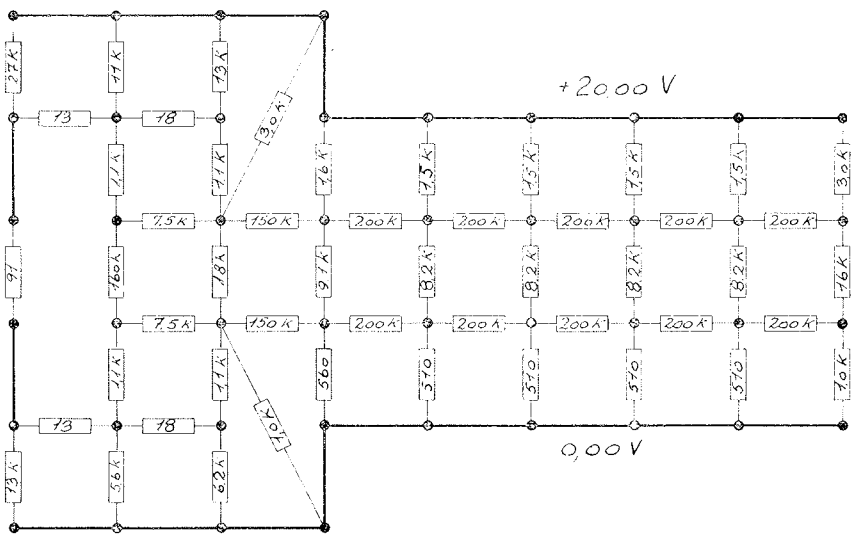

Fig. 11. Diagram over modstande til to-dimensional el-model.
Diagram of the resistors of the two-dimensional model.

aluminium på begge sider (eksemplet er hentet fra praksis). I det første tilfælde skal modstandene i polystyrenskumlagets overflader multipliceres med 0,12, i det andet med 0,0018.

Fugemassens varmemodstand er ændret med følgende forhold 0,1, 0,5, 1,0, 1,5 og ∞ gange det oprindelige. Der er her regnet med, at materialets λ-værdi har kunnet ændres frit. I praksis kan opnås næsten samme virkning ved at ændre fugemassens bredde og tykkelse (bortset fra faktoren ∞).

Resultater af undersøgelsen.

Resultatet af disse målinger er vist på fig. 13, idet den indvendige overfladetemperatur i profilkrydset er anvendt som mål for ændringen. Desuden er varmestrømmen angivet. Man bemærker først, at asbest-cementbeklædningen hæver temperaturen en ubetydelighed, men koster 3 % i varme. Beklædning med 1,5 mm aluminium hæver temperaturen ca. 1°C, medens varmeforbruget forøges 28 %. Endvidere ses det, at temperaturkurverne får maxima, når fugemassen har 2–3 gange så stor varmemodstand som oprindelig. Set i relation til varmestrømmens variation må det derfor være tilrådeligt at give fugemassen ca. 3 gange så stor varmemodstand som i eksemplets udgangspunkt. Sagt med andre ord: I stedet for en forsegling med 3 · 10 mm plastisk fugemasse tilrådes stopning med 3 · 7 mm værk, skymnylon eller lignende plus forsegling med 3 · 3 mm fugemasse. For at modvirke for lave indvendige overfladetemperaturer på profilet bør man i øvrigt tilstræbe, at den indvendige varmemodtagende flade gøres større end den udvendige varmeafgivende flade. Er der mulighed for at udføre den indvendige og den udvendige fuge forskellig, bør den udvendige fuges varmemodstand gøres størst.

Eksempel på todimensional el-model til ikke-stationære undersøgelser.

I de foregående afsnit er el-modeller til stationære undersøgelser blevet beskrevet. Her skal nu omtales, hvorledes el-modellerne kan udbygges til også at omfatte ikke-stationære undersøgelser. Dette gøres ved at forsyne modellernes knudepunkter med kondensatorer, således at der som tidligere beskrevet tages hensyn til bygningsdelenes varmekapaciteter.

Den kondensator C_A, som skal tilføjes i knudepunktet A på fig. 10 findes af følgende beregninger, idet polystyrenskum har $c = 0{,}33 \frac{\text{kcal}}{\text{kg C}}$ og $\gamma = 20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$K_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}33 \cdot 20 = 1{,}98 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kcal}}{\text{C}}$ og tilsvarende

$K_3 = 1{,}63 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kcal}}{\text{C}}$.

I punkt A støder kun to dellegemer mod hinanden, og man får

$C_A = {}^1/_4 \cdot f_k \cdot 10^{-3} (1{,}98 + 1{,}63) = 9{,}03 \cdot 10^{-4} \cdot f_k \text{ F}$

For denne model sættes $f_k = 10^{-4} \frac{\text{F C}}{\text{kcal}}$ og C_A bliver da $= 0{,}0903\ \mu\text{F}$.

De kondensatorer, som laboratoriet har valgt, er polyesterkondensatorer med 12 værdier pr. decade og tolerancer ± 10 %. Alle kondensatorer udmåles, og for hver nominel værdi N sorteres de i 10 undergrupper: N, N + 2 %, N − 2 %, N + 4 % o.s.v. hver med tolerancen ± 1 %. Undergrupperne forsynes med farvekode. Ved sorteringen opnås, at en kondensators maximale afvigelse fra en ønsket værdi bliver 2 %, og normalt vil den være en del mindre. Måling på el-modellen er gennemført i følgende 3 tilfælde:

1. brystningspladen uden beklædning,
2. brystningspladen beklædt med 8 mm asbest-cementplade og den plastiske fugemasses varmemodstand multipliceret med 0,1,
3. brystningspladen beklædt med 1,5 mm aluminium og den plastiske fugemasses varmemodstand multipliceret med 0,1.

Mellem el-modellens skinne for udvendig lufttemperatur og stelskinnen – til den sidste er alle kondensatorerne forbundet – lægges en sinusformet vekselspænding, og med passende måleudstyr – i dette tilfælde en katodestråleoscillograf – måles spændingssvingningen, d.v.s. amplitudeforhold og faseforskydning, i den indvendige overflades knudepunkter. Skinnen for indvendig lufttemperatur er forbundet til stelskinnen, hvilket termisk svarer til at rummet er så stort, at lufttemperaturen ikke påvirkes af svingninger i den indvendige overfladetemperatur.

Den påtrykte vekselspændings frekvens afhænger af de værdier for f_m og f_k, som er fastlagt for modellen, idet $\Delta t_{el} = f_t \cdot \Delta t_{term}$ og tidsfaktoren $f_t = f_m \cdot f_k$. Her ønskes undersøgt, hvorledes en udvendig døgnsvingning forplanter sig til væggens inderside, og svingningstiden for modellen bliver da:

$\Delta t_{el} = f_t \cdot 24 \text{ h} = 10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 24 = 0{,}24$ sekunder $\sim$ 4,17 hz.

I de ovennævnte 3 tilfælde er der i brystningspladen henholdsvis aluminiumprofilets symmetrilinier målt følgende amplitudeforhold for en døgnsvingning:

tilfælde	brystning	aluminiumprofil
1	0,155 ~ − 16,2 dB	0,66 ~ − 3,6 dB
2	0,150 ~ − 16,5 dB	0,66 ~ − 3,6 dB
3	0,185 ~ − 14,7 dB	0,76 ~ − 2,5 dB

Faseforskydningen var praktisk taget 0 i alle tre tilfælde.

Som man ser, forplanter udvendige temperatursvingninger sig næsten uændret til aluminiumprofilets inderside, hvorimod de i brystningspladen dæmpes til 15–20 %. Der er i øvrigt kun en mindre forskel mellem de tre tilfælde.

Eksempel på tredimensional el-model til ikke-stationære undersøgelser.

Også i det tredimensionale tilfælde er der udført en el-model til ikke-stationære undersøgelser, dog kun svarende til tilfælde 1 i forrige eksempel. Amplitudeforholdet er målt for de fleste knudepunkter på den indvendige overflade. Det er næsten konstant = 0,155 ~ − 16,2 dB for brystningspladen, dog med en kraftig ændring lige op