

nr 7

LABORATORIET FOR VARMEISOLERING
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

METODE TIL BESTEMMELSE AF VARMELEDNINGSTAL

MED SÆRLIG VÆGT PÅ TEORIEN FOR DE INSTATIONÆRE METODER SAMT
NOGLE MÅLINGER MED EN TERMOSONDE AF EGEN KONSTRUKTION

AF
AXEL RUBINSTEIN

LABORATORIET FOR VARMEISOLERING
Danmarks tekniske Højskole

bognr.: /238 gruppe: 5-11
V-5

KØBENHAVN 1963

Litteraturfortegnelse

- (1) Carslaw and Jaeger Conduction of Heat in Solids.
2. udgave Oxford 1959.
- (2) Richard Petersen Operatorregning på grundlag af Laplace-
transformation.
København 1953.
- (3) Vagn Korsgaard Termisk ækvivalente ydervægge.
Ingeniøren nr. 11, København 1961
- (4) Jørgen Rybner Teorien for elektriske kredsløb og
ledninger.
København 1952.
- (5) H.B. Jespersen Bestemmelse af varmeledningstal for
bygge- og isoleringsmaterialer ved
varierende fugtindhold.
Varme nr. 3 og 4, København 1949.
- (6) I. Schröder A simple method of determining the
thermal conductivity of solids.
Philips technical review, volume 21
1959/60
- (7) RILEM-report Method of test for thermal conductivi-
ty of building materials by means of
the guarded hot plate.
Lisboa 1962
- (8) Krischer og Esdorn Einfaches Kurzzeitverfahren zur gleich-
zeitigen Bestimmung der Wärmeleitzahl,
der Wärmekapazität und der Wärmeein-
dringungszahl.
VDI-Forschungsheft 450, Düsseldorf 1955
- (9) A.F. Joffé Heat transfer in semiconductors,
Canadian Journal of Physics, vol. 34,
1956.
- (10) Shirliff and Stephenson Tabulated values of special hyperbolic
functions.
National Research Council, Ottawa 1961.
- (11) B.H. Vos Measurements of Thermal Conductivity
by a non-steady-state-method.
T.N.O. Verslag no 34, Delft 1955.
- (12) J.H. Blackwell A Transient-Flow Method for Determi-
nation of Thermal Constants of Insu-
lating materials in Bulk.
Journal of Applied Physics, 2 1954.

- (13) B.H. Vos Warmtegeleidingsmetingen volgens een niet-stationaire methode.
T.N.O. Verslag no 63, Delft 1960.
- (14) I.S. Cammerer Der Wärme- und Kälteschutz in der Industrie.
4. udgave, Springer Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962.
- (15) Regler for beregning af varmetab fra bygninger.
1. udgave, Teknisk Forlag, København 1953

Herudover henvises til følgende studier af termosonder:

- E.F.M. van der Held og B.H. Vos The Probe Method for Measuring Heat conduction.
T.N.O. Verslag no 61, Delft 1960.
- Van der Held og van Drunen The measurement of the thermal conductivity of liquids, based on a warming-up process.
Laboratorium der Warmte-Stichting, Utrecht 1949.
- Van der Held, Hardebol og Karlshoven On the Measurement of the Thermal conductivity of Liquids by a non-stationary method.
T.N.O. Verslag no 28, Delft 1953.
- D'Eustachio og Schreiner A Study of a Transient Heat Method for Measuring Thermal Conductivity,
ASHVE Transactions 1457, U.S.A. 1952
- B.H. Vos og H.J. Erkelens Ermittlung des Feuchtgehaltes in Baukonstruktionen.
T.N.O. Verslag no 51, Delft 1958
- F.C. Hooper og F.R. Lepper Transient Heat Flow Apparatus for the Determination of Thermal Conductivities.
ASHVE Transactions 1395, U.S.A. 1950
- Hooper og Chang Development of the Thermal Conductivity Probe,
ASHVE Transactions 1488, U.S.A. 1953.
- W. Woodside Probe for Thermal Conductivity Measurement of Dry and Moist Materials,
ASHVE Journal section, september 1958.
- P. Destable Etude d'une methode rapide de mesure des coefficients de conductibilite thermique.
Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux publics no 26.
Paris 1949.

- G. Mann og F.G.E. Forsyth : Measurement of the Thermal Conductivity of Samples of Thermal Insulating Materials and of Insulation in situ by the Heated Probe Method.
Modern Refrigeration, juni 1956, England.
- J.C. van Dorssen Bepaling van de warmtegeleiding van bakstenen volgens de methode van de niet-stationaire warmtestroom.
T.N.O., Instituut voor Warmte Economie, rapport nr. 5, Haag 1949.
- H.J. Erkelens Development of a probe for measuring the coefficient of thermal conductivity in building materials.
Journal of the IHVE, januar 1960, London.
- K. Buettner A Small Portable Meter for Soil Heat Conductivity and its use in the O'Neill-Test.
American Geophysical Union, Transactions, Volume 36, no.5 1955
- Arthur H. Lachenbruch A Probe for Measurement of Thermal Conductivity of Frozen Soils in Place.
American Geophysical Union, Transactions, Volume 38, no.5, Washington 1957.
- Saare og Wenner Värmeledningstal hos olika jordarter.
Statens nämnd för byggnadsforskning, Handlingar nr. 31, Stockholm 1957.

I N D H O L D

	side
<u>0 Indledning</u>	1
 <u>1. Teoretisk grundlag</u>	 5
1.0 Fouriers varmeledningsligning	5
1.1 Løsning af Fouriers varmeledningsligning i forskellige tilfælde med endimensionale varmemstrømme	7
1.2 Løsning af Fouriers varmeledningsligning i det cylindriske tilfælde	22
 <u>2. Målemetoder i praksis</u>	 26
2.0 Apparattype til måling under stationære varme forhold	26
2.1 Varmeindtrængningstallets betydning for kontakttemperaturen, når to materialer bringes i berøring med hinanden	34
2.2 Krischer og Esdorns apparat til bestemmelse af både varmeledningstal, varmeindtrængningstal og varmekapacitet	36
2.3 Joffes apparat	55
2.4 Apparat med periodestationære varmemstrømme	59
2.5 Termosonder	64
 <u>3. Beskrivelse og anvendelse af egen termosonde</u>	 78
3.0 Beskrivelse af sondens konstruktion	78
3.1 Anvendelsen af sonden til bestemmelse af varmeledningstal	83
3.2 Resultater af målinger på forskellige materialer	94
 <u>4. Sammenligning af målemetoder nævnt i det foregående</u>	 95
4.0 Vurdering af de enkelte metoder	95

Symbolliste.

Af typografiske hensyn vil der i det foreliggende hæfte blive anvendt det græske bogstav δ , hvor det 'bløde d' ellers skulle have været anvendt i partielle differentialkvotienter.

Af faste symboler anvendes følgende, hvor:

H'	er specifik varmestrøm og måles i $\text{kcal/m}^2\text{h}$
ϑ	er temperatur og måles i $^{\circ}\text{C}$
λ	er varmeledningstal og måles i $\text{kcal/m h } ^{\circ}\text{C}$
ρ	er specifik vægt og måles i kg/m^3
c	er specifik varmekapacitet og måles i $\text{kcal/kg } ^{\circ}\text{C}$
a	er temperaturledningstal og måles i m^2/h ($= \lambda/\rho c$)
b	er varmeindtrængningstal og måles i $\text{kcal/m}^2\text{ } ^{\circ}\text{C h}^{1/2}$ ($= \sqrt{\lambda \rho c}$)
$\Rightarrow$	er den logiske pil, hvis betydning nærmest er implikativ.
∇	er operatoren $(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z})$ og altså en vektor.
$\mathcal{L}\{ \}$	er et symbol for en Laplace-transformeret (en operator)
p	er en kompleks parameter, der anvendes ved Laplace-transformation
q	er ligeledes en parameter, $= \sqrt{\frac{p}{a}}$
$J_n(x)$	er en Besselfunktion af 1. art og n'te orden
$Y_n(x)$	er en Besselfunktion af 2. art og n'te orden
$I_n(x)$	er en modificeret Besselfunktion af 1. art og n'te orden
$K_n(x)$	er en modificeret Besselfunktion af 2. art og n'te orden
$\text{erf}(x)$	er fejlfunktionen
$\text{erfc}(x)$	er den komplementære fejlfunktion, $= 1 - \text{erf}(x)$.

0. Indledning.

Teorien for varmetransmission er baseret på erfaringen om, at der mellem områder af et stof, hvis temperatur afviger fra hinanden, vil ske en varmetransport fra området med den højere temperatur til området med den lavere temperatur. Varmetransport kan som bekendt finde sted på forskellig vis, nemlig ved ^{I)}ledning, hvor den termiske energi forplanter sig fra partikkel til partikkel i stoffet, ved ^{II)}stråling, hvor varmeenergien i form af elektromagnetisk stråling overføres mellem områder af stoffet, som ikke ligger i umiddelbar nærhed af hinanden, (dog naturligvis under den forudsætning at mediet mellem områderne er gennemtrængeligt for stråling), ved ^{III)}konvektion, hvor partikler af stoffet, som er i relativ bevægelse, ved bevægelsen overfører deres termiske energi fra et område til et andet, og endelig ved ^{IV)}diffusion, hvorunder en kredsproces, bestående af fordampning af (oftest) vand i et område og fortætning af vanddampen i et andet område samt en kapillartransport af det fortættede vand fra andet område til første område, medfører en varmetransport fra første til andet område.

For varmetransporten i et fast, homogent og isotropt stof har Fouriers varmeledningsligning vist sig at give en god beskrivelse af de termiske forhold. Oprindeligt er dette vel især konstateret, når termiske ligevægtstilstande var indtrådt. Herved blev definitionen af begrebet "et stofs varmeledningstal" berettiget. Varmeledningstallet betragtes som en stofkonstant indenfor snævre temperaturintervaller.

Det har imidlertid vist sig praktisk at udvide begrebet varmeledningstal til også at gælde for ikke-homogene materialer, idet det har vist sig, at den matematiske beskrivelse i mange tilfælde stadig giver et anvendeligt billede af de termiske tilstande.

I andre tilfælde, f.eks. ved fugtige, porøse materialer er nytten af en definition af varmeledningstal undertiden ret problematisk, da et sådant varmeledningstal vil afhænge både af fugtindhold og varme-flux gennem materialet og af temperaturen i dette. Tænker man sig nemlig

en delvis vandfyldt pore i materialet, i hvilken diffusion finder sted fra et varmere til et koldere område af porens begrænsningsflade, nødvendiggør den før omtalte kredsproces tilstedeværelsen af en tilstrækkelig vandmængde, så at en kapillar tilbagesugning kan finde sted. Ved en større varmefflux over poren stiger differensen mellem områders temperaturer og dermed også mellem de dertil svarende mætningsdamptryk. Temperaturafhængigheden indses, når man erindrer mætningsdamptrykskurvens krumlinede forløb, da en fastholdt temperaturdifferens mellem porens vægområder så ses at give varierende mætningsdamptrykdifferenser, når porens middeltemperatur varierer. Er porerne i et materiale fuldstændig vandfyldte, eksisterer diffusionsandelen i varmetransmissionen gennem materialet ikke.

På trods af disse problemer eksisterer behovet for at opstille beregninger over varmetransmission gennem fugtige materialer stadig, og visse forskere har udført målinger af sammenhørende varmestrømme og temperaturdifferenser i forskellige materialer og i de enkelte tilfælde afbildet samhörigheden mellem et heraf beregnet varmeledningstal, materialets middeltemperatur og varmeffluxen gennem materialet.

Ekstrapolationer til tilfældet, hvor fluxen er nul, er også foretaget. Ved disse målinger er åbnet mulighed for overslagsmæssige beregninger af varmetransmission i fugtige materialer, uden at man dog kommer ind på de komplicerede forhold, som fugtforskningen beskæftiger sig med, og som i øvrigt i stor udstrækning verificerer de målte varmeledningstal.

Idet man i det følgende kun beskæftiger sig med forhold, hvorunder varmeledningstallet i Fouriers varmeledningssligning kan opfattes som en konstant inden for det temperaturområde, som man opererer med under målinger, indskrænkes behandlingen til at omfatte måling af tørre, faste stoffers varmeledningstal under forudsætning af gyldigheden af varmeledningssligningen.

Indførelsen af teorien for operatorregning med Laplace-transformerede har medført lettelse ved løsning af Fouriers varmeledningssligning med begyndelses- og randbetingelser, som før denne teoris

udvikling måtte gøre problemernes løsninger praktisk uoverkommelige. Mulighederne for, under instationære temperaturforhold, at gennemføre målinger på et stof, hvorved stoffets λ -værdi kan beregnes, er herved forøget, og meget varierende måleprincipper er da også taget i anvendelse efter teoriens fremkomst.

Uden at komme ind på beviser, skal vi her kort resumere fremgangsmåden ved brug af operatorregning med Laplace-transformationer.

Ved en Laplace-transformation af funktionen $\vartheta(x,y,z,t)$ forstås en transformation, hvorved $\vartheta(x,y,z,t)$, den såkaldte objektfunktion, afbildes som en billedfunktion $\bar{\vartheta}(x,y,z,p)$ i en kompleks billedplan gennem bindingen:

$$\bar{\vartheta}(x,y,z,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \vartheta(x,y,z,t) dt = \mathcal{L}\{\vartheta(x,y,z,t)\},$$

hvor p er en kompleks parameter, hvis reelle del er stor nok til at gøre det ovenstående integral konvergent.

Idet vi for nemheds skyld i det erstatter betegnelserne $\vartheta(x,y,z,t)$ og $\bar{\vartheta}(x,y,z,p)$ med henholdsvis ϑ og $\bar{\vartheta}$, skal enkelte af de regler, der gælder ved Laplace-transformation, nævnes:

$$1. \quad \mathcal{L}\{\vartheta_1 + \vartheta_2\} = \mathcal{L}\{\vartheta_1\} + \mathcal{L}\{\vartheta_2\} = \bar{\vartheta}_1 + \bar{\vartheta}_2$$

$$2. \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right\} = p \bar{\vartheta} - \vartheta_0,$$

hvor ϑ_0 er grænseværdien af ϑ for $t \rightarrow 0$

$$3. \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\delta^n \vartheta}{\delta x^n}\right\} = \frac{\delta^n \bar{\vartheta}}{\delta x^n},$$

med tilsvarende udtryk gældende ved differentiation med hensyn til y eller z .

$$4. \quad \mathcal{L}\{a \vartheta\} = a \mathcal{L}\{\vartheta\},$$

hvor a er en vilkårlig konstant.

Operatorregningens fordele kan f.eks. vises ved Laplace-transformation af den partielle differentialligning

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 ,$$

der, idet $\left\{ \vartheta \right\} = \bar{\vartheta}$, afbildes i billedplanen som den normale differentialligning

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{\vartheta} + \vartheta_0 = 0 ,$$

til hvilken det fuldstændige integral $\bar{\vartheta}$ kan findes på normal vis, idet p er uafhængig af x .

Når billedfunktionen $\bar{\vartheta}$ er fundet, er problemet tilbage at finde den til $\bar{\vartheta}$ hørende objektfunktion ϑ . Med dette formål for øje er der udarbejdet tabeller [1], [2], ved hjælp af hvilke man er i stand til umiddelbart at bestemme objektfunktioner for en hel del billedfunktioners vedkommende.

Hvor disse tabeller ikke slår til, er man henvist til anvendelse af inversionssætningen, hvorefter den til billedfunktionen $\bar{\vartheta}(p)$ hørende objektfunktion $\vartheta(t)$ findes som

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} \bar{\vartheta}(p) dp .$$

For at finde størrelsen af dette integral, kan man tit med held benytte residueregning.

I det følgende gennemgås løsninger af Fouriers varmeledningsligning i det endimensionale, det cylindriske og det kuglesymmetriske tilfælde med varierende randbetingelser, og det vil heraf fremgå, at anvendelsen af operatorregning på problemerne reducerer kravene til løserens matematiske snilde meget væsentligt.

1. Teoretisk grundlag.

1.o. Fouriers varmeledningsligning.

Den generelle form af Fouriers varmeledningsligning for transmission i et materiale kan skrives

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{1}{a} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} , \quad (1)$$

hvor

t er tidsdimensionen

∇ (nabla) er en operator, som kan udtrykkes på vektorformen $\left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}\right)$

ϑ er temperaturen til tiden t på stedet (x, y, z) i materialet

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$ kaldes temperaturledningstallet for materialet

λ er varmeledningstallet og er en stofegenskab, der betragtes som værende konstant.

ρ er materialets specifikke vægt,

c er materialets specifikke varmeindhold, der også betragtes som en stofegenskab, der er uafhængig af temperaturen.

Under forhold, hvor temperaturfordelingen i materialet ikke ændrer sig med tiden, er stationær, beskrives varmestromstætheden i punktet (x, y, z) ved

$$H' = - \lambda \nabla \vartheta , \quad (2)$$

hvor H' betegner varmestrommen pr. arealenhed. Man har nemlig

$$\frac{1}{a} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = 0 = \nabla^2 \vartheta ,$$

eller ved integration : $\nabla \vartheta = \text{konstant}$

Det særtilfælde af (2), hvor gradienten i 2 af koordinataksens retninger er nul, altså f.eks.

$$H' = - \lambda \frac{\delta \vartheta}{\delta x} \quad (2a)$$

giver en enkel sammenhæng mellem en endimensional varmestøm, varmeledningstal og temperaturgradient, hvor både H' og $\frac{\delta \vartheta}{\delta x}$ ved passende forsøgsopstillinger kan måles med ret høj nøjagtighed, og λ heraf beregnes. Det er vel også de betingelser, hvorunder hovedparten af opstillinger til måling af varmeledningstal er baseret.

Andre målemetoder kan baseres på det endimensionale særtilfælde af (1)

$$\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta x^2} = \frac{1}{a} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} \quad (1a)$$

eller af (1) transformeret til sfæriske eller cylindriske koordinater:

For sfæriske koordinater:

$$\frac{\delta \vartheta}{\delta t} = a \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} \left[r^2 \frac{\delta \vartheta}{\delta r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left[\sin \varphi \frac{\delta \vartheta}{\delta \varphi} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\delta^2 \vartheta}{\delta \varphi^2} \right\},$$

der for koncentriske isoterme flader går over i:

$$\frac{\delta \vartheta}{\delta t} = a \left[\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta r^2} + \frac{2}{r} \frac{\delta \vartheta}{\delta r} \right] \quad (1b)$$

og for cylindriske koordinater:

$$\frac{\delta \vartheta}{\delta t} = a \left[\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \vartheta}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 \vartheta}{\delta \varphi^2} + \frac{\delta^2 \vartheta}{\delta z^2} \right], \text{ der}$$

for coaxiale isoterme flader går over i

$$\frac{\delta \vartheta}{\delta t} = a \left[\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \vartheta}{\delta r} \right] \quad (1c)$$

Med passende begyndelses- og randbetingelser kan løsninger af (1a), (1b) og (1c) bringes på målelig form, hvori varmeledningstallet ofte indgår på enkel måde.

Til tiden $t \ll 0$ foreligger en beskrivelse af de termiske forhold i materialet. Oftest går denne begyndelsesbetingelse ud på, at materialet er gradientfrit, og nulpunktet for temperaturmålingerne lægges derfor lettest ved materialets begyndelsestemperatur.

Til tiden $t > 0$ påtrykkes materialets grænseflader kendte temperaturer eller varmestrømme, der er funktioner af tiden, ofte betragtes materialet som halvuendeligt under forudsætning af så korte måletider, at den termiske indflydelse fra forholdene ved den ene grænseflade er uden betydning ved den anden grænseflade. Visse randbetingelser lader sig især let fremstille i praksis, blandt disse er konstant varmestrøm over den ene grænseflade, en sinusformet varmestrøm over en grænseflade, eller grænsefladen holdt på konstant temperatur.

I det følgende skal gennemgås nogle løsninger af ligningerne (1a) og (1c).

1.1. Løsning af Fouriers varmoledningsligning i forskellige tilfælde med endimensionale varmestrømme.

For en lineær varmestrøm i et medium gælder

$$\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta x^2} - \frac{1}{a} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = 0 \quad (1a)$$

Idet den Laplacetransformerede af ϑ kaldes $\bar{\vartheta}$, bliver billedlig-

ningen for (1a):

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{\vartheta} + \frac{1}{a} \vartheta_0(x) = 0, \quad (3)$$

hvor $\vartheta_0(x)$ angiver temperaturfordelingen i mediet til tiden $t = 0$. I de fleste måleopstillinger vælges betingelser, så $\vartheta_0(x)$ er en konstant, oftest 0. I sidstnævnte tilfælde går (3) over i

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{\vartheta} = 0 \quad (3a)$$

Løsningen af billedligningerne er trivial. Når $\vartheta_0(x)$ er konstant er det fuldstændige integral til (3), idet betegnelsen q^2 indføres for forholdet $\frac{p}{a}$:

$$\bar{\vartheta} = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + \frac{1}{p} \vartheta_0(x), \text{ hvoraf} \quad (4)$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = q(C_1 e^{qx} - C_2 e^{-qx}), \quad (5)$$

som når $\vartheta_0(x) = 0$ går over i

$$\bar{\vartheta} = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} \quad (4a)$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = q(C_1 e^{qx} - C_2 e^{-qx}), \quad (5a)$$

hvor C_1 og C_2 er konstanter, hvis størrelser bestemmes ved indsættelse af begyndelses- og randbetingelser i (4) og (5).

I det følgende løses ligningssættet med begyndelses- og randbetingelser, der med god tilnærmelse lader sig realisere i praksis og giver anvendelige resultater.

$\alpha)$

To halvuendelige legemer, I og II, af forskellige materialer og med begyndelsestemperaturerne henholdsvis ϑ_I og ϑ_{II} i hele deres udstrækning, bringes til tiden $t = 0$ i kontakt med hinanden i deres begrænsningsplaner.

Idet $\vartheta_1(x, t)$ betegner temperaturen i I til tiden t i afstanden x fra begrænsningsplanen, og $\vartheta_2(y, t)$ tilsvarende betegner temperaturen i II til tiden t i afstanden y fra begrænsningsplanen, formuleres begyndelses- og randbetingelserne matematisk som:

$$t < 0, 0 \leq x < \infty \Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_I$$

$$t < 0, 0 \leq y < \infty \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_{II}$$

$$t \geq 0, x = y = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_2$$

$$t \geq 0, x = y = 0 \Rightarrow \lambda_I \frac{\delta \vartheta_1}{\delta x} = - \lambda_{II} \frac{\delta \vartheta_2}{\delta y}$$

$$t > 0, x \rightarrow \infty \Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_I$$

$$t > 0, y \rightarrow \infty \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_{II}$$

$\beta)$

Et halvuendeligt legeme har i hele sin udstrækning begyndelsestemperaturen $\vartheta = 0$. Til tiden $t = 0$ påtrykkes begrænsningsplanen en konstant varmestrøm, H' , pr. arealenhed. Matematisk udtrykkes dette således:

$$t < 0, 0 \leq x < \infty \Rightarrow \vartheta = 0$$

$$t \geq 0, x = 0 \Rightarrow H' = - \lambda \frac{\delta \vartheta}{\delta x}$$

$$t > 0, x \rightarrow \infty \Rightarrow \vartheta = 0$$

$\gamma)$

Et legeme er begrænset af to parallelle planer med den indbyrdes afstand 1. I hele sin udstrækning har legemet begyndelsestemperaturen $\vartheta = 0$. Til tiden $t = 0$ påtrykkes begrænsningsplanen $x = 0$ en konstant varmem strøm, H' , pr. arealenhed. Gennem planen $x = 1$ går ingen varmem strøm. Matematisk formuleres dette:

$$t < 0, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \vartheta = 0$$

$$t > 0, x = 0 \Rightarrow H' = -\lambda \frac{\delta \vartheta}{\delta x}$$

$$t > 0, x = 1 \Rightarrow -\lambda \frac{\delta \vartheta}{\delta x} = 0.$$

Laplacetransformeres betingelsessættene $\alpha)$, $\beta)$ og $\gamma)$ fås:

 $\bar{\alpha})$

$$t < 0, 0 \leq x < \infty \Rightarrow \bar{\vartheta}_1 = \frac{1}{p} \vartheta_I$$

$$t < 0, 0 \leq y < \infty \Rightarrow \bar{\vartheta}_2 = \frac{1}{p} \vartheta_{II}$$

$$t > 0, x = y = 0 \Rightarrow \bar{\vartheta}_1 = \bar{\vartheta}_2$$

$$t > 0, x = y = 0 \Rightarrow \lambda_I \frac{d\bar{\vartheta}_1}{dx} = -\lambda_{II} \frac{d\bar{\vartheta}_2}{dy}$$

$$t > 0, x \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{\vartheta}_1 = \frac{1}{p} \vartheta_I$$

$$t > 0, y \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{\vartheta}_2 = \frac{1}{p} \vartheta_{II}$$

 $\bar{\beta})$

$$t < 0, 0 \leq x < \infty \Rightarrow \bar{\vartheta} = 0$$

$$t > 0, x = 0 \quad \Rightarrow -\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = \frac{1}{p} H,$$

$$t > 0, x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \bar{\vartheta} = 0$$

$\bar{\gamma})$

$$t < 0, 0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \bar{\vartheta} = 0$$

$$t > 0, x = 0 \quad \Rightarrow -\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = \frac{1}{p} H,$$

$$t > 0, x = 1 \quad \Rightarrow -\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = 0.$$

Løsning af (4) og (5) med betingelsessættet $\bar{\alpha}$:

I materialet I hedder (4) og (5) henholdsvis

$$\bar{\vartheta}_1 = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} \quad (4b)$$

$$\text{og} \quad \frac{d\bar{\vartheta}_1}{dx} = q(C_1 e^{qx} - C_2 e^{-qx}), \quad (5b)$$

mens (4) og (5) i materiale II hedder

$$\bar{\vartheta}_2 = C_3 e^{ry} + C_4 e^{-ry} \quad (4c)$$

$$\text{og} \quad \frac{d\bar{\vartheta}_2}{dy} = r(C_3 e^{ry} - C_4 e^{-ry}), \quad (5c)$$

hvor $q^2 = \frac{p}{a_I}$ og $r^2 = \frac{p}{a_{II}}$, og a_I og a_{II} er temperaturledningstallene for materialerne I og II.

$$t > 0, x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \bar{\vartheta}_1 = \frac{1}{p} \vartheta_I \Rightarrow C_1 e^{qx} + \frac{1}{p} \vartheta_I \rightarrow 0,$$

hvoraf fås, at C_1 er 0.

$$t > 0, y \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \bar{\vartheta}_2 = \frac{1}{p} \vartheta_{II} \Rightarrow C_3 e^{ry} + \frac{1}{p} \vartheta_{II} \rightarrow 0,$$

hvoraf fås, at C_3 er 0.

$$t > 0, x = y = 0 \Rightarrow \bar{\vartheta}_1 = C_2 + \frac{1}{p} \vartheta_I = C_4 + \frac{1}{p} \vartheta_{II}$$

$$\begin{aligned} t > 0, x = y = 0 &\Rightarrow \lambda_I \frac{d\bar{\vartheta}_1}{dx} = \lambda_I q(-C_2) = -\lambda_{II} r(-C_4) = \\ &= -\lambda_{II} \frac{d\bar{\vartheta}_2}{dy} . \end{aligned}$$

Til bestemmelse af C_2 og C_4 har man altså:

$$C_2 = C_4 + \frac{1}{p} (\vartheta_{II} - \vartheta_I) \text{ og}$$

$$C_4 = -\frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \sqrt{\frac{a_{II}}{a_I}} C_2 = -\frac{\sqrt{\lambda_I \rho_I c_I}}{\sqrt{\lambda_{II} \rho_{II} c_{II}}} C_2, \text{ og videre}$$

$$C_2 = \frac{1}{p} \frac{(\vartheta_{II} - \vartheta_I) \sqrt{\lambda_{II} \rho_{II} c_{II}}}{\sqrt{\lambda_{II} \rho_{II} c_{II}} + \sqrt{\lambda_I \rho_I c_I}},$$

der indsættes i udtryk (4b), idet størrelserne $\sqrt{\lambda_I \rho_I c_I}$ og $\sqrt{\lambda_{II} \rho_{II} c_{II}}$ kaldes henholdsvis b_I og b_{II} ,

$$\bar{\vartheta}_1 = \frac{1}{p} \frac{(\vartheta_{II} - \vartheta_I) b_{II}}{b_{II} + b_I} e^{-qx} + \frac{1}{p} \vartheta_I .$$

Den til denne billedfunktion hørende objektfunktion kan findes ved opslag i en tabel, f.eks. i Carslaw and Jaeger [1], hvor en ret omfattende mængde sammenhørende objekt- og billedfunktioner er givet:

$$\vartheta_1 = \frac{(\vartheta_{II} - \vartheta_I) b_{II}}{b_I + b_{II}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a_I t}} + \vartheta_I . \quad (5d)$$

Heri betyder $\operatorname{erfc}(a)$ den komplementære fejlfunktion af størrelsen a .

I grænsefladen $x = 0$ er udtrykket $\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a_I t}} = \operatorname{erfc} 0 = 1$, og temperaturen på dette sted (kontakttemperaturen) antager den konstante størrelse

$$\vartheta_k = \frac{\vartheta_I b_I + \vartheta_{II} b_{II}}{b_I + b_{II}} \quad \text{for } t > 0 \quad (5e)$$

I tysk litteratur kaldes størrelsen $b = \sqrt{\lambda \rho c}$ for et materiale ofte for materialets varmeindtrængningstal. Varmeindtrængningstallet omtales lidt mere indgående i afsnit 2.1.

Løsning af (4) og (5) med betingelsessættet $\bar{\beta}$:

Da

$$t < 0, 0 \leq x < \infty \Rightarrow \bar{\vartheta} = 0,$$

går (4) og (5) over i (4a) og (5a).

$$t > 0, x \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{\vartheta} = C_1 e^{qx} + 0 = 0,$$

hvoraf ses at $C_1 = 0$.

$$t > 0, x = 0 \Rightarrow -\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = q\lambda C_2 = \frac{1}{p} H',$$

hvoraf C_2 findes

$$C_2 = \frac{1}{pq} \frac{H'}{\lambda}.$$

Dette indsættes i (4a), og man finder

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{pq} \frac{H'}{\lambda} e^{-qx},$$

hvis tilhørende objektfunktion findes ved tabelopslag

$$\vartheta = \frac{H'}{\lambda} \left[2 \sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4at}} - x \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right] \quad (6)$$

For $x = 0$ gælder, idet $\frac{\sqrt{a}}{\lambda} = \frac{1}{b}$:

$$\vartheta = \frac{2 H'}{\sqrt{\pi} b} \sqrt{t} \quad (6a)$$

$$\text{og} \quad \frac{\delta \vartheta}{\delta \sqrt{t}} = \frac{2 H'}{\sqrt{\pi} b} \quad (6b)$$

Løsning af (4) og (5) med betingelsessættet $\bar{\gamma}$:

Her omformes γ og $\bar{\gamma}$ først, til opnåelse af regnemæssige lettelser, midlertidigt til betingelsessættene γ^+ og $\bar{\gamma}^+$:

γ^+)

Et legeme er begrænset af to parallelle planer med den indbyrdes afstand 1. I hele sin udstrækning har legemet begyndelsestemperaturen $\vartheta = 0$. Til tiden $t = 0$ påtrykkes begrænsningsfladen $y = 1$ en konstant varmemestrøm, H' pr. arealenhed. Gennem planen $y = 0$ går ingen varmemestrøm. Altså:

$$t < 0, 0 \leq y \leq 1 \quad \Rightarrow \vartheta = 0$$

$$t > 0, y = 0 \quad \Rightarrow \frac{\delta \vartheta}{\delta y} = 0$$

$$t > 0, y = 1 \quad \Rightarrow -\lambda \frac{\delta \vartheta}{\delta y} = -H'$$

$\bar{\gamma}^+$)

$$t < 0, 0 \leq y \leq 1 \quad \Rightarrow \bar{\vartheta} = 0$$

$$t > 0, y = 0 \quad \Rightarrow \frac{d\bar{\vartheta}}{dy} = 0$$

$$t > 0, y = 1 \quad \Rightarrow -\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dy} = -\frac{1}{p} H'$$

Det fuldstændige integral hedder her

$$\bar{\vartheta} = C_1 e^{qy} + C_2 e^{-qy} ,$$

og
$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dy} = q(C_1 e^{qy} - C_2 e^{-qy}).$$

$$t > 0, y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\vartheta}}{dy} = q(C_1 - C_2) = 0 .$$

Heraf fås at $C_1 = C_2$, der indsættes:

$$t > 0, y = 1 \quad \Rightarrow \quad -\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dy} = -\lambda q C_1 (e^{q1} - e^{-q1}) = -\frac{1}{p} H ,$$

eller
$$C_1 = C_2 = \frac{H'}{\lambda pq} \frac{1}{e^{q1} - e^{-q1}} , \text{ der indsættes}$$

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta} &= \frac{H'}{\lambda pq} \frac{1}{1 - e^{-2q1}} \frac{e^{qy} + e^{-qy}}{e^{q1}} = \\ &= \frac{H'}{\lambda pq} (e^{-q(1-y)} + e^{-q(1+y)}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nq1} = \\ &= \frac{H'}{\lambda pq} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-q((2n+1)1 - y)} + e^{-q((2n+1)1 + y)} \right\} . \end{aligned}$$

Den tilhørende objektfunktion findes ved transformation af hvert enkelt af billedligningens led, idet tabel kan benyttes. Man får således:

$$\vartheta = \frac{2H'\sqrt{at}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{ierfc} \frac{(2n+1)1 - y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{ierfc} \frac{(2n+1)1 + y}{2\sqrt{at}} \right] ,$$

eller
$$\vartheta = \frac{H't}{\rho c l} + \frac{H'1}{\lambda} \left[\frac{3y^2 - 1^2}{6l^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{\frac{-an^2\pi^2 t}{l^2}} \cos \frac{n\pi y}{l} \right] .$$

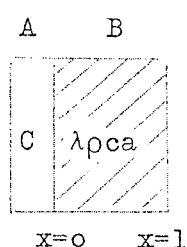
Idet vi vender tilbage til betingelsessættene γ og $\bar{\gamma}$, anvendes overgangsformlen $y = 1 - x$, og man får da

$$\vartheta = \frac{H't}{\rho c l} + \frac{H'l}{\lambda} \left[\frac{1}{3} - \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\frac{an^2 \pi^2 t}{l^2}} \cdot \cos \frac{n\pi(1-x)}{l} \right]$$

$$\vartheta = \frac{H'l}{\lambda} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{x}{l} + \frac{1}{3} + \frac{at}{l^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 at}{l^2}} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \right] \quad (7)$$

I et senere afsnit skal også benyttes løsningen af følgende problem:

Et uendelig stort pladeformet materiale med tykkelsen l og med de termiske egenskaber λ , ρ , c og a er på sin ene begrænsningsflade, $x = 0$, i kontakt med en plade af en uendelig god varmeleder med varmfylden C pr. arealenhed af berøringsfladen, og som er uendelig godt isoleret på de øvrige begrænsningsflader. Til tiden $t < 0$ er temperaturen 0 overalt i systemet. Til tiden $t = 0$, påtrykkes materialets anden begrænsningsflade, $x = l$, den konstante temperatur ϑ_k . Idet den førstnævnte plade betegnes med B , og pladen af den uendelig gode varmeleder betegnes med A , således at temperaturen af denne kaldes ϑ_A , kan følgende begyndelses- og randbetingelser opstilles:



$$t < 0, 0 \leq x \leq l \Rightarrow \vartheta_A = \vartheta = 0$$

$$t > 0, x = l \Rightarrow \vartheta = \vartheta_k$$

$$t > 0, x = 0 \Rightarrow \lambda \frac{\delta \vartheta}{\delta x} = C \frac{\delta \vartheta_A}{\delta t}$$

$$t > 0, x = 0 \Rightarrow \vartheta = \vartheta_A,$$

og idet randbetingelserne Laplace-transformeres, fås:

$$t < 0, 0 \leq x \leq l \Rightarrow \bar{\vartheta}_A = \bar{\vartheta} = 0$$

$$t > 0, x = l \Rightarrow \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta_k}{p}$$

$$t > 0, x = 0 \quad \Rightarrow \lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = C_p \bar{\vartheta}_A$$

$$t > 0, x = 0 \quad \Rightarrow \bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_A.$$

Ved indsættelse i (4a) og (5a) fås

$$t > 0, x = 1 \quad \Rightarrow \frac{\vartheta_k}{p} = C_1 e^{q_1} + C_2 e^{-q_1}$$

$$t > 0, x = 0 \quad \Rightarrow \lambda q (C_1 - C_2) = C_p \bar{\vartheta}_A = C_p (C_1 + C_2),$$

hvoraf $C_2 = C_1 \frac{\lambda q - C_p}{\lambda q + C_p}$

og $\frac{\vartheta_k}{p} = C_1 \left(e^{q_1} + \frac{\lambda q - C_p}{\lambda q + C_p} e^{-q_1} \right)$

eller $C_1 = \frac{\vartheta_k}{p \left(e^{q_1} + \frac{\lambda q - C_p}{\lambda q + C_p} e^{-q_1} \right)},$

der indsættes i (4a):

$$\bar{\vartheta} = \frac{\vartheta_k}{p} \frac{\lambda q \cosh(qx) + C_p \sinh(qx)}{\lambda q \cosh(q_1) + C_p \sinh(q_1)}, \text{ eller}$$

$$\bar{\vartheta} = \frac{\frac{\lambda}{C_a} \cosh(qx) + q \sinh(qx)}{\frac{\lambda}{C_a} \cosh(q_1) + q \sinh(q_1)} \cdot \frac{\vartheta_k}{p}$$

For at finde den til billedfunktionen hørende objektfunktion må man her gøre brug af inversionssætningen. Man får derfor:

$$\vartheta = \frac{\vartheta_k}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\xi t}}{\xi} \frac{\frac{\lambda}{C_a} \cosh(\mu x) + \mu \sinh(\mu x)}{\frac{\lambda}{C_a} \cosh(\mu l) + \mu \sinh(\mu l)} d\xi,$$

hvor $\mu = \sqrt{\frac{\xi}{a}} \quad (8)$

Integranden har poler for $\xi = 0$ med residuet 1, og for $\xi = -a \alpha_n^2$, $\mu = i\alpha_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, hvor α_n er rødderne i ligningen

$$\frac{\lambda}{Ca} \cos(\alpha l) - \alpha \sin(\alpha l) = 0, \text{ eller}$$

$$\alpha \operatorname{tg}(\alpha l) = \frac{\lambda}{Ca}.$$

Residuerne ved disse poler findes ved indsættelse af $\xi = -a \alpha_n^2$ i udtrykket

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\xi t} \left(\frac{\lambda}{Ca} \cosh(\mu x) + \mu \sinh(\mu x) \right)}{\xi \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\lambda}{Ca} \cosh(\mu l) + \mu \sinh(\mu l) \right)} = \\ & = \frac{e^{\xi t} \left(\frac{\lambda}{Ca} \cosh(\mu x) + \mu \sinh(\mu x) \right)}{\frac{\mu}{2} \frac{d}{d\mu} \left(\frac{\lambda}{Ca} \cosh(\mu l) + \mu \sinh(\mu l) \right)} = \\ & = \frac{e^{\xi t} \left(\frac{\lambda}{Ca} \cosh(\mu x) + \sinh(\mu x) \right)}{\frac{\mu}{2} \left(\left(1 + \frac{\lambda}{Ca} l \right) \sinh(\mu l) + \mu l \cosh(\mu l) \right)}, \text{ altså} \\ & 2 \frac{e^{-a\alpha_n^2 t} \left(\alpha_n \sin(x\alpha_n) - \frac{\lambda}{Ca} \cos(x\alpha_n) \right)}{\left(1 \left(\left(\frac{\lambda}{Ca} \right)^2 + \alpha_n^2 \right) + \frac{\lambda}{Ca} \right) \cos(\alpha_n l)} \end{aligned}$$

Ifølge Cauchy's integralsætning er integralet i udtrykket (8) lig med $2\pi i$ gange summen af integrandens residuer i polerne, og følgende får man for ϑ

$$\vartheta = \vartheta_k \left[1 + 2 \int_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\alpha_n^2 t} \left(\alpha_n \sin(x\alpha_n) - \frac{\lambda}{Ca} \cos(x\alpha_n) \right)}{\left(1 \left(\left(\frac{\lambda}{Ca} \right)^2 + \alpha_n^2 \right) + \frac{\lambda}{Ca} \right) \cos(\alpha_n l)} \right] \quad (9)$$

I planen $x = 0$ er temperaturen

$$\vartheta = \vartheta_k - 2\vartheta_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\alpha_n^2 t}}{\left(1 + \frac{Ca}{\lambda} \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{Ca}\right)^2 + \alpha_n^2}\right) \cos(l\alpha_n)}$$

og heraf

$$\vartheta - \vartheta_k = - 2\vartheta_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\alpha_n^2 t}}{\left(1 + \frac{Ca}{\lambda} \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{Ca}\right)^2 + \alpha_n^2}\right) \cos(l\alpha_n)} \quad (9a)$$

Endelig kan et legeme begrænset af to parallelle planer med den indbyrdes afstand l , på overkommelig vis påtrykkes en temperatursvingning på planen $x = 0$, mens planen $x = l$ gennem en konstant overgangsmodstand står i varmeudveksling med et medium med konstant temperatur (omgivelserne).

Til behandling af dette problem foreligger en løsningsprocedure i teorien for elektriske kredsløb og ledninger, som første gang herhjemme blev taget i anvendelse til løsning af varmetransmissionsproblemer, da Vagn Korsgaard offentliggjorde en undersøgelse over termisk ækvivalente ydervægge [3], hvilken fremstillingsterminologier og teorier ligger til grund for det nærmest følgende:

Som bekendt eksisterer der i mange henseender en analogi mellem elektrisk transmission gennem ledninger og varmetransmission i faste stoffer. Således kan man analogt med ligning (1a) opstille følgende ligning for et induktionsfrit elektrisk kabel uden afledning:

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} - R'C' \frac{\delta v}{\delta t} = 0, \quad (10)$$

hvor v er spændingen i afstanden x , målt langs ledningen
 t er tiden
 R' er ledningens modstand pr. længdeenhed, og
 C' er ledningens kapacitet pr. længdeenhed.

I analogien korresponderer således:

Temperaturen..... θ	med spændingen..... v
længden..... x	med længden..... x
tiden..... t	med tiden..... t
temperaturledningstallet a	med størrelsen..... $\frac{1}{R'C}$,
varmemængde..... Hdt	med elektricitetsmængde..... Idt
varmeledningsevne..... λ	med den elektriske ledningsevne λ

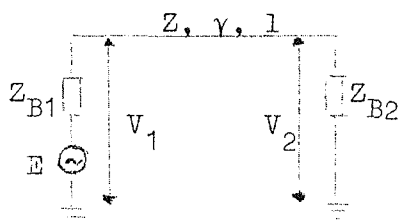
Et udtryk til beregning af sammenhængen mellem spændinger og strømme i de to ender af et induktionsfrit kabelstykke uden afledning, er angivet i: Jørgen Rybner: Teorien for elektriske kredsløb og ledninger [4].

Idet et kabel i den ene ende påtrykkes en vekselspænding der er sinusformet med frekvensen $f = \frac{\omega}{2\pi}$, har de følgende karakteristika, gældende for denne frekvens:

$$Z = \text{ledningens karakteristiske impedans eller bølgeimpedansen} = (1 - i) \sqrt{\frac{R'}{2\omega C'}}$$

$$\gamma = \text{den såkaldte vandringskonstant} = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} = \frac{R'}{Z}$$

Et endeligt stykke kabel af længden l og disse karakteristika belastes i den ene ende med impedansen Z_{B1} og i den anden ende med impedansen Z_{B2} . Spændingen i de to ender af kablet kaldes henholdsvis V_1 og V_2 . En spændingsgenerator med spænding E er indsat mellem Z_{B1} og jord (se figuren).



Til bestemmelse af V_2 haves følgende udtryk:

$$V_2 = E \frac{Z_{B2}}{(Z_{B1} + Z_{B2}) \cosh(\gamma l) + (Z^2 + \frac{Z_{B1} Z_{B2}}{Z}) \sinh(\gamma l)} .$$

Ved anvendelse af den før omtalte analogi, kan et lignende udtryk opstilles for en planparallel mur der påtrykkes sinusformede temperatursvingninger med frekvensen $\frac{\omega}{2\pi}$ på den ene side, og hvis anden side gennem en konstant overgangsmodstand står i varmeudveksling med et medium med temperaturen 0 .

Murens egenskaber er følgende:

Areal vinkelret på varmestrømmen	, A
tykkelse i varmestrømmens retning	, l
varmeledningstal	, λ
temperaturledningstal	, a
indre overfladetemperatur	, ϑ_i
ydre overfladetemperatur	, ϑ_u
varmeovergangsmodstand på inderside	, $m_i \sim Z_{B1}$
varmeovergangsmodstand på yderside	, $m_u \sim Z_{B2}$
temperatur af varmegiver	, ϑ_I
vandringskonstanten	, $\gamma = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$
bølgeimpedansen	, $Z = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega}{2\lambda A}} \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$
	$= \frac{1}{\lambda A \gamma} .$

Man finder for den udvendige temperatur:

$$\vartheta_u = \vartheta_I \frac{m_u}{(m_i + m_u) \cosh(\gamma l) + (Z + \frac{Z_{B1} Z_{B2}}{Z}) \sinh(\gamma l)} \quad (11)$$

Dersom man i (11) erstatter ϑ_I med ϑ_i , idet Z_{B1} vælges = 0 , får man følgende udtryk:

$$\vartheta_u = \vartheta_i \frac{m_u}{m_u \cosh(\gamma l) + Z \sinh(\gamma l)} \quad (11a)$$

1,2. Løsning af Fouriers varmeledningsligning i det cylindriske tilfælde.

I et i alle retninger uendeligt udstrakt medium tænkes boret et cirkulærcylindrisk hul med diameter r_0 . Begyndelsestemperaturen for systemet er 0. Til tiden gælder visse randbetingelser for cylindervæggen $r = r_0$. Randbetingelsen, hvor en konstant flux, F , pr. arealenhed påtrykkes cylindervæggen for tiden $t > 0$ er i praksis let realiseret og giver en anvendelig matematisk løsning.

For systemet gælder

$$\frac{\delta \vartheta}{\delta t} = a \left(\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \vartheta}{\delta r} \right) \quad (1c)$$

med randbetingelserne

$$t < 0, r_0 \leq r < \infty \Rightarrow \vartheta = 0$$

$$t > 0, r = r_0 \Rightarrow -\lambda \frac{\delta \vartheta}{\delta r} = F$$

$$t > 0, r \rightarrow \infty \Rightarrow \vartheta = 0,$$

der ved Laplace-transformation går over i:

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\vartheta}}{dr} - q^2 \bar{\vartheta} = 0, \quad (12)$$

$$t < 0, r_0 \leq r < \infty \Rightarrow \bar{\vartheta} = 0 \quad (13)$$

$$t > 0, r = r_0 \Rightarrow -\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dr} = \frac{F}{p} \quad (14)$$

$$t > 0, r \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{\vartheta} = 0, \quad (15)$$

hvor $q^2 = \frac{p}{a}$

(12) ses at være en modificeret Besselsk differentialligning, idet den ved indførelse af den imaginære variable $x = i \cdot r$ går over i en Besselsk differentialligning i kompleks variabel.

Ved anvendelse af (15) findes et integral til (12):

$$\bar{\vartheta} = C K_0(qr), \quad (16)$$

hvor
$$K_0(qr) = - \left[\ln\left(\frac{qr}{2}\right) + \gamma \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{2r}}{(r!)^2} + \left(\frac{qr}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^4}{(2!)^2} +$$

$$+ \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dr} = C \frac{d(K_0(qr))}{dr} = -q C K_1(qr) \quad (17)$$

C findes ved løsning af randbetingelse (14) med (17):

$$\left[-\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dr} \right]_{r=r_0} = \lambda q C K_1(qr_0) = \frac{F}{p},$$

$$C = \frac{F}{\lambda p q K_1(qr_0)},$$

der indsættes i (16):

$$\bar{\vartheta} = \frac{F}{\lambda} \frac{K_0(qr)}{p q K_1(qr_0)} \quad (18)$$

Betemmelse af den til (18) hørende objektfunktion kunne ske ved anvendelse af inversionssætningen:

$$\vartheta = \frac{F}{\lambda 2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\xi t} \frac{K_0(\mu r)}{\mu K_1(\mu r_0)} d\xi, \quad (19)$$

hvor $\mu = \sqrt{\frac{\xi}{a}}$, men idet det erindres at $p\bar{\vartheta} = \mathcal{L}\left\{\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right\}$, forenkles proceduren væsentligt ved at man i stedet bestemmer den til $p\bar{\vartheta}$ hørende objektfunktion $\frac{\delta\vartheta}{\delta t}$, med en påfølgende integration mellem grænserne 0 og t . Man har altså i stedet

$$\frac{\delta\vartheta}{\delta t} = \frac{F}{\lambda 2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\xi t} \frac{K_0(\mu r)}{K_1(\mu r_0)} d\xi \quad (20)$$

Idet $\xi = au^2 e^{\pi i}$ indføres, kan man vise, at integralet i (19) kan udtrykkes ved integralsummen

$$\begin{aligned} \frac{\delta\vartheta}{\delta t} &= \frac{F}{\lambda 2\pi i} \int_0^\infty e^{-au^2 t} \cdot \frac{-\frac{1}{2} \pi i (J_0(ur) - iY_0(ur))}{-\frac{1}{2} \pi (J_1(ur_0) - iY_1(ur_0))} 2ai du - \\ &\quad - \frac{F}{\lambda 2\pi i} \int_0^\infty e^{-au^2 t} \cdot \frac{-\frac{1}{2} \pi i (J_0(ur) + iY_0(ur))}{-\frac{1}{2} \pi (J_1(ur_0) + iY_1(ur_0))} 2ai du = \\ &= \frac{F}{\lambda \pi i} \int_0^\infty e^{-au^2 t} i \frac{2i (J_0(ur)Y_1(ur_0) - Y_0(ur)J_1(ur_0))}{J_1^2(ur_0) + Y_1^2(ur_0)} ai du = \\ &= - \frac{2F}{\lambda \pi} \int_0^\infty e^{-au^2 t} \frac{J_0(ur)Y_1(ur_0) - Y_0(ur)J_1(ur_0)}{J_1^2(ur_0) + Y_1^2(ur_0)} a du \end{aligned}$$

ϑ findes ved integrationen

$$\vartheta = \int_0^t \frac{\delta\vartheta}{\delta t} dt = - \frac{2F}{\lambda \pi} \int_0^\infty \frac{1}{u^2} (1 - e^{-au^2 t}) \frac{J_0(ur)Y_1(ur_0) - Y_0(ur)J_1(ur_0)}{J_1^2(ur_0) + Y_1^2(ur_0)} du \quad (21)$$

Ved rækkeudvikling af funktionerne $K_0(\mu r)$ og $K_1(\mu r_0)$ efter stigende potens af ξ , kan integrationsbidragene til (19) efter diskussion af integrationsvejen udtrykkes:

$$\vartheta = - \frac{Fr_0}{2\pi i \lambda} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\xi t} \frac{(\ln(\frac{1}{2}Cr\mu) + \frac{1}{4}r^2\mu^2(\ln(\frac{1}{2}Cr\mu) - 1) + \dots)}{\xi (1 + \frac{1}{2}\mu^2 r_0^2(\ln(\frac{1}{2}Cr_0) - \frac{1}{2}) + \dots)} d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{Fr_0}{2\pi i \lambda} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^{\xi t}}{\xi} \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{C^2 r^2 \xi}{4a}\right) + \frac{r^2 \xi}{8a} \ln\left(\frac{C^2 r^2 \xi}{4a}\right) - \frac{r^2 \xi}{4a} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\xi r_0^2}{8a} \left(\ln\left(\frac{C^2 r^2 \xi}{4a}\right) \right)^2 - \frac{\xi r_0^2}{4a} \left(\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{1}{2} \right) \ln\left(\frac{C^2 r^2 \xi}{4a}\right) + \dots \right) d\xi,
\end{aligned}
\tag{22}$$

hvor $C = e^\gamma$, og γ er Eulers konstant.

Ledvis integration af (22) giver:

$$\vartheta = \frac{Fr_0}{2\lambda} \left\{ \ln\left(\frac{4at}{Cr^2}\right) + \frac{r_0^2}{2at} \ln\left(\frac{4at}{Cr^2}\right) + \frac{1}{4at} \left(r_0^2 + r^2 - 2r_0^2 \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \right) + \dots \right\}
\tag{23}$$

For store værdier af t kan man med tilnærmelse skrive

$$\vartheta = \frac{Fr_0}{2\lambda} \left(\ln\frac{4at}{Cr^2} + O\left(\frac{r_0^2}{at}\right) \right).
\tag{24}$$

2. Målemetoder i praksis.

2.o. Apparattype til måling under stationære varmekonforhold.

Ved måling af et materiales λ -værdi under stationære temperaturforhold tildannes et prøvelegeme af materialet. Prøvelegemet kan have form af en plade med planparallelle flader, en cylinder-skål eller en kugleskål.

Gennem prøvelegemet sendes en varmestrøm af kendt intensitet på en sådan måde, at den i det planparallelle tilfælde med tilstrækkelig god tilnærmelse skal være endimensional, medens den tilsvarende i de to andre tilfælde skal være radial.

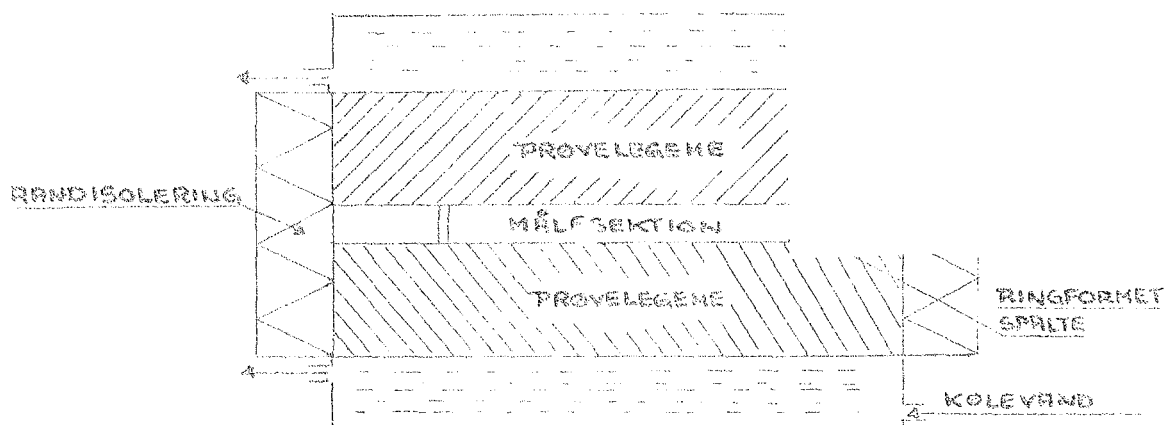
Ved måling af temperaturdifferensen mellem de begrænsningsflader, hvor varmestrømmen henholdsvis går ind i og forlader prøvelegemet, kan gradienten $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ bestemmes under forudsætning af, at prøvelegemet er homogent, og at dets dimensioner er kendte.

Ved hjælp af udtryk (2) kan varmeledningstallet beregnes i hvert enkelt tilfælde.

Medens bestemmelsen af temperaturer og dimensioner af prøvelegemet normalt ikke volder nogen større vanskeligheder under disse former for måling, er bestemmelsen af varmestrømsintensiteten samt tilvejebringelsen af en endimensional varmestrøm til gengæld mere delikate problemer.

Poensgen (1912) løste problemet ved at bygge et pladeapparat, der også i senere udformninger bærer hans navn. I et Poensgen-apparat er to pladeformede prøvelegemer af ens dimensioner og materiale anbragt symmetrisk om (og i god termisk kontakt med) en plan elektrisk modstandsvarmeplade. På begge prøvelegemers yderside (se fig. 1) er anbragt køleplader, der gennemstrømmes af vand med ensartet, konstant temperatur.

Varmepladens plan er opdelt i to sektioner, af hvilke den ene, målesektionen, er centralt beliggende omkring varmepladens centrum, medens den anden, randsektionen, har form som en ring omkring målesektionen. De to sektioner er adskilt fra hinanden ved en snæver spalte, der er udfyldt med et godt isolerende materiale.



De to sektioner har hver sit system af elektriske modstandsvarmetråde, der er viklet tæt og med ensartet afstand, således at den jævnest mulige varmestrømsfordeling opnås.

Randsektionens varmeafgivelse kan styres således, at temperaturdifferensen over den ringformede spalte kan antages at være meget nær 0 til enhver tid. Dette kan måles ved hjælp af en termoelementkæde.

Hvis man under denne forudsætning tilfører varmepladens målesektion en konstant og målelig elektrisk varmeeffekt, gælder det derfor med god tilnærmelse, at al effekt m vil ledes herfra ud i prøvelegemerne i en retning vinkelret på skillefladen. Forudsættes endvidere at varmepladens randsektion er tilstrækkelig bred (og prøvelegemernes største dimensioner stadig svarer hertil), kan man med rimelighed antage, at varmestrømmene, der udgår fra målesektionen, fortsætter retlinet videre til kølepladerne og altså er endimensional. Ved division af den i målesektionen afsatte varmeeffekt med det dobbelte af sektionens areal (på grund af symmetrien omkring varmepladen), har man et udtryk for varmestrømsintensiteten H' , der går gennem den centrale del af et prøvelegeme, når stationære temperatortilstande er indtrådt. Temperaturdifferenser måles med termoelementer, hvis loddesteder er anbragt dels på den del af prøvelegemets overflader, der

vender mod målesektionen, dels på de centrale dele af overfladerne, der vender mod kølepladerne.

I visse modifikationer af Poensgen-apparatet er tillige anbragt varmemestromsmålere mellem prøvelegemer og varmeplade samt mellem prøvelegeme og køleplader. Herved opnår man mulighed for at kontrollere, dels om varmemestromme gennem prøvelegemerne er endimensionale, dels om varmemestrommene gennem de to prøvelegemer er lige store. Princippet er anvendt i Jespersens apparat [5], hvor varmemestrommens intensitet bestemmes med varmemestromsmålere.

I princippet er en varmemestromsmåler en referenceplade med konstant varmemodstand, der anbringes i en varmemestrom vinkelret på denne. Ved hjælp af en serieforbundet kæde af mange termoelementer, hvis loddesteder vekselvis er anbragt på pladens to overflader, kan differensen mellem overfladernes temperaturer måles med ret god sikkerhed. En kalibrering af varmemestromsmålere kan foretages ved, at man anbringer to af disse på hver side af varmepladen i et Poensgenapparat og registrerer samhörigheden mellem varmemestromme og størrelser af termospændinger fra varmemestromsmålerne, og ved indbyrdes ombytning af de fire varmemestromsmålere kontrollerer kalibreringsresultaterne.

I Jespersens pladeapparat er varmemestromsmålerne fremstillet af lagret gummiplade, gennem hvilken en termoelementkæde af fladtvalsedede kobber- og konstantantråde er syet, således at termoelementernes loddesteder er jævnt fordelt over et areal af samme størrelse som målesektionen i pladeapparatets varmeplade. Arealet af hele varmemestromsmåleren svarer til arealet af apparatets køleplader, og af hensyn til forstyrrelsen, der skabes i varmemestrommen som følge af termoelementtrådenes gode varmeledning, er resten af gummipladen på lignende måde gennemsyet med tråde, så at varmemestromsmåleren i grove træk overalt har samme varmemodstand. Termokædernes loddesteder er beskyttet mod fugt og mekanisk overlast ved, at der på begge sider af varmemestromsmålerne er påvulkaniseret et tyndt gummelag.

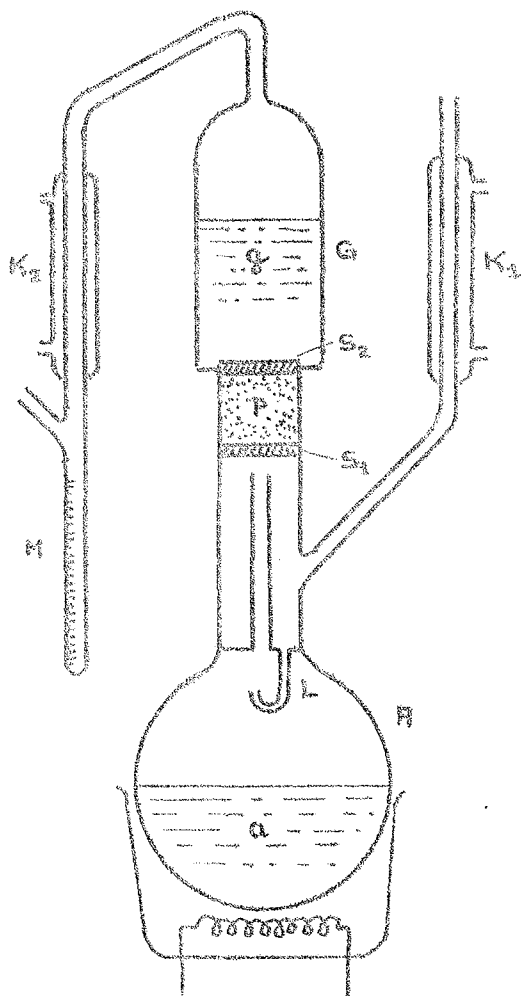
Anvendelsen af gummivarmemestromsmålere medfører, at man som følge af gummiets elasticitet opnår ensartet kontaktmodstand mellem

prøvelegemet og henholdsvis varme- og køleplader, fordi eksistensen af stedvise luftlommer umuliggøres. Denne fordel kunne imidlertid også opnås ved anvendelse af ganske almindelige gummiplader. En ulempe ved mange varmestromsmålerekonstruktioner er nemlig, at deres visning i meget høj grad er afhængig af, hvilket materiale de er i berøring med. Forholdet er uden betydning, hvis man for at sammenligne varmestrommens intensitet, hvor den går ind i prøvelegemets måleareal, og hvor den forlader prøvelegemet, anbringer varmestromsmålere på disse steder, dette under forudsætning af at de materialer, som varmestromsmålernes andre sider berører (varmeplade og køleplader) har omtrent samme varmeledningstal. Ønsker man derimod at bestemme intensiteter med varmestromsmålere, kræves hertil ganske anderledes omfattende kalibreringsmålinger, end det (så vidt vides) er almindeligt. På Laboratoriet for Varveisolering er for nylig indledt en undersøgelse af disse forhold, der skyldes kobber-konstantan-termoelementernes forstyrrende tilstedeværelse i varmestromsmåleren.

Af det foregående vil da ses, at anvendelsen af varmestromsmålere i et pladeapparat af Poensegen-typen er af tvivlsom fordel, når undtages kontrollen af, om varmestrommene er endimensionale. Jespersen har sammenlignet nogle målinger udført med hans pladeapparat på materialer med ret høj λ -værdi med nogle tilsvarende målinger, udført med et andet apparat af Poensegen-typen uden varmestromsmålere. Herved viser det sig, at λ -værdierne fundet med Jespersens apparat ligger betydeligt højere end de, der er fundet med det andet apparat. Jespersen begrundede dette med, at varmestromsmålernes tilstedeværelse forhindrede dannelsen af luftlommer mellem prøvelegemer og varme- og køleplade i modsætning til, hvad tilfældet antages at være ved det andet apparat. Årsagen til de højere fundne λ -værdier kan imidlertid også være den, at Jespersens varmestromsmålere var kalibreret, mens de lå an mod et lag af polystyrenskum, mens det under sammenligningsmålingerne lå an mod et betydelig bedre varmeledende lag. Varmestromsmålerens visning for en given varmestrom skulle altså ifølge antagelsen stige, når måleren lagde an på materialer med større λ -værdi. Dette

bekræftes i nogen grad af de foreløbige undersøgelser foretaget her på laboratoriet.

Pladeapparater af Poensgen-typen er vel anvendelige til bestemmelse af varmeledningstal for både formfaste og løse stoffer, i sidste tilfælde kræves blot, at den på fig. 1 viste randisolering består af et formfast sto. som f.eks. polystyren-skum. λ -værdibestemmelser med denne apparattype er ret langsomme, især for stoffer med stor varmekapacitet, da stationære tilstande her først indtræder i apparatet efter op til flere dages forløb. For opbygning af Poensgen-apparater er indført standard f.eks. DIN 52612 og ASTM C177-42T.



Måling af en varmestrøm, der går igennem et prøvelegeme, kan også ske ved, at den flade, hvorigennem varmestrømmen forlader prøvelegemet, er dækket af en vædske med fri overflade. Når vædsken holdes i kog af den tilstrømmende varme fra prøvelegemet, kan varmestrømmens størrelse bestemmes ved måling af den fordampede vædskemængde.

Tyskeren Schröder [6] har anvendt denne metode ved måling på små prøvelegemer af faste materialer under stationære temperaturforhold. Princippet i måleopstillingen skal kort beskrives.

I kolben A, der opvarmes elektrisk, befirder vædsken a sig, hvis kogepunkt kendes ved atmosfæretryk. Ved opvarmningen af vædsken bringes den i kog.

hvorved dampe strømmer gennem det centrale rør og under udstrømningen fra dette kommer i berøring med sølvpladen S_1 . Når dampene stryger hen under S_1 , vil de kondensere i sådanne mængder, at S_1 tilslut opnår en temperatur, der er lig med a 's kogepunkt. De dampe, der ikke kondenserer her, vil kondensere i kølerøret K_1 under strømningen mod det fri. Al den kondenserede vædske kan strømme tilbage til A gennem røret L , der er bøjet, så at det virker som "vandlås". Når S_1 således holdes på den konstante temperatur, vil sølvpladen S_2 's temperatur stige på grund af ledning gennem prøvelegemet P , indtil den er lig med vædskens g 's kogepunkt, der er noget lavere end a 's.

Vædsken g , der befinder sig i kolben G , har en fri overflade under atmosfæretryk, således at g 's dampe fra kogningen strømmer gennem kølerøret K_2 , kondenserer heri og som vædske opsamles i måleglasset M . Når stationære tilstande er indtrådt i systemet, kan varmestrømmen gennem P bestemmes som produktet af den i M opsamlede vædskemængde og vædske G 's fordampningsvarme. Temperaturdifferensen over P i varmestrømmens retning svarer til forskellen mellem a 's og g 's kogepunkter.

Der er i det foregående gjort forudsætning om, at prøvelegemets øvrige overflade er overordentlig godt isoleret mod randtab. Noget lignende gælder for kolben G , hvor kondensation på kolbens sider jo vil bidrage til forfalskning af måleresultatet. Schröder hævder at have opnået tilstrækkelig isolering ved anvendelse af en dobbeltvægget kolbe G af Dewar^rtypen, mens P er omgivet af en dampkappe, der står i forbindelse med kolbe A .

Ved valg af vædske med passende kogepunktstemperatur kan så godt som ethvert ønsket temperaturniveau og enhver temperaturdifferens for P opnås.

En λ -værdimåling kan med dette apparat gennemføres på højst 15 minutter, og måleusikkerheden hævdes at være $\pm 3\%$.

Hvor prøvematerialerne er pulverformige eller granulater, kan kuglesymmetriske og cylindriske måleopstillinger anvendes.

I den kuglesymmetriske måleopstilling (Nusselts kugle) er

hulrummet mellem to koncentriske kugleskaller fyldt op med prøve-materialet. I den inderste kugleskal er anbragt en elektrisk modstandsvarmekilde med konstant afgiven effekt på en sådan måde, at en ensartet temperatur opnås over hele kugleskallens overflade. Overfladen af den ydre kugleskal holdes på en ensartet og konstant temperatur, f.eks. ved neddykning i en vædske med konstant temperatur (eventuelt en kogende vædske i et Dewar-kar). Temperaturerne af den indre og den ydre kugleskal måles med termoelementer.

Når stationære temperaturforhold er indtrådt i systemet, registreres temperaturdifferensen mellem den indre og den ydre overflade af det kugleskalformede prøvelegeme, og bestemmelsen af størrelsen af varmestrømmen der forløber mellem den indre og den ydre overflade sker ved måling af den elektriske effekt der tilføres den indre kugle. Varmestrømmen må dog korrigeres for de tab der opstår ved varmeledning gennem de elektriske ledninger, der nødvendigvis må tilsluttes den indre kugle. Ved hjælp af udtryk (2), kan prøvematerialets varmeledningstal herefter beregnes.

Diameteren af den ydre kugleskal i Nusselts kugleapparat har almindeligvis en størrelse mellem 20 og 50 cm.

Ved coaxiale måleopstillinger (Kerstens rør) anbringes prøve-materialet i hulrummet mellem to coaxiale cylinderskaller. I den inderste er anbragt en elektrisk modstandsvarmekilde med konstant afgiven effekt på en sådan måde, at en ensartet temperatur opnås overalt på cylinderens overflade. Den ydre cylinders overflade holdes på konstant temperatur, idet den er udformet som en køle-kappe der gennemstrømmes af vand af konstant temperatur. Da rørene er af endelig længde (almindeligvis 2 - 3 meter), kan man ikke uden videre se bort fra axialledning i opstillingen. Af denne grund er den inderste cylinder i længderetningen delt op i en central målesektion og to randsektioner, hvis tilførte effekt hver især kan reguleres uafhængigt. De tre sektioner er adskilt fra hinanden ved spalter af et godt isolerende materiale, over hvilke temperaturdifferensen kan måles med termoelementer. Ved regulering af effekten til randsektionerne søger man at gøre disse temperatur-

differenser så nær nul som muligt. Ved passende valg af længdeforholdet mellem randsektioner og målesektion kan man med god tilnærmelse antage, at varmemstrømmen fra målesektionen udelukkende forløber i radial retning. Efter måling af temperaturdifferenserne mellem målesektion og den ydre cylinderskal, samt af målesektionens tilførte effekt, kan prøvematerialets varmeledningstal beregnes ved benyttelse af udtryk (2).

Usikkerheden på bestemmelsen af varmeledningstal ved stationære metoder angives almindeligvis af apparaternes konstruktører til at være af størrelsesordenen 3 - 4 %, og målingernes reproducibilitet synes at bekræfte dette under forudsætning af at der ikke er begået systematiske fejl under målingerne. Dette synes imidlertid ofte at være tilfældet, idet en sammenligning af målinger foretaget på et og samme prøvelegeme i forskellige pladeapparater der var i brug hos forskellige medlemmer af RILEM [7] har vist afvigelser på op til 30 %, gældende for et prøvelegeme af marmor, mens bestemmelser for et prøvelegeme af kork afveg op til 7 %. For materialer med lavt varmeledningstal er afvigelserne altså af samme størrelsesorden som de almindeligt angivne usikkerheder, mens målinger på materialer med høje λ - værdier tilsyneladende giver langt større usikkerhed på resultaterne end forventet af apparatkonstruktørerne. Visse af måleresultaterne som blev opgivet af RILEM - medlemmerne var ikke veldefinerede, da en angivelse af middeltemperatur og varmestrom benyttet ved bestemmelsen ikke var anført. Dette kan imidlertid ikke fuldt forklare de ret høje afvigelser, idet varmeledningstallets temperaturafhængighed hos de enkelte afprøvede materialer langt fra er så store. En anden forudsætning ved undersøgelsen var, at materialernes fugtindhold havde en bestemt lav værdi. Forskriften for prøvelegemernes konditionering var at de skulle opbevares i et rum med temperaturen 50°C , 20 % relativ fugtighed, indtil konstant vægt af prøvelegemet nåedes. Denne forskrift

er ikke overholdt, og dette forhold kan vel være en anden årsag til afvigelserne i resultaterne.

Et lignende sammenlignende forsøg agtes påbegyndt af RILEM, hvor det må kræves, at måleforskrifterne overholdes nøje, og man må med stor interesse afvente resultatet.

Det synes dog at fremgå af den udførte sammenligning, som om Poensgen-apparattypens anvendelsesområde begrænses til måling på stoffer med varmeledningstal under en vis værdi, som dog kun kan fastlægges ved nye sammenligninger af målinger på en serie stoffer med varmeledningstal, der tilsammen kan dække λ -værdiområdet mellem 0,03 og ca. $2 \frac{\text{kcal}}{\text{mh}^\circ\text{C}}$ jævnt.

2.1. Varmeindtrængningstallets betydning for kontakttemperaturen, når to materialer bringes i berøring med hinanden.

Enkelheden i det teoretiske udtryk (formel 5e) for temperaturen i kontaktplanen mellem to halvuendelige materialer, som til tiden $t = 0$ bringes i berøring med hinanden, kan friste til udformning af en målemetode til bestemmelse af b -værdier, som nøje følger teorien:

Et pladeformet målelegeme, A, af et materiale med kendt λ , ρ og c er planslebet på den ene begrænsningsflade. I centrum af den slebne flade og i plan hermed er anbragt en temperaturføler (f.eks. et termoelements ene loddested). Materialet, hvis b -værdi, b_p , ønskes bestemt, tildannes i form af en plade, P, hvis ene begrænsningsflade er plansleben.

Pladerne A og P konditioneres således, at A overalt har temperaturen ϑ_A , og P overalt har temperaturen ϑ_B (som kan måles med et termoelement anbragt i P's planslebne flade).

Til et givet tidspunkt bringes A's og P's planslebne flader i indbyrdes kontakt, og i en kort tid herefter, mens A's og P's udstrækninger vinkelret på kontaktfladen endnu kan regnes at være uendelige, skulle kontakttemperaturen ϑ_k være at måle med temperaturføleren i A.

Idet formel (5a) lyder

$$\vartheta_k = \frac{\vartheta_A b_A + \vartheta_p b_p}{b_A + b_p},$$

og ϑ_k , ϑ_A , ϑ_p og b_A er kendte størrelser, kan b_p bestemmes af

$$b_p = b_A \frac{\vartheta_A - \vartheta_k}{\vartheta_k - \vartheta_p}$$

Så vidt vides er målinger efter dette princip ikke foretaget. Visse vanskeligheder må da også kunne opstå, idet i det mindste et af legemerne må flyttes fra de omgivelser, som det var i ligevægt med under konditioneringen og herved blive forstyrret i termisk henseende allerede for $t < 0$. Alle legemets begrænsningsflader, på nær den planslebne, kan isoleres så effektivt, at en termisk forstyrrelse hidrørende fra flytningen ikke vil få målelig indflydelse i selve måleperioden. Tilbage er så problemet at beskytte den planslebne flade under flytningen. Hvorvidt en sådan beskyttelse overhovedet er påkrævet vil kunne godtgøres ved overslagsberegninger og forsøgsmålinger.

Foreligger et materiales varmeindtrængningstal b bestemt, vil man kunne finde dets λ -værdi, hvis størrelse^{rne} ρ og c er kendte, eller ρc er målelig. Imidlertid gælder det for mange porøse stoffer (hovedparten af isoleringsmaterialerne), at hverken c eller ρc lader sig bestemme med passende nøjagtighed ved normale kalorimetriske målinger.

Kombineret med en måling af materialers a -værdi (f.eks. med det periodestationære apparat, afsnit 2,4) vil b -værdien kunne give oplysninger både om λ og ρc .

Man har:

$$\lambda = \sqrt{\lambda \rho c} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c}} = \sqrt{a} \quad \text{og}$$

$$\rho c = \frac{\sqrt{\lambda \rho c}}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho c}}} = \frac{b}{\sqrt{a}}.$$

Begrebet varmeindtrængningstal anvendes en del i tysk litteratur, bl.a. i forbindelse med bestemmelse af kontakttemperaturer ved menneskelig berøring af genstande af given høj eller lave temperatur. Det ses af udtrykket (5a), at for en given temperatur af en genstand vil kontakttemperaturen fjerne sig stedse mere fra den oprindelige hudtemperatur, jo større b-værdi genstanden har (hvilket jo også var at forvente). Tyskeren W. Schüle har undersøgt visse forhold i denne forbindelse og har fundet, at man for den menneskelige hud kan sætte en b-værdi, $b = 12-21 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^{1/2} \text{ }^\circ\text{C}$, bl.a. afhængig af blodgennemstrømningen i huden. Et apparat, som med tilnærmelse i termisk henseende skulle illudere en menneskefod, er også anvendt til måling af kontakttemperatur under undersøgelser af forskellige gulvmaterialers egnethed til trafik på bare fødder.

2.2. Krischer og Esdorns apparat til bestemmelse af både varmeledningstal, varmeindtrængningstal og varmekapacitet.

Krischer og Esdorn [8] har udviklet en hurtig og elegant metode til bestemmelse af faste materialers varmeindtrængningstal og varmeledningstal, varmekapacitet og temperaturledningstal.

De ideelle forsøgsbetingelser svarer til randbetingelsessættet γ , altså for tilfældet hvor en varmestrom af konstant størrelse påtrykkes den ene flade af en planparallel prøve af materialet, der ønskes undersøgt. Prøvens modsatte flade er uendelig godt isoleret.

Løsningen (7) på dette problem,

$$\vartheta = \frac{H'1}{\lambda} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{1} \right)^2 - \frac{x}{1} + \frac{1}{3} + \frac{at}{1^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{at}{1^2} \right)}}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \right],$$

ses for små værdier af tiden t at kunne tilnærmes ved udtrykket (6)

$$\vartheta = \frac{H'}{\lambda} \left[2\sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4at}} - x \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right] = \frac{2H' \sqrt{t}}{\sqrt{\lambda \rho c} \sqrt{\pi}} \left[e^{\frac{-x^2}{4at}} - \frac{x}{2\sqrt{at}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right],$$

der gælder for en uendelig tyk prøve.

For store værdier af t , kan (7) med tilnærmelse skrives som

$$\vartheta = \frac{H' l}{\lambda} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{x}{l} + A + \frac{at}{l^2} \right] \quad (24)$$

For $x = 0$ antager (6) formen (6a),

$$\vartheta = \frac{2H'}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \sqrt{t} = \frac{2H'}{\sqrt{\pi} b} \sqrt{t},$$

hvoraf man ser, at afbildes temperaturstigningen i planen $x = 0$ som funktion af kvadratroden på tiden, der er forløbet siden forsøgets start, vil der fremkomme en ret linie, af hvis hældning man kan beregne b , idet H' jo er en målelig størrelse.

Efter en vis tid, forløbet siden forsøgets start, bliver tilnærmelsen af (7) med (6) ugyldig, og en vis overgangsperiode må overstås, inden tilnærmelsen af (7) med (24) gælder (systemet indtræder i en kvasistationær tilstand). Når dette omsider er tilfældet, viser udtrykket (24), at differensen mellem temperaturerne ϑ_0 og ϑ_1 målt samtidig i henholdsvis planen $x = 0$ og $x = l$ vil være konstant og af størrelsen

$$\vartheta_0 - \vartheta_1 = \frac{H' l}{\lambda} \left[A + \frac{at}{l^2} - \left(\frac{1}{2} - 1 + A + \frac{at}{l^2} \right) \right] = \frac{H' l}{2\lambda}, \text{ eller}$$

$$\lambda = \frac{H' l}{2(\vartheta_0 - \vartheta_1)} \quad (24a)$$

Heraf ses, at λ kan beregnes ved måling af $\vartheta_0 - \vartheta_1$, idet H' jo som før nævnt er en målelig størrelse.

Differentiation af (24) med hensyn til t giver

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{H'la}{\lambda l^2} = \frac{H'}{l\rho c}, \quad (24b)$$

en afbildning af temperaturen i en vilkårlig plan $x = x_1$, som funktion af tiden giver altså en ret linie, af hvis hældning varmekapaciteten ρc kan beregnes.

Idet temperaturen af planen $x = 0$ passerer en vilkårlig given værdi til tiden t_1 , og planen $x = l$ antager samme værdi til det senere tidspunkt t_2 , kan man skrive

$$\vartheta_{x=0, t=t_1} = \frac{H'l}{\lambda} \left[A + \frac{at_1}{l^2} \right] =$$

$$\vartheta_{x=l, t=t_2} = \frac{H'l}{\lambda} \left[-\frac{1}{2} + A + \frac{at_2}{l^2} \right],$$

eller
$$a = \frac{l^2}{2(t_2 - t_1)}, \quad (24c)$$

hvorved temperaturledningstallet a altså bestemmes.

Måleopstillingen er opbygget på følgende måde (se fig. 1):

En søjle bestående af otte ens plader P med tykkelse l af materialet, der skal afprøves, er i begge ender afsluttet med en isolering I . Prøvepladerne er alle slebet planparallelle på de flader, som ligger an mod en anden plade.

I hver anden af skillefladerne mellem prøvepladerne er indlagt et 0,01 mm tykt valset varmemefolie af en Cr-Ni-legering. Folierne har arealer svarende til arealet af en sleben flade af P . De fire folier er forbundet i serie ved hjælp af 3 stykker messingfolie, således at det hele udgør et langt varmemebånd V , som kan tilsluttes en stabiliseret

varmemodstand, samt af randforstyrrelser gengives i det følgende. Først diskuteres dog de tidsintervaller, for hvilke udtrykket (7) kan tilnærmes ved henholdsvis (6) og (24).

Først behandles det måleafsnit, hvor b kan beregnes af temperaturtidskurven i planen $x=0$:

Differentiation af (6a) med hensyn til t giver

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H'l}{\lambda\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a}{l^2 t}}, \quad (6c)$$

og differentiation af (7) med hensyn til t giver i plan $x=0$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H'l a}{\lambda l^2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-(n\pi)^2 \frac{at}{s^2}} \right] \quad (7a)$$

Krischer og Esdorn har formuleret kravet om god tilnærmelse ved at forlange, at $\frac{d\theta}{dt}$ beregnet af (6c) og (7a) højst må afvige 0,5 % indbyrdes.

Idet den maximale tidsværdi, for hvilket dette er tilfældet, kaldes t_{M1max} , kan kravet udtrykkes

$$1,005 \frac{H'l}{\lambda\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a}{l^2 t_{M1max}}} = \frac{H'a}{\lambda l} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-(n\pi)^2 \frac{a t_{M1max}}{l^2}} \right]$$

hvoraf t_{M1max} kan findes ved prøve.

$$t_{M1max} = \frac{l^2}{6a} \quad (25)$$

Hvor (7) tilnærmes ved (24), kræves ligeledes, at hældningen af de to temperatur-tidskurver beregnet for $x=0$ afviger mindre end 0,5 %.

Ved differentiation af (24 med hensyn til t fås for $x=0$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H' l a}{\lambda l^2} ,$$

og kravet kan, idet tidspunktet for opfyldelsen af kravet kaldes t_{M2min} , skrives

$$1,005 \frac{H' a}{\lambda l} = \frac{H' a}{\lambda l} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-\frac{(n\pi)^2 a t_{M2min}}{l^2}} \right], \text{ eller}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-\frac{(n\pi)^2 a t_{M2min}}{l^2}} = 0,005 ,$$

hvoraf t_{M2min} findes.

$$t_{M2min} = \frac{3,5 l^2}{6 a} = 3,5 t_{M1max} .$$

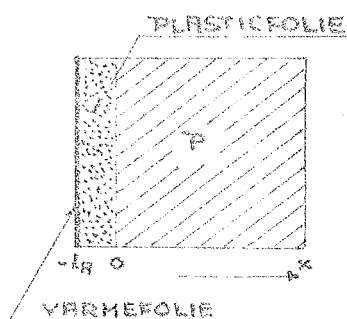


fig. 2a

Længden af denne måleperiode behøver kun at være ca. $1,5 t_{M1max}$, hvoraf man ser, at den totale tid, der er nødvendig for samtlige målinger er

$$t_{total} = 3,5 t_{M1max} + 1,5 t_{M1max} = 5 t_{M1max} .$$

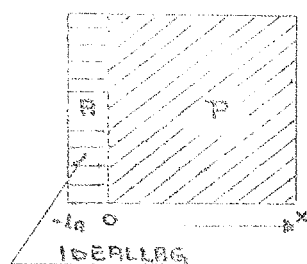


fig. 2b

I diskussionen om målingernes afhængighed af plastic foliets og varmemefoliets tilstedeværelse, tilnærmes opstillingen, der i virkeligheden ser ud som skitseret i fig. 2a med den idealiserede opstilling (fig. 2b),

hvor et ideallag A er indført i stedet for varmemefolie og plasticfolie. A's tykkelse er l_A og svarer altså til tykkelsen af plasticfoliet i fig. 2a, og A's λ -værdi svarer til λ -værdien for plasticfoliet, mens A's varmekapacitet fremkommer ved at varmekapaciteten af den halve tykkelse af varmemefoliet (foliet udsender jo en varmestøm til begge sider) indkorporeres i varmekapaciteten for plasticfoliet.

Man betragter nu opstillingen i fig. 2a, hvor laget A i planen $x = -l_A$ får påtrykt en konstant specifik varmestøm H' i tiden $t > 0$.

Idet størrelser med index A refererer til lag A, mens index P refererer til prøvelegemet, løses (1a) med randbetingelserne:

$$t < 0, -l_A \leq x < \infty \quad \Rightarrow \vartheta = 0$$

$$t > 0, x = -l_A \quad \Rightarrow -\lambda_A \frac{\delta \vartheta_A}{\delta x} = H'$$

$$t > 0, x = 0 \quad \Rightarrow \vartheta_A = \vartheta_P \quad \text{og} \quad \lambda_A \frac{\delta \vartheta_A}{\delta x} = \lambda_P \frac{\delta \vartheta_P}{\delta x}$$

$$t > 0, x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \vartheta_P = 0.$$

Ved Laplace-transformation bliver randbetingelserne:

$$t < 0, -l_A \leq x < \infty \quad \Rightarrow \bar{\vartheta} = 0$$

$$t > 0, x = -l_A \quad \Rightarrow -\lambda_A \frac{d\bar{\vartheta}_A}{dx} = \frac{H'}{p} \quad (26)$$

$$t > 0, x = 0 \quad \Rightarrow \bar{\vartheta}_A = \bar{\vartheta}_P \quad \text{og} \quad \lambda_A \frac{d\bar{\vartheta}_A}{dx} = \lambda_P \frac{d\bar{\vartheta}_P}{dx} \quad (27) \text{ og } (28)$$

$$t > 0, x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \bar{\vartheta}_P = 0 \quad (29)$$

Løsningen af (1a)'s transformerede er (4a) med den afledte (5a):

$$\bar{\vartheta}_A = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} \quad (30) \quad \text{og} \quad \bar{\vartheta}_P = C_3 e^{rx} + C_4 e^{-rx} \quad (31)$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dx}{}_A = q(C_1 e^{qx} - C_2 e^{-qx}) \quad (32) \quad \text{og} \quad \frac{d\bar{\vartheta}}{dx}{}_P = r(C_3 e^{rx} - C_4 e^{-rx}) , \quad (33)$$

hvor

$$q = \sqrt{\frac{p}{a_A}} \quad \text{og} \quad r = \sqrt{\frac{p}{a_P}} ,$$

og konstanterne findes ved løsning med randbetingelserne.

Løsning af (31) med (29) giver

$$C_3 = 0$$

(27), (30) og (31) giver herefter:

$$C_1 + C_2 = C_4 \quad (34)$$

(28), (32) og (33) giver

$$\lambda_A q(C_1 - C_2) = -\lambda_P r C_4 ,$$

$$\text{eller} \quad \frac{\lambda_A q}{\lambda_P r} (C_1 - C_2) = \frac{b_A}{b_P} (C_1 - C_2) = -C_4 \quad (35)$$

(26) og (32) giver:

$$-\lambda_A q(C_1 e^{-ql_A} - C_2 e^{ql_A}) = \frac{H}{p} , \quad (36)$$

Addition af (34) og (35) giver

$$C_2 = -C_1 \frac{1 + \frac{b_A}{b_P}}{1 - \frac{b_A}{b_P}} = -C_1 \frac{b_P + b_A}{b_P - b_A} ,$$

der sammen med (36) giver

$$C_1 = - \frac{H'}{\lambda_A pq \left(\frac{b_P + b_A}{b_P - b_A} e^{ql_A} + e^{-ql_A} \right)}$$

$$C_2 = \frac{H' \frac{b_P + b_A}{b_P - b_A}}{\lambda_A pq \left(\frac{b_P + b_A}{b_P - b_A} e^{ql_A} + e^{-ql_A} \right)}$$

$$C_4 = \frac{H' \frac{2b_A}{b_P - b_A}}{\lambda_A pq \left(\frac{b_P + b_A}{b_P - b_A} e^{ql_A} + e^{-ql_A} \right)}$$

Indsættes C_1 og C_2 i (30), fås:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{G}}_A = - \frac{H'}{\lambda_A} \left\{ \frac{\frac{b_P - b_A}{b_P + b_A} e^{q(x-l_A)}}{pq \left(1 + \frac{b_P - b_A}{b_P + b_A} e^{-2ql_A} \right)} - \right. \\ \left. - \frac{e^{-q(x+l_A)}}{pq \left(1 + \frac{b_P - b_A}{b_P + b_A} e^{-2ql_A} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Idet det erindres, at $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$, omskrives (37) til

$$\bar{\mathfrak{G}}_A = \frac{H'}{\lambda_A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{b_P - b_A}{b_P + b_A} \right)^n \cdot e^{-q((2n+1)l_A + x)}}{pq} + \right.$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{b_P - b_A}{b_P + b_A}\right)^{n+1} (-1)^n e^{-q((2n+1)l_A - x)}}{pq} \quad \left. \vphantom{\sum_{n=0}^{\infty}} \right\} \quad (38)$$

Objektfunktionen ϑ_A findes ved anvendelse af en af tabellerne over Laplace-transformerede til transformation af hvert enkelt led af potensrækkerne i udtryk (38), og man får således:

$$\begin{aligned} \vartheta_A = & \frac{2H' \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} b_A} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b_P - b_A}{b_P + b_A}\right)^n \left[e^{-\left(\frac{(2n+1)l_A + x}{2\sqrt{a_A t}}\right)^2} - \right. \\ & - \sqrt{\pi} \frac{(2n+1)l_A + x}{2\sqrt{a_A t}} \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)l_A + x}{2\sqrt{a_A t}} - \\ & \left. - \left(\frac{b_P - b_A}{b_P + b_A}\right) \left(e^{-\left(\frac{(2n+1)l_A - x}{2\sqrt{a_A t}}\right)^2} - \sqrt{\pi} \frac{(2n+1)l_A - x}{2\sqrt{a_A t}} \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)l_A - x}{2\sqrt{a_A t}} \right) \right] \end{aligned}$$

Differentiation af dette udtryk med hensyn til $\sqrt{t}$, giver i planen $x=0$, hvor termoelementernes loddesteder er anbragt:

$$\frac{\delta \vartheta}{\delta \sqrt{t}} = \frac{4H'}{\sqrt{\pi} (b_P + b_A)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b_P - b_A}{b_P + b_A}\right)^n \cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)l_A}{2\sqrt{a_A t}}\right)^2} \quad (39)$$

I planen $x=0$ kan det virkelige temperaturforløb altså afbildes i et $\vartheta - \sqrt{t}$ - diagram som en kurve med hældning bestemt ved (39).

Tilnærmes denne kurve inden for den gyldige måletid med en ret linie, kan man af dennes hældning og ved hjælp af (6b) beregne en hjælpeværdi, som vi kan kalde b_P^+ . Til beregning af b_P indføres herefter korrektionsfaktoren K_P , således at det gælder at

$$b_P = b_P^+ K_P ,$$

og K_P kan følgelig bestemmes som kvotienten af $\frac{\delta \vartheta}{\delta \sqrt{t}}$ beregnet af henholdsvis udtryk (39) og udtryk (6b). Man har altså

$$K_P = \frac{\frac{4H'}{\sqrt{\pi} (b_P + b_A)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{b_P - b_A}{b_P + b_A} \right)^n \cdot e^{-\left\{ \frac{(2n+1)l_A}{2\sqrt{a_A t}} \right\}^2}}{\frac{2H'}{\sqrt{\pi} b_P}} =$$

$$= \frac{2b_P}{b_P + b_A} \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{b_P - b_A}{b_P + b_A} \right)^n \cdot e^{-\left\{ \frac{(2n+1)l_A}{2\sqrt{a_A t}} \right\}^2} .$$

Krischer og Esdorn har for varierende forhold $\frac{b_P}{b_A}$ beregnet værdier af K_P i afhængighed af t , gældende for $l_A = 0,24$ mm, $a_A = 3,82 \cdot 10^{-4}$ m²/h og $b_A = 6,66$ kcal/m²h^{1/2} °C .

Afhængigheden er gengivet i fig. 3.

For den kvasistationære del af målingen er beregningen af en korrektionsfaktor gennemført således, at korrektion også kan foretages i tilfælde, hvor termoelementet i plan $x=l$ er monteret på et plasticfolie, C. I fig. 4 vises den idealiserede opstilling, der ligger til grund for beregningerne. Lag A er idealiseret som tidligere og har egenskaber betegnet med index A, mens størrelser

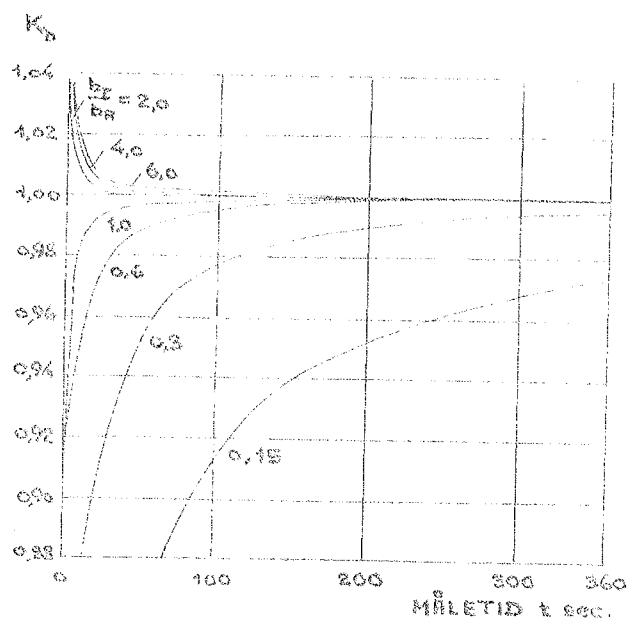


fig. 3

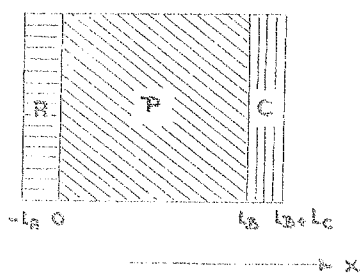


fig. 4

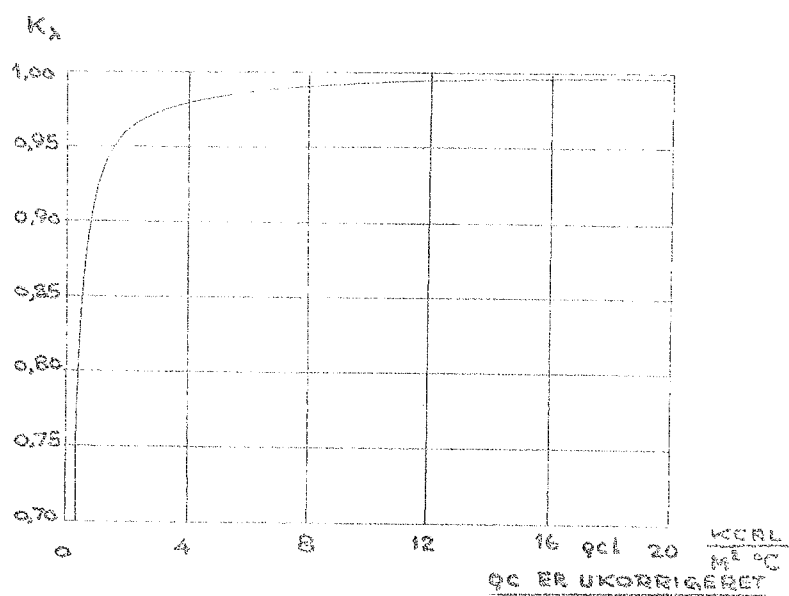


fig. 5

karakteristiske for lag P og C forsynes med indici henholdvis P og C.

I den kvasistationære tilstand kan temperaturforløbet i A, P og C beskrives ved udtryk af samme art som (24), nemlig henholdsvis

$$\begin{aligned}\vartheta_A &= E_A x^2 + F_A x + G_A + H_A t, \\ \vartheta_P &= E_P x^2 + F_P x + G_P + H_P t \quad \text{og} \\ \vartheta_C &= E_C x^2 + F_C x + G_C + H_C t\end{aligned}\tag{40}$$

med randbetingelserne

$$t > 0, x = -l_A \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \vartheta_A}{\delta x} = -\frac{H_A}{\lambda_A}$$

$$t > 0, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_A = \vartheta_P \quad \text{og} \quad \lambda_A \frac{\delta \vartheta_A}{\delta x} = \lambda_P \frac{\delta \vartheta_P}{\delta x}$$

$$t > 0, x = l_B \quad \Rightarrow \quad \vartheta_P = \vartheta_C \quad \text{og} \quad \lambda_P \frac{\delta \vartheta_P}{\delta x} = \lambda_C \frac{\delta \vartheta_C}{\delta x}$$

$$t > 0, x = l_B + l_C \quad \Rightarrow \quad \lambda_C \frac{\delta \vartheta_C}{\delta x} = 0$$

og f.eks.

$$t = 0, x = l_B + l_C \quad \Rightarrow \quad \vartheta_C = 0$$

Konstanterne i udtrykket (40) findes herefter til

$$E_P = \frac{H' \rho_P c_P}{2\lambda_P S}$$

$$F_P = \frac{-H' \left(1 - \frac{\rho_A c_A l_A}{S} \right)}{\lambda_P}$$

$$G_P = \frac{H' l_P \left(\rho_C c_C l_C \left(2 + \frac{\lambda_P l_C}{\lambda_C l_P} \right) + \rho_P c_P l_P \right)}{2\lambda_P S}$$

$$H_P = \frac{H'}{S}, \text{ hvor } S = \rho_A c_A l_A + \rho_P c_P l_P + \rho_C c_C l_C.$$

Heraf kan differensen mellem samtidige temperaturer i planerne $x=0$ og $x=l_P$ udtrykkes ved

$$\vartheta_{Po} - \vartheta_{Pl_P} = \frac{H' l_P}{2\lambda_P} \left(1 - \frac{\rho_A c_A l_A - \rho_C c_C l_C}{S} \right),$$

og man har

$$\lambda_P = \frac{H' l_P}{2(\vartheta_{Po} - \vartheta_{Pl_P})} \left(1 - \frac{\rho_A c_A l_A - \rho_C c_C l_C}{S} \right) \quad (41)$$

Man ser, at (41) kun formelt adskiller sig fra (24a) ved faktoren (korrektionsfaktoren)

$$K_\lambda = 1 - \frac{\rho_A c_A l_A - \rho_C c_C l_C}{S},$$

idet λ_P , l_P , ϑ_{Po} og ϑ_{Pl_P} jo svarer til λ , l , ϑ_0 og ϑ_l .

Differentiation af (40) med hensyn til t giver

$$\frac{\delta \vartheta_P}{\delta t} = H_P = \frac{H'}{S} = \frac{H'}{\rho_P c_P l_P} \left(1 - \frac{\rho_A c_A l_A + \rho_C c_C l_C}{S} \right) \quad (42)$$

Formelt adskiller (42) sig kun fra (24b) ved korrektionsfaktoren

$$K_{\rho c} = 1 - \frac{\rho_A c_A l_A + \rho_C c_C l_C}{S}$$

Korrektionsfaktoren for a , der beregnes efter (24c), findes som kvotienten af K_λ og $K_{\rho c}$, og man får altså

$$K_a = \frac{K_\lambda}{K_{\rho c}} = 1 + \frac{2 \rho_C c_C l_C}{S - \rho_A c_A l_A - \rho_C c_C l_C}.$$

Det ses, at i de tilfælde, hvor lag C ikke er tilstede i opstillingen, er $K_\lambda = K_{\rho c}$, og $K_a = 1$. I figur 5 vises for et sådant tilfælde $K_\lambda (= K_{\rho c})$'s variation i afhængighed af produktet af den ved (24b) beregnede (ukorrigerede) varmekapacitet og pladetykkelsen l . ρ_A , c_A og l_A har de samme værdier som ved afbildningen i figur 3.

Undersøgelsen af randforstyrrelser spaltes op i to dele. Den ene del, I, angår problemet, at søjlen i figur 1 i begge ender er afsluttet med et isoleringslag, så at man altså her ikke helt kan regne med at $\lambda_P \frac{\delta \theta}{\delta x} = 0$.

Den anden del, II, bestemmer det pladetværsnit (vinkelret på x -retningen), der er nødvendigt for at afvigelserne fra de endimensionale varmestrømme kun har en indflydelse på måleresultatet på højst 0,5 % indenfor måletiden.

I.

Ved hjælp af udtryk (7) kan man opstille et udtryk til bestemmelse af en værdi af $\frac{at}{l^2}$, for hvilken det gælder at temperaturstigningen siden forsøgets start i planen $x=l$ udgør f.eks. 0,5 % af temperaturstigningen i planen $x=0$. Man har altså:

$$\begin{aligned} 0,005 \left[\frac{1}{3} + \frac{at}{l^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^2} e^{-(n\pi)^2 \frac{at}{l^2}} \right] = \\ = \left[-\frac{1}{6} + \frac{at}{l^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{(n\pi)^2} e^{-(n\pi)^2 \frac{at}{l^2}} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

løsningen på (43) er $\frac{at}{l^2} = 0,070$, der regnes for at være den dimensionsløse tid, der forløber, inden en forstyrrelse i plan $x=0$ giver sig måleligt til kende i plan $x=l$.

Betragter man det øverste og nederste lag af varmemfolien, vil impulsen fra påtrykningen af varmestrommen ved forsøgets start møde isoleringens endelige varmemodstand og derved "forvrænges". Denne forvrængning udbreder sig også tilbage gennem prøvepladerne P og når målefeltet efter at have gennemløbet vejlængden 3 l herfra. I alt skal impulsen fra de yderste varmemfolier i søjlen gennemløbe vejlængden 4 l, førend virkningen af deres forvrængning undervejs kan spores måleligt i målefeltet. Tiden for gennemløbet af 4 l er

$$t = \frac{0,070 \cdot (4 l)^2}{a} = \frac{1,12 l^2}{a},$$

mens den tidligere fundne totale måletid er

$$t = \frac{5 l^2}{6a} = \frac{0,83 l^2}{a},$$

Dette viser, at randforstyrrelserne i aksial retning ingen indflydelse vil have under målingen, når opstillingen som skitseret (fig.1) består af otte prøveplader P.

II.

I denne undersøgelse må man, for at muliggøre en overkommelig matematisk løsning af problemet, tilnærme en prøveplade P ved en i pladen indskrevet cirkulær cylinder med radius R. Til $t=0$ har cylinderen overalt overtemperaturen ϑ_A , hvis størrelse er bestemt som middeltemperaturen af en prøveplade efter halvdelen af den totale måletids forløb.

Til tiden $t>0$ står cylinderens krumme overflade i varmeudveksling med omgivelserne (med den relative temperatur = 0), og man bestemmer i det følgende en dimensionsløs tid, $\frac{at}{(2R^2)}$, for hvilken

afkølingen i cylinderaksen netop er vokset til 0,5% af temperaturforskellen $\vartheta_0 - \vartheta_1$, der anvendes i (24a) i den kvasistationære tilstand.

For det cylindriske tilfælde gælder (1c):

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 ,$$

og randbetingelserne er her:

$$t = 0, 0 < r < R \quad \Rightarrow \vartheta = \vartheta_A$$

$$t > 0, r = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0$$

$$t > 0, r = R \quad \Rightarrow -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \alpha \vartheta ,$$

hvor α er varmeovergangsmodstanden.

Ved Laplace-transformation har man

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\vartheta}}{dr} - q^2 \bar{\vartheta} + \frac{\vartheta_A}{a} = 0 ,$$

$$\text{eller} \quad \frac{d^2 (\bar{\vartheta} - \frac{\vartheta_A}{p})}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(\bar{\vartheta} - \frac{\vartheta_A}{p})}{dr} - q^2 (\bar{\vartheta} - \frac{\vartheta_A}{p}) = 0 \quad (44)$$

$$t > 0, r = 0 \quad \Rightarrow \frac{d\bar{\vartheta}}{dr} = 0$$

$$t > 0, r = R \quad \Rightarrow -\lambda \frac{d\bar{\vartheta}}{dr} = \alpha \bar{\vartheta} \quad (44a)$$

Løsningen på (44) er

$$(\bar{\vartheta} - \frac{\vartheta_A}{p}) = C I_0(qr) ,$$

$$\text{eller} \quad \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta_A}{p} + C I_0(qr)$$

med den afledede

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dr} = q C I_1(qr),$$

hvor C bestemmes ved indsættelse i randbetingelsen (44a)

$$-\lambda q C I_1(qR) = \alpha \frac{\vartheta_A}{p} + \alpha C I_0(qR),$$

$$C = \frac{-\alpha \vartheta_A}{p(\lambda q I_1(qR) + \alpha I_0(qR))}$$

$$\bar{\vartheta} = \frac{\vartheta_A}{p} \left(1 - \frac{\alpha I_0(qr)}{\lambda q I_1(qR) + \alpha I_0(qR)} \right).$$

Ved anvendelse af udviklingssætningen og residueregning, findes den tilhørende objektfunktion

$$\vartheta = \frac{2\vartheta_A}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_n R) J_0(\beta_n r) e^{\beta_n^2 a t}}{\beta_n (J_0^2(\beta_n R) + J_1^2(\beta_n R))}.$$

Her er $\beta_n R$, $n = 1, 2, 3, \dots$, rødderne i ligningen

$$\beta_n R J_1(\beta_n R) = \frac{\alpha R}{\lambda} J_0(\beta_n R)$$

Tabeller, der giver de 5 første rødder i ligningen for forskellige værdier af $\frac{\alpha R}{\lambda}$ findes blandt andet i Carslaw og Jaeger [1], Appendix IV.

Som tidligere nævnt bestemmes ϑ_A ved ligningen

$$\vartheta_A = \frac{H'1}{\lambda} \frac{1}{1} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{1} \right)^2 - \frac{x}{1} + \frac{1}{3} + \frac{a}{1^2} \frac{2,5}{6a} \frac{1^2}{6a} \right] dx = 0,42 \frac{H'1}{\lambda}$$

Den temperatursenkning, akslen får i løbet af måletiden $t = \frac{5}{6a} \frac{1^2}{6a}$,

kaldes $\Delta\vartheta$. Man har for $\Delta\vartheta$:

$$\Delta\vartheta = 0,42 \frac{H'1}{\lambda} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_n R} \frac{J_1(\beta_n R) e^{-(\beta_n R)^2 \frac{10}{3} \left(\frac{1}{2R}\right)^2}}{J_0^2(\beta_n R) + J_1^2(\beta_n R)} \right].$$

Kvotienten af $\Delta\vartheta$ og $\vartheta_0 - \vartheta_1$ fra (24a) skal ifølge kravene være mindre end 0,5 % :

$$\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_0 - \vartheta_1} = 0,84 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\beta_n R) e^{-(\beta_n R)^2 \frac{10}{3} \left(\frac{1}{2R}\right)^2}}{\beta_n R (J_0^2(\beta_n R) + J_1^2(\beta_n R))} \right] \leq 0,005$$

Krischer og Esdorn har optegnet et diagram over de maximalt tilladelige værdier af l for tre værdier af $2R$ og i afhængighed af $\frac{\lambda}{\alpha}$.

Måleapparatet er ifølge beskrivelsen beregnet til prøveplader, hvis dimensioner kan variere mellem $9,5 \times 9,5 \times 1,0 \text{ cm}^3$ og $9,5 \times 9,5 \times 2,5 \text{ cm}^3$. Pladerne spændes sammen mod hinanden med en bøjle, hvis kræfter angriber på ydersiderne af endeisoleringerne I (fig. 1). Hele måleopstillingen indkapsles i en blank, lufttæt aluminiumkasse, så en alt for kraftig varmeudveksling med omgivelserne undgås. Herved opnås yderligere mulighed for opretholdelse af en vilkårlig atmosfære omkring pladerne.

Forfatterne har målt på materialerne skumglas, plexiglas, gummi og marmor og har beregnet en teoretisk usikkerhed på bestemmelsen af λ -værdien for disse materialer på $\pm 2,1 \%$ og derunder. De totale måletider er mindre end 15 minutter.

Beregningerne af λ og ρc ud fra måleresultaterne er sammenholdt med tilsvarende målinger med Poensgen-apparat og kalorimeter, og afvigelserne herfra er mindre end henholdsvis 1,3 % og 2,3 %.

λ -værdien for materialet kan beregnes på to forskellige måder ud fra måleresultaterne, nemlig dels ved hjælp af (24a), dels ved anvendelse af de fundne værdier for $b = \sqrt{\rho c}$ og ρc , idet det benyttes, at $\lambda = \frac{b^2}{\rho c}$. En sammenligning af λ fundet ved disse måder kan blandt andet vise, hvorvidt termoelementernes loddesteder er i god termisk forbindelse med prøvepladens overflade, og om valget af måletider og pladedimensioner er rigtigt, da disse forhold ellers i modsat tilfælde ville forårsage uoverensstemmelser mellem λ -værdierne beregnet på de to forskellige måder.

2.3 Joffes apparat

Ved en international konference om elektrontransport i halvledere, afholdt i Ottawa i 1956, omtalte den russiske forsker A. F. Joffe [9] en metode til bestemmelse af faste stoffers varmeledningstal. Måletiden ved disse bestemmelser skulle være mindre end 5 minutter, og nøjagtigheden på λ -værdibestemmelsen skulle være 2 til 3 %. Metoden bygger ifølge artiklen på en måling af varmestrømmen fra en stor kobberklods gennem prøvematerialet til en lille kobberklods. Målingerne sker med 15 - 30 sec.'s interval. Differensen mellem klodsernes temperaturer til samme tidspunkt måles. Udover det her gengivne, samt en tegning af måleopstillingen (fig.6), giver Joffes artikel ingen oplysninger om metoden.

Man kan dog af dette slutte, at problemet der ligger til grund for udviklingen af målemetoden må være af samme karakter som det her tidligere behandlede problem med løsningerne (9) og (9a).

Måleapparatet er opbygget på følgende måde (se figuren næste side):

En lille cylindrisk kobberklods A, er ophængt i tynde tråde, så varmeudvekslingen med omgivelserne er mindst mulig (kobberklodsens flader er eventuelt også blankpudsede). Til A's nederste endeflade er en cylinder P, af prøvematerialet (med karakteristika: λ , ρ , c og højde l), fastgjort i god termisk kontakt med A. For-

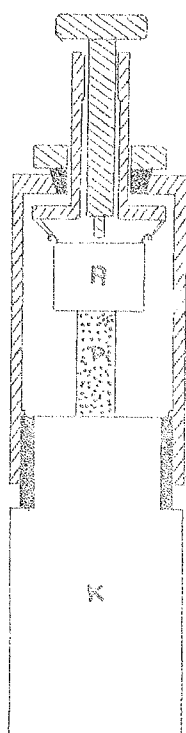


fig. 6

holdet mellem A's varmekapacitet og P's tværsnitsareal kaldes C .

Den store klods K er en kobbercylinder, hvis nederste del under forsøget kan neddykkes i et bad med konstant temperatur ϑ_k , f.eks. i en blanding af vand og smeltende is.

Til tiden $t < 0$ er systemet, der udgøres af P og A , fjernet fra K , og temperaturen ϑ er lig 0 overalt i P og A , der yderligere er i ligevegt med omgivelserne.

Til tiden $t=0$ bringes P 's endeflade i god termisk kontakt med K , hvis temperatur er $\vartheta_k = \text{konstant}$, og differensen mellem temperaturen i klods A og i klods K måles som funktion af tiden.

Idet varmeledningsevnen for kobber regnes at være uendelig stor i forhold til λ for prøvematerialet, kan denne temperaturdifferens udtrykkes ved:

$$\vartheta - \vartheta_k = -2\vartheta_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t}}{\left[1 + \frac{C a}{\lambda} \left(\left(\frac{\lambda}{C a} \right)^2 + \alpha_n^2 \right) \right] \cos(\alpha_n l)}, \quad (9a)$$

hvor α_n findes ved løsning af ligningen

$$\alpha_n l \operatorname{tg}(\alpha_n l) = \frac{\rho c l}{C} = F, \quad (45)$$

hvor forholdet $\frac{\rho c l}{C}$ altså betegnes med F .

Betragtes løsningerne til (45), ses det at de kan skrives som en hovedværdi β_n plus et multiplum af π :

$$\alpha_n l = (\beta_n + (n-1)\pi), \quad n = 1, 2, \dots$$

Mens $\alpha_n l$ altså vokser for voksende n , vil det ses at β_n vil aftage samtidig. Heraf følger, at nævneren i det n 'te led i udtryk (9a) vokser numerisk for voksende n (når $F = 0,5$ er forskellen mellem værdierne for $n=1$ og $n=2$ allerede 13), mens eksponenten til samme leds tæller samtidig aftager hastigt (for $F = 0,5$ er f.eks. $\alpha_2^2 = \text{ca. } 25\alpha_1^2$), og at rækken i (9a) altså konvergerer hurtigt.

Som en god tilnærmelse kan man for passende store værdier af t , og for små forhold F (af størrelsesordenen 0,2 til 0,5) udtrykke $\vartheta - \vartheta_k$ ved hjælp af rækkens første led:

$$\vartheta - \vartheta_k \sim -2\vartheta_k \frac{e^{-a\alpha_1^2 t}}{\left[1 + \frac{C a}{\lambda} \ln\left(\left(\frac{\lambda}{C a}\right)^2 + \alpha_1^2\right)\right] \cos(\alpha_1 l)}, \quad (46)$$

$$\ln|\vartheta_k - \vartheta| \sim \ln|2\vartheta_k| - a\alpha_1^2 t - \ln\left[1 + \frac{C a l}{\lambda} \ln\left(\left(\frac{\lambda}{C a}\right)^2 + \alpha_1^2\right)\right] \cos(\alpha_1 l),$$

hvoraf man ved differentiation med hensyn til tiden får

$$\frac{d(\ln|\vartheta_k - \vartheta|)}{dt} \sim -a\alpha_1^2 = \frac{\lambda}{C l} \cdot \frac{\alpha_1 l}{\lg(\alpha_1 l)} \quad (46a)$$

Til vurderingen af faktoren $\frac{\alpha_1 l}{\lg(\alpha_1 l)} (= \frac{\beta_1}{\lg \beta_1})$ skal anlægges følgende betragtning, gældende for passende små værdier af F :

Ved rækkeudvikling af funktionerne sinus og cosinus i x fås:

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{og}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Benyttes dette til beskrivelse af tangensfunktionen, har man

$$\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \frac{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \dots} = 1 + \frac{2x^2}{3!} + \frac{16x^4}{5!} + \dots$$

Man kan altså med tilnærmelse skrive

$$\frac{\beta_1}{\operatorname{tg}(\beta_1)} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_1^2}{3} + \frac{2\beta_1^4}{15}} \quad (47)$$

På grund af F's lidenhed, og dermed også β_1 's ($\operatorname{tg}(\beta_1) \sim \beta_1$), kan man som en første tilnærmelse af løsningen til (45) skrive

$$\beta_1^2 = F.$$

Denne værdi af β_1^2 kan man, uden at begå større fejl, indsætte i højre side af (47), og man får herefter

$$\frac{\alpha_1^1}{\operatorname{tg}(\alpha_1^1)} = \frac{\beta_1}{\operatorname{tg}(\beta_1)} \sim \frac{1}{1 + \frac{F}{3} + \frac{2F^2}{15}}$$

Udtryk (46a) kan herefter skrives:

$$\frac{d (\ln |\vartheta_k - \vartheta|)}{dt} = \frac{\lambda}{C l} \frac{1}{1 + \frac{F}{3} + \frac{2F^2}{15}} \quad (46b)$$

Optegnes i et koordinatsystem afhængigheden mellem logaritmen til den målte temperaturdifferens $\vartheta - \vartheta_k$ fra (9a) og tiden t , fremkommer altså, for passende store værdier af t (dog stadig mindre end 5 minutter), en ret linie hvis hældning, taget numerisk, har størrelsen

$$\frac{\lambda}{C l} \frac{1}{1 + \frac{F}{3} + \frac{2F^2}{15}},$$

hvoraf λ kan beregnes, idet varmekapaciteten af kobberklodsen A kan bestemmes kalorimetrisk med god nøjagtighed, og længden og tværsnitsarealet af prøvelegemet P kan måles.

Bestemmelsen af størrelsen ρc , der indgår i F foruden l og C , kan ske kalorimetrisk uden større krav til målenøjagtigheden, idet en usikkerhed på størrelsen F kun vil bidrage lidt til usikkerheden på beregningen af λ .

2.4 Apparat med periodestationære varmestrømme.

På laboratoriet for varmeisolering er udført forsøg med en måleopstilling, hvor sinusformede varmestrømme påtrykkes en plade P , af det materiale man ønsker at måle på. Ved måling af bl.a. faseforskydning og dæmpning af temperaturerne på P 's overflade bliver man i stand til at bestemme λ og a for P .

Måleopstillingen er oprindeligt fremstillet (1961) med henblik på en sammenligning af dette termiske problem og en elektrisk analogi af problemet, og denne sammenligning viste en god overensstemmelse med teorien, hvilket naturligvis også var forventet.

I efteråret 1962 blev opstillingen anvendt til målinger på

forskellige bygningsmaterialer, hvis λ - og α -verdier herved bestemtes. Opgaven var givet som eksamensprojekt.

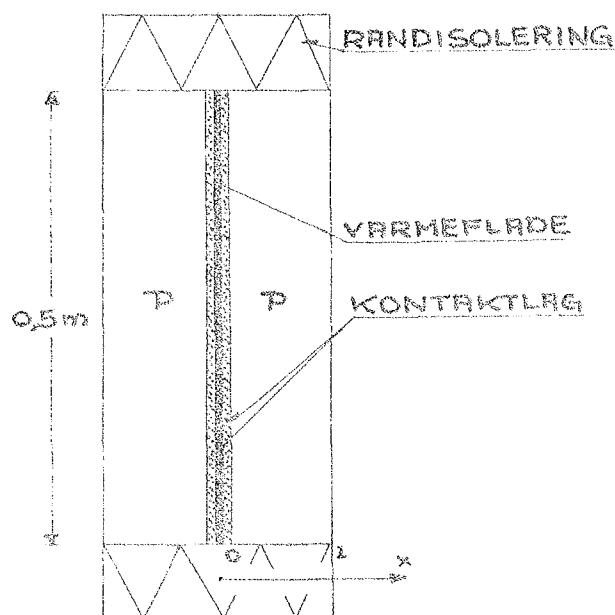


fig. 7

I opstillingen anvendes som varmekilde en elektrisk modstandsvarmeplade, bestående af en pertinaxplade med dimensionerne $0,5 \times 0,5 \times 0,003 \text{ m}^3$, og jævnt beviklet med en tynd kobbertråd. En funktionsgenerator forsyner varmepladen med en elektrisk strøm, hvis størrelse varierer som en sinusformet funktion af tiden, således at den i varmepladen afsatte effekt ligeledes varierer sinusformet med tiden. Strømmen der kommer fra funktionsgenera-

toren er i realiteten en trappefunktion med små spring, men tilnærmer en sinusfunktion med tilstrækkelighed. Perioden for sinusvariationen kan ændres mellem faste verdier indenfor området 2 – 24 timer. Måleopstillingen er skitseret i figur 7.

To plader med dimensionerne $0,5 \times 0,5 \times 1 \text{ m}^3$ er anbragt symmetrisk omkring varmepladen. For at opnå en ensartet overgangsmodstand mellem varmepladen og prøvelegemerne, har man anbragt kontaktlag af 2 mm tyk skumnylonplade mellem disse.

En randisolering af Rockwool lamelmåtte mindsker sidetabene, så at varmestrømmene med tilnærmelse kan regnes at være endimensionale i x-aksens retning.

Temperaturerne θ_1 og θ_2 af P's overflader i henholdsvis plan $x=0$ og $x=l$ registreres i afhængighed af tiden ved hjælp af termoelementer, anbragt i fladernes centre.

Hele opstillingen holdes sammenpændt ved hjælp af 2 x 4 små

trykfødder, fremstillet af en god varmeisolator (f.eks. nylon), der angriber prøvepladerne i punkter tæt ved randisoleringen.

Under målingen er opstillingen anbragt i et temperaturkonstant rum, til hvis temperatur, ϑ_U , ϑ_i og ϑ_u refereres. Efter start af forsøget, forløber en vis tid inden systemet er periodestationært.

Da man jo kun kan tilføre positive effektværdier til varmepladen, vil middelværdien af varmestrømmen gennem P i måletiden være positiv i enhver plan af P. Varmestrømmen gennem P kan med andre ord regnes at være en overlejring af en konstant værdi med en sinusbølge.

I det følgende tilnærmes m_u , der jo i virkeligheden er temperatúrafhængig, ved en middelværdi, og vi kan herefter benytte løsningen fra afsnit 1.1 :

$$\vartheta_u = \vartheta_i \frac{m_u}{m_u \cosh(\gamma l) + Z \sinh(\gamma l)}, \quad (11a)$$

og heri kan Z substitueres ved hjælp af definitions ligningen

$$Z = \frac{1}{\lambda A \gamma} = \frac{1}{\lambda A} \cdot \frac{1}{\gamma l}.$$

$\frac{1}{\lambda A}$ kan udtrykkes ved hjælp af varmestrømmens jævnstrømskomponent og den ydre varmeovergangsmodstand m_u . Idet ϑ_i^+ og ϑ_u^+ betegner de tidsmæssige middelværdier af temperaturerne ϑ_i og ϑ_u , kan man skrive

$$\frac{(\vartheta_i^+ - \vartheta_U)}{\frac{1}{\lambda A} + m_u} = \frac{\vartheta_u^+ - \vartheta_U}{m_u},$$

$$\text{eller} \quad \frac{1}{\lambda A} = \left(\frac{\vartheta_i^+ - \vartheta_U}{\vartheta_u^+ - \vartheta_U} - 1 \right) m_u \quad (48)$$

Med denne værdi indsat i Z, kan (11a) skrives:

$$\vartheta_u = \vartheta_i \frac{1}{\cosh(\gamma l) + \left(\frac{\vartheta_i^+ - \vartheta_U}{\vartheta_u^+ - \vartheta_U} - 1 \right) \frac{\sinh(\gamma l)}{\gamma l}}$$

eller
$$\frac{\vartheta_i}{\vartheta_u} = \cosh(\gamma l) + \left(\frac{\vartheta_i^+ - \vartheta_U}{\vartheta_u^+ - \vartheta_U} - 1 \right) \frac{\sinh(\gamma l)}{\gamma l},$$

hvor man for ϑ_u og ϑ_i kun betragter disses rene vekselstrømskomponenter. Under denne forudsætning kan man indføre begreberne faseforskydning og dæmpning, der kendes fra elektroteknikken.

Ved temperaturdæmpningen r forstås forholdet mellem amplituderne af ϑ_i og ϑ_u .

Ved faseforskydningen v forstås den tidsforsinkelse, hvormed ϑ_u svinger i forhold til ϑ_i .

Man kan herefter skrive:

$$r \cos(v) + i r \sin(v) = \cosh(\gamma l) + \left(\frac{\vartheta_i^+ - \vartheta_U}{\vartheta_u^+ - \vartheta_U} - 1 \right) \frac{\sinh(\gamma l)}{\gamma l}. \quad (49)$$

Dersom temperaturdifferenserne $\vartheta_i - \vartheta_U$ og $\vartheta_u - \vartheta_U$ under forsøget registreres på en potentiometerskrivers papirstrimmel, vil man af kurverne kunne bestemme størrelserne r , v , $\vartheta_i^+ - \vartheta_U$ og $\vartheta_u^+ - \vartheta_U$, der indgår i (48). Tilbage er så at finde det γl , for hvilket ligning (48) stemmer. γl kan findes ved prøve. Til dette brug kan anvendes et canadisk tabelværk [10] som giver de komplekse værdier af udtrykkene

$$\cosh (1+i) X$$

og

$$\frac{\sinh (1+i) X}{(1+i) X}$$

for varierende X , og da definitionen på γ jo netop er

$$\gamma = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2a}} ,$$

svarer X altså til $\sqrt{\frac{\omega}{2a}} l$.

Når den bedst tilnærmede værdi af $\sqrt{\frac{\omega}{2a}} l$ er fundet, bestemmes a herefter let, idet jo både ω og l er kendte størrelser.

Idet jævnstrømskomponenten af varmestrømmen gennem P betegnes med H^+ , kan λ bestemmes af

$$\lambda = \frac{1}{A} H^+ \frac{1}{(\vartheta_i^+ - \vartheta_U) - (\vartheta_u^+ - \vartheta_U)} ,$$

hvor H^+ er halvdelen (p.g.a. den symmetriske opbygning omkring varmepladen) af den elektriske middeleffekt der tilføres varmepladen, idet størrelsen dog forinden må korrigeres for varmefledene gennem randisoleringen.

Selvom rummet hvori målingerne foretages kan betragtes som temperaturkonstant, kan det meget vel hændes, at selv små svingninger i rumtemperaturen forårsager svingninger i ϑ_u , som vanskeliggør analysen af målekurverne. Hvis man forestiller sig rumtemperaturen svingende omkring en konstant værdi, vil man kunne kompensere for dette forhold ved at referere ϑ_i og ϑ_u til temperaturerne på de tilsvarende steder i en analog opstilling til måleopstillingen, hvor plader P af samme materialer indgår, men varmepladen udelades.

Med den her skitserede målemetode kan man, skønsmæssigt anslået, forvente en usikkerhed på a -værdibestemmelsen af størrelsesordenen 4 %, mens det for λ -værdibestemmelsen vil ligge noget højere. En undersøgelse af, om man ved konstant varmestrøm i opstillingen kunne bestemme en b -værdi efter udtrykket (6a) og ϑ_i 's

forløb, viste at dette er umuligt (man ville, under forudsætning af at l var tilstrækkelig stor, først opnå en god tilnærmelse efter ca. 36000 timers forløb).

I eksamensarbejdet er målinger foretaget på plader af sammenlimede bygningssten af typerne kalksandsten, slebne tunge facade-teglsten og slebne mangelhulssten. For hvert materiale er gennemført målinger for fire forskellige frekvenser af varmestrømmen.

De hidtidige målinger er foretaget efter lidt andre retningslinier end de her omtalte, og ubestemtheden på resultaterne er lidt vel stor, men disse viser dog at metoden er anvendelig.

2.5 Termosonder.

Ved en termosonde skal i det følgende forstås en cylinder af kendte dimensioner, udstyret med en temperaturføler og en varmekilde af en sådan art, at en konstant varmeeffekt kan afsættes pr. længdeenhed af cylinderen. Det forudsættes, at sonden er omgivet af et materiale og har samme temperatur som dette, så længe der ingen varmeeffekt afsættes i sonden. Hvis man herefter til en valgt tid $t=0$ starter en varmeudvikling i cylinderen, kan materialets λ -værdi beregnes af cylinderens temperatur - tidsforløb.

Anvendelsen af sonder til bestemmelse af λ -værdier er først foreslået af tyskeren Schleiermacher i 1888, mens svenskerne Stål-hane og Pyk i 1931 var de første der tog metoden i anvendelse i praksis. Det teoretiske grundlag var på dette tidspunkt nogle empiriske løsninger af problemet, hvor en uendelig lang linieformet varmekilde afsætter en given effekt pr. længde- og tidsenhed. Senere er mere eksakte matematiske løsninger af dette problem fremkommet og er blevet taget i anvendelse ved praktiske målinger, udført af hollenderen van der Held og franskmanden Destable, for begges vedkommende i 1949. Efter dette tidspunkt er metoden taget op af mange, idet måling af et materiales λ -værdi efter disse principper kan ske hurtigt og kun kræver en relativt ringe mængde materiale til rådighed. Yderligere har man mulighed for at måle λ -værdier for materialer, der allerede er taget i brug, idet sonden

blot kræver et hul af samme diameter som dens egen, og hvori den kan stikkes ind i materialet i sin fulde længde.

Den simplest tænkelige termosonde er en lang, tynd, retliniet elektrisk modstandstråd af konstantan, der sammen med et loddested fra et termoelement anbringes i god kontakt med (og fuldstændig omgivet af) materialet, hvis λ -værdi ønskes bestemt. Hvis man til tiden $t \geq 0$ påtrykker en konstant spændingsforskel mellem varmetrådens ender, afsættes i tråden en konstant varmeeffekt W pr. længdeenhed. Forestiller man sig varmetrådens varmekapacitet så ringe, at den kan negligeres, kan udtryk (23) anvendes til beskrivelse af temperatur-tidsforløbet for termoelementet, hvis afstand til varmetrådens akse er r :

$$\vartheta = \frac{Fr_o}{2\lambda} \left\{ \ln\left(\frac{4at}{Cr^2}\right) + \frac{r_o^2}{2at} \ln\left(\frac{4at}{Cr^2}\right) + \frac{1}{4at}(r_o^2 + r^2 - 2r_o^2 \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)) + \dots \right\} \quad (23)$$

hvor r_o er radius af varmetråden, F er fluxen over varmetrådens overflade, og altså

$$F = \frac{W}{2\pi r_o},$$

og $C = e^\gamma$, hvor γ er Eulers konstant, mens λ og a er termiske konstanter for materialet der skal undersøges.

Hvis man afbilder ϑ i afhængighed af $\ln(t)$, kan man ved division med $\ln(t)$ på begge sider af (23) se, at kurven for $\ln(t) \rightarrow \infty$ har en asymptote med hældningen

$$\frac{Fr_o}{2\lambda} = \frac{W}{4\pi\lambda}.$$

Differentiation af (23) med hensyn til $\ln(t)$ giver

$$\frac{d\vartheta}{d \ln(t)} = \frac{W}{4\pi\lambda} \left\{ 1 + \frac{r_0^2}{4at} \left(2 \ln\left(\frac{Cr^2}{4at}\right) + 1 - \frac{r^2}{r_0^2} - 2 \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \right) + \dots \right\} \quad (23a)$$

hvoraf man ser, at kurvehældningen hurtigt nærmer sig asymptotehældningen, og at kurven for $t \gg \frac{r^2}{4a}$ kan tilnærmes med en ret linie, af hvis hældning λ kan beregnes:

$$\lambda = \frac{W}{4\pi \frac{d\vartheta}{d \ln(t)}} .$$

Selve temperaturforløbet kan for passende store værdier af t altså tilnærmes ved udtrykket

$$\vartheta = \frac{W}{4\pi\lambda} \left\{ \ln(t) + \text{konstant} \right\} .$$

Når man kender varmetrådets elektriske modstand pr. længdeenhed, og under målingerne har målt den konstant strøm gennem varmetråden, kan W beregnes, og herefter kan λ beregnes af temperaturforløbet.

Anvendelsen af en så enkel sondetype har en iøjnefaldende begrænsning ved måling af faste stoffers λ -værdier, idet varmetråden her må lægges i 'grøfter' i en skilleflade i materialet, hvilket umuliggør ikke-destruktive feltmålinger. De fleste sonder er da også opbygget af et cylindrisk beskyttelsesrør, hvori både varmetråd og temperaturføler er anbragt. I et enkelt tilfælde består sonden af en grafitstav, der anvendes som modstandsvarmekilde, og hvori temperaturføleren er placeret (G. Skeib).

Valget af materiale til beskyttelsesrør er for hovedparten af de hidtil fremstillede sonders vedkommende faldet på et af stofferne: Kobber, messing, aluminium, rustfrit stål, glas eller plastic. Hvor beskyttelsesrøret er af metal, anvendes det ofte som

elektrisk tilledning til den fjerneste ende af den axialt placerede varmetråd. I andre tilfælde ligger varmetråden dobbelt inde i røret.

Til opnåelse af god termisk ledning i radial retning, fyldes beskyttelsesrørets indre op med et materiale, der oftest er paraffin eller koldhærdende plastic, men en letsmeltelig metallegering har også været foreslået anvendt.

For disse konstruktioners vedkommende begrænses sondediameteren nedadtil i praksis, dels af fremstillingshensyn, dels af hensyn til at muligheden for at bore snævre huller af passende længde i f.eks. sten må være til stede.

Man kan derfor ikke længere lade sondens egne termodynamiske egenskaber ude af betragtning.

Under forudsætning af at en uendelig lang sonde med radius r_0 er fremstillet af et uendelig godt varmeledende materiale, samt at varmeovergangsmodstanden til det omgivende materiale er R pr. længdeenhed af sonden, mens sondens varmekapacitet pr. længdeenhed er S , har Carslaw og Jaeger angivet følgende løsning for sondens temperatur til tiden t (gældende for store værdier af $\frac{at}{r^2}$):

$$\vartheta = \frac{W}{4\pi\lambda} \left\{ 4\pi R\lambda + \ln\left(\frac{4at}{Cr_0^2}\right) - \frac{4RS\lambda - r_0^2\rho c}{2\lambda t} + \frac{\pi r_0^2\rho c - S}{2\pi\lambda t} \ln\left(\frac{4at}{Cr_0^2}\right) + \dots \right\} \quad (50)$$

Dette udtryk er resultatet af lignende regninger som de, der førte til udtrykket (23). I (50) er λ , ρ og c stofkonstanterne for materialet der måles på, og $\ln(C)$ er stadig Eulers konstant.

Ved division med $\ln(t)$ på begge sider af udtryk (50) ser man at temperaturforløbet ved afbildning i et ϑ - $\ln(t)$ -diagram er en kurve, der for $\ln(t) \rightarrow \infty$ nærmer sig asymptotisk til en ret linie med hældningen $\frac{W}{4\pi\lambda}$.

Differentiation af (50) med hensyn til $\ln(t)$ giver

$$\frac{d\vartheta}{d \ln(t)} = \frac{W}{4\pi\lambda} \left\{ 1 + \frac{4\pi R S \lambda - \pi r_o^2 \rho c + S \left(\ln \left(\frac{4at}{Cr_o^2} - 1 \right) \right)}{2\pi\lambda} \frac{1}{t} + \dots \right\} \quad (50a)$$

der under praktiske forhold almindeligvis kan tilnærmes ved

$$\frac{d\vartheta}{d \ln(t)} = \frac{W}{4\pi\lambda} \quad \text{for} \quad \frac{4at}{r_o^2} > 150 ,$$

hvoraf λ kan beregnes som i det foregående.

Man ser heraf, at man ved λ -værdibestemmelser kun behøver at interessere sig for temperaturkurvens asymptotenhædning, idet sondens egne termodynamiske størrelser efter en passende tid vil elimineres i udtrykket for kurvehædningen. Sondens aktuelle temperaturforløb er her uden praktisk interesse.

De foregående beregninger er opstillet under forudsætning af, at sondens længde er uendelig. I praksis ønsker man naturligvis sondens længde så lille som muligt. Herved brister de gjorte forudsætninger, og en vurdering af den herved begåede fejl må foretages, når måling sker med en sonde af endelig længde l .

For at få et matematisk løseligt problem, må der her gøres den antagelse at selve sondematerialet er uden axialledning, en forudsætning som i praksis desværre ikke holder.

Ved vurderingen betragtes temperaturfordelingen omkring en tynd sonde, for hvilken det gælder, at den afgivne varmeeffekt fra et enkelt linieelement dz' er af størrelsen Wdz' . Temperaturfeltet, der skabes som følge heraf, betragtes som kuglesymmetrisk med pol i linieelementet og den variable radius R , bundet ved ligningen:

$$R^2 = r^2 + (z - z')^2 , \text{ se figur 8.}$$

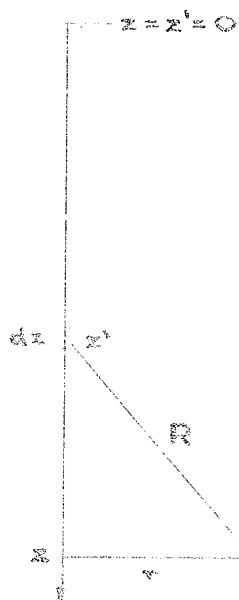


fig. 8

Ligningen

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} - \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1b)$$

løses med randbetingelserne:

$$t < 0, 0 < R < \infty \Rightarrow \phi = 0$$

$$t > 0, R \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = 0$$

$$t > 0, R \rightarrow 0 \Rightarrow -4\pi R^2 \lambda \frac{\partial \phi}{\partial R} = W dz'$$

Ved Laplace-transformation går randbetingelserne over i:

$$t < 0, 0 < R < \infty \Rightarrow \bar{\phi} = 0$$

$$t > 0, R \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{\phi} = 0$$

$$t > 0, R \rightarrow 0 \Rightarrow -4\pi R^2 \lambda \frac{d\bar{\phi}}{dR} = \frac{W dz'}{p},$$

og billedligningen til (1b) lyder:

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\bar{\phi}}{dR} - q^2 \bar{\phi} = 0,$$

Ved multiplikation med R på begge sider af ligningen fås:

$$\frac{R d^2 \bar{\phi}}{dR^2} + 2 \frac{d\bar{\phi}}{dR} - q^2 R \bar{\phi} = 0.$$

Ved differentiation fås:

$$\frac{R \frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dR^2}}{dR^2} = \frac{d^2(R\bar{\vartheta})}{dR^2} - 2 \frac{d\bar{\vartheta}}{dR} ,$$

hvorved (1b)'s billedligning kan skrives som

$$\frac{d^2(R\bar{\vartheta})}{dR^2} - q^2 R \bar{\vartheta} = 0 ,$$

der har den fuldstændige løsning

$$R \bar{\vartheta} = C_1 e^{Rq} + C_2 e^{-Rq} .$$

Ved indsættelse af randbetingelserne fås, at $C_1 = 0$, man har derfor:

$$\bar{\vartheta} = \frac{C_2 e^{-Rq}}{R} \quad \text{for } R > 0 .$$

Ved differentiation med hensyn til R fås herefter:

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dR} = - C_2 e^{-Rq} (Rq + 1) ,$$

der ved løsning med randbetingelserne giver

$$t > 0, R \rightarrow 0 \quad \Rightarrow 4\pi\lambda \cdot C_2 = \frac{W dz'}{p} ,$$

hvoraf
$$C_2 = \frac{W dz'}{4\pi\lambda p} .$$

Man har følgelig:

$$p \bar{\vartheta} = \frac{W dz'}{4\pi\lambda R} e^{-Rq} .$$

Objektfunktionen til denne løsning er

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{W}{4\pi\lambda R} \frac{dz'}{\sqrt{4\pi at^3}} e^{-\frac{R^2}{4at}}. \quad (51)$$

Nu anvendes substitutionen $R^2 = r^2 + (z-z')^2$, og temperaturfeltet under indflydelse af hele sondens længde findes ved integration af (51) mellem grænserne $z'=0$ og $z'=1$, idet superpositionsprincippet gælder i dette tilfælde:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{W}{4\pi\lambda} \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z-1}{\sqrt{4at}}}^{\frac{z-1}{\sqrt{4at}}} e^{-\left(\frac{z-z'}{\sqrt{4at}}\right)^2} d\left(\frac{z-z'}{\sqrt{4at}}\right) = \\ &= \frac{W}{4\pi\lambda} \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t} \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z-1}{\sqrt{4at}}\right) \right\} \end{aligned}$$

Ved multiplikation med t på begge sider af lighedstegnet fås

$$\frac{d\vartheta}{d\ln(t)} = \frac{W}{4\pi\lambda} e^{-\frac{r^2}{4at}} \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z-1}{\sqrt{4at}}\right) \right\}$$

Tænker man sig temperaturføleren anbragt på sondens halve længde ($z = \frac{1}{2}$) og i afstanden $r=r_0$ fra aksen, kan temperaturstigningen i dette punkt altså skrives som

$$\frac{d\vartheta}{d\ln(t)} = \frac{W}{4\pi\lambda} e^{-\frac{r_0^2}{4at}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{4at}}\right) \right\} =$$

$$= \frac{W}{4\pi\lambda} e^{-\frac{r_0^2}{4at}} \operatorname{erf}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4at}}\right)$$

For at en tilstrækkelig god tilnærmelse til et retliniet temperaturforløb med hældningen $\frac{W}{4\pi\lambda}$ skal være gyldig, må man kræve at faktorerne

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4at}}\right) \sim 1 \quad \text{og} \quad e^{-\frac{r^2}{4at}} \sim 1 .$$

Som bekendt er fejlfunktionen $\operatorname{erf}(x)$ en voksende funktion af x med grænseværdien 1 for $x \rightarrow \infty$.

Udtrykket

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4at}}\right)$$

er altså aftagende funktion af t med værdien 1 for $t = 0$.

Funktionen

$e^{-\frac{r^2}{4at}}$ er en voksende funktion af t med grænseværdien 1 for $t \rightarrow \infty$.

Hvis det forudsættes at det første punkt af det tilnærmelsesvis retlinede temperaturforløb indtræffer for

$$\frac{4at}{r^2} = 150 ,$$

gælder det også for større værdier af t , at

$$e^{-\frac{r^2}{4at}} \sim 1 .$$

Da imidlertid

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4at}}\right)$$

aftager for voksende t , vil dens værdi stadig fjerne sig fra 1.

For at λ -værdien skal kunne bestemmes med nogenlunde nøjagtighed, må t ved målingens afslutning være 5–10 gange større end ved den første værdi, for hvilken temperaturforløbet kan tilnærmes ved en ret linie. Vi kan altså f.eks. udtrykke t ved forsøgets slutning som

$$t = 10 \cdot 37,5 \frac{r^2}{a}.$$

Et krav om, at

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4at}}\right)$$

skal afvige mindre end 0,5 % fra værdien 1, kan ved hjælp af tabelopslag formuleres som

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4at}} > 2,35,$$

og indsætter man heri udtrykket for t ved forsøgets slutning, fås:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4a \cdot 375 \cdot \frac{r^2}{a}}} > 2,35 \quad \text{eller} \quad \frac{1}{r} > 180.$$

Da prøvelegemet's dimensioner alle er endelige og teorien for sondens temperaturstigning er opstillet under forudsætning af at

den er omgivet af et uendeligt udstrakt medium, må man for sondens temperaturforløb vurdere indflydelsen af de forstyrrelser, der indtræffer ved prøvelegemets begrænsningsflader, og yderligere angive minimumsdimensioner for prøvelegemet, således at afvigelserne fra sondens ideelle temperaturforløb er uden betydning.

Det antages, at prøvelegemet på alle overflader er omgivet af stillestående eller næsten stillestående luft (prøven hviler dog på et underlag af polystyren-skum), altså stof hvis varmeledningstal er af størrelsesordenen 0,030.

Sonden anvendes til måling på materialer, hvis varmeledningstal varierer mellem størrelserne ca. 0,03 og ca. 1,00 kcal/m h C. Hvor måling sker på materialer med λ -værdi af samme størrelsesorden som den omgivende lufts, er forstyrrelserne fra begrænsningsfladerne ringe i sammenligning med, hvad tilfældet er ved måling på materialer med høje λ -værdier.

Det grelleste tilfælde af forstyrrelser er, hvor prøvematerialet tænkes uendelig godt ledende i forhold til den omgivende luft. Man kan altså her betragte prøvelegemets begrænsningsflader som værende varmetætte. Det termiske felt omkring sonden i prøvelegemet kan derfor ækvivaleres ved det termiske felt i et uendeligt medium, når feltet fra sonden overlejres med felter hidrørende fra nogle fiktive sonder med samme dimensioner og varmeeffekt, hvis placering fremkommer ved spejling af den oprindelige sonde i prøvelegemets begrænsningsflader.

I det følgende betragtes først forstyrrelserne hidrørende fra prøvelegemets begrænsningsflader vinkelret på sondens akse. Dernæst betragtes forstyrrelserne, der opstår ved de øvrige begrænsningsflader, der må antages at være parallelle med sondens akse eller at have frembringere der er parallelle med denne.

Hvor spejling finder sted i begrænsningsflader vinkelret på sondeaksen, kan det termiske felt ækvivaleres med det termiske felt i et uendeligt medium, hvor en fiktiv sonde er tilføjet, hvis længde er et positivt helt multiplum af den originale sonde-

længde. Man opnår med andre ord en bedre tilnærmelse til den uendelige lange sondes teori, end hvad tilfældet er, hvor sonden af endelig længde befinder sig i det uendelige medium, for hvilket et krav til sondens slankhedsforhold jo lige er opstillet i det foregående.

I lighed med behandlingen af randforstyrrelser i aksial retning, kan randforstyrrelser i radial retning også vurderes ved ækvivalens med tilfælde, hvor prøvelegemets udstrækning tænkes uendelig og hvor fiktive sonder er placeret i de billeder af originalsonden, der fremkommer ved spejling i de oprindelige begrænsningsflader af prøvelegemet.

Hvor prøvelegemet med tilnærmelse kan regnes for halvuendeligt med en plan begrænsningsflade, og sonden med radius r_o er indstukket parallelt med begrænsningsfladen og i afstanden $\frac{n}{2}r_o$ fra denne, fremkommer det ækvivalente felt (for det værste tilfælde) som temperaturfeltet i et uendeligt medium omkring to ens, parallelle sonder med indbyrdes afstand nr_o . Temperaturen θ ved overfladen af den ene sonde fremkommer ved overlejring af de termiske felter fra de to sonder. For store værdier af t kan man ved anvendelse af udtryk (24) med tilnærmelse skrive:

$$\theta = \frac{W}{4\pi\lambda} \left\{ \ln\left(\frac{4at}{Cr_o^2}\right) + \ln\left(\frac{4at}{Cn^2r_o^2}\right) \right\}.$$

Kræver man f.eks. , at θ indenfor måletiden højst må afvige 0,5 % fra temperaturen af en sonde i et uendeligt medium, kan dette formuleres ved uligheden:

$$\frac{\ln\left(\frac{4at}{Cr_o^2}\right) - \ln(n^2)}{\ln\left(\frac{4at}{Cr_o^2}\right)} < 0,005 ,$$

eller
$$n^2 > \left(\frac{4at}{Cr_o^2}\right)^{1-0,005} .$$

Da forsøget normalt afbrydes for $\frac{4at}{r_0^2} = 1500$, er kravet til n altså:

$$n^2 > \left(\frac{1500}{6}\right)^{1-0,005} \sim 9000 \text{ eller: } n \sim 30.$$

Hvor prøvelegemet ikke mere kan regnes at være halvuendeligt, vil sonden ved spejling i begrænsningsfladerne få spejlbilleder af højere end første orden, og det tilnærmede udtryk (24) vil ikke kunne anvendes ved vurderingen. B. H. Vos [11] angiver imidlertid et krav til sondens mindste afstand i radial retning til en begrænsningsflade af prøvelegemet, for hvilket randforstyrrelserne endnu er uden betydning, som:

$$d^2 > \frac{4at}{0,6},$$

hvor d er afstanden fra sonden til begrænsningsfladen, t er tidspunktet for afslutningen af målingen og a er prøvematerialets temperaturledningstal.

Ved egne målinger på legemer af varierende diameter er en god overensstemmelse med dette krav verificeret, idet tydelige afvigelser fra det teoretiske temperaturforløb indtræffer for:

$$d^2 < \frac{4at}{0,8}.$$

Målingerne, der fandt sted på stænger af plexiglas med forskellig diameter er vist i det følgende (figurerne 26 og 27).

J. H. Blackwell [12] har gennemført en analytisk undersøgelse af randfænomenerne på lignende vis, der munder ud i et noget strengere krav til sondens slankhedsforhold, idet kravet om overensstemmelse med radial varmestrøm er formuleret ud fra en antagelse om at sonden er placeret i et materiale med planparallelle begrænsningsflader, hvis tykkelse er lig med sondens længde. Son-

dens akse er vinkelret på begrænsningsfladerne, og disses temperatur holdes konstant lig med 0.

Andre forskere har rent eksperimentelt søgt at fastsætte et mindstekrav til slankhedsforholdet på grundlag af målinger med sonder af forskellig længde, forsynet med flere termoelementer, jævnt fordelt over de enkelte sonders længde.

Det synes, som om et slankhedsforhold af størrelsen

$$\frac{1}{2r_0} \sim 100$$

skulle give rimelige resultater.

Ved passende valg af effekten der afsættes i en sonde, kan bestemmelse af en λ -værdi foregå, uden at temperaturstigningen i det omgivende materiale andrager mere end nogle få grader.

Til temperaturmålingerne anvendes fintmærkende galvanometre eller håndbetjente kompensationsapparater til registrering af den termoelektromotoriske kraft. Kun i et enkelt tilfælde anvendes automatisk registrerende udstyr, idet B. H. Vos [13] har forsynet en Philips 12-punkt-kompensationsskriver med et måleområde, så at maximumudslag 25cm kan opnås for termospændinger på 0,25 mV. Samtidig er fremføringen af skriverstrimmelen blevet ombygget, så at strimmelhastigheden aftager som en logaritmisk funktion af tiden.

3. Beskrivelse og anvendelse af egen termosonde.

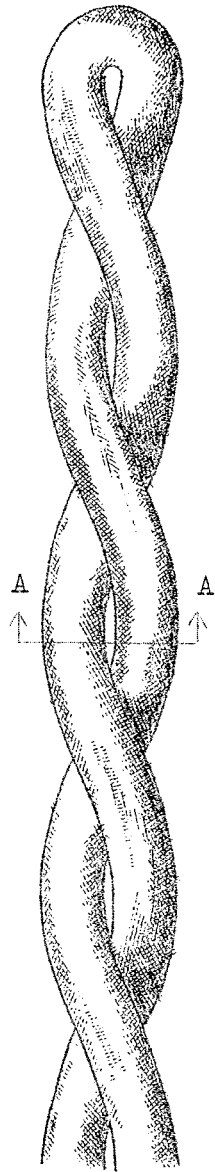
3.0 Beskrivelse af sondens konstruktion.

Som et led i de foreliggende studier, har jeg på laboratoriet for varmeisolering fremstillet en sondetype, hvis opbygning og anvendelse skal beskrives i det følgende.

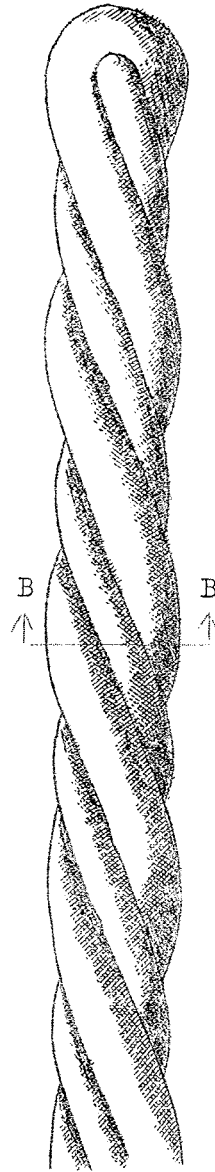
Sondens beskyttelsesrør er et 10 cm langt, 1 mm $\varnothing$ rustfrit stål-kanylerør, med indvendig diameter 0,6 mm. Som varmelegeme er anvendt en stav (fig. 9) af dobbelt, snoet 0,25 mm $\varnothing$ konstantantråd med silkeomspinding. Stavens største diameter svarer omtrent til kanylerørets lysning. I de to skruelinieformede kanaler som eksisterer mellem det snoede stavlegeme og stavens omskrevne cylinder er anbragt termoelementledninger (fig. 10), således at en 0,14 mm $\varnothing$ kobbertråd går helt igennem den ene kanal og halvejs tilbage gennem den anden kanal til midten af sondelængden, hvor den er stukloddet til en 0,18 mm $\varnothing$ konstantantråd, der herfra går gennem resten af kanalen. Varmelegemet med termoelement er stukket ind i beskyttelsesrøret, hvorefter koldhærdende plastic (Araldit) under tryk er presset igennem de nu tiloversblevne kanaler, således at alle hulrum i beskyttelsesrøret er fyldt ud. Figur 11 er et fotografi, der viser et snit gennem sondens akse (ca. 4 gange forstørret). Beskyttelsesrør, varmetråd og termoelementtrådene er uden indbyrdes elektrisk forbindelse, og de elektriske kredsløb i sonden er beskyttet mod fugtindtrængning på grund af plasticfyldningen.

Beskyttelsesrøret er fastgjort i et nylonhåndtag, i hvilket tilslutning af de elektriske ledninger fra sonden sker.

Termoelementkredsens kobber- og konstantanledninger sluttes til ledninger af samme materiale, men med større tværsnit af hensyn til spændingsfaldet gennem de lange tilledninger, mens varmetråden sluttes til kobberledninger med stort tværsnit. De tilsluttede kobber-konstantan termoelementledninger er sammenloddet i deres anden ende, og dette, termoelementets andet loddested, kan



skala ca. 20:1



skala ca. 20:1

snit A-A

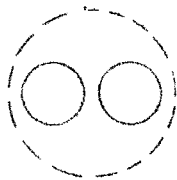


Fig. 9

snit B-B

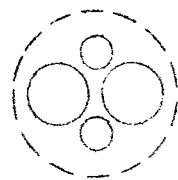


Fig. 10

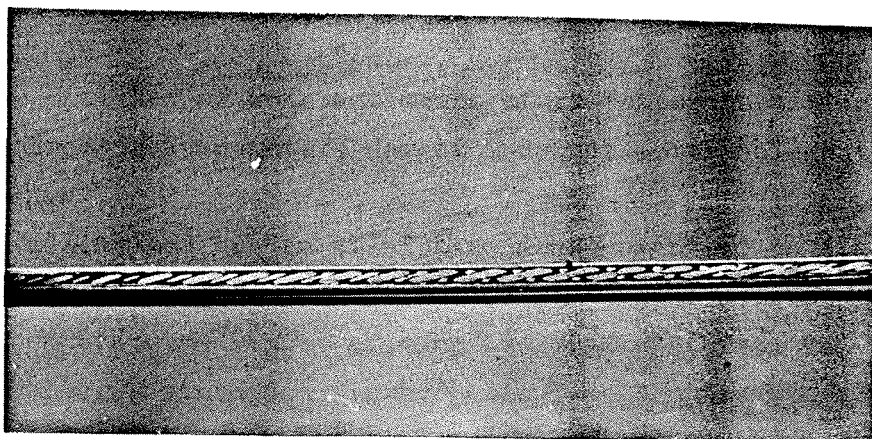


Fig. 11

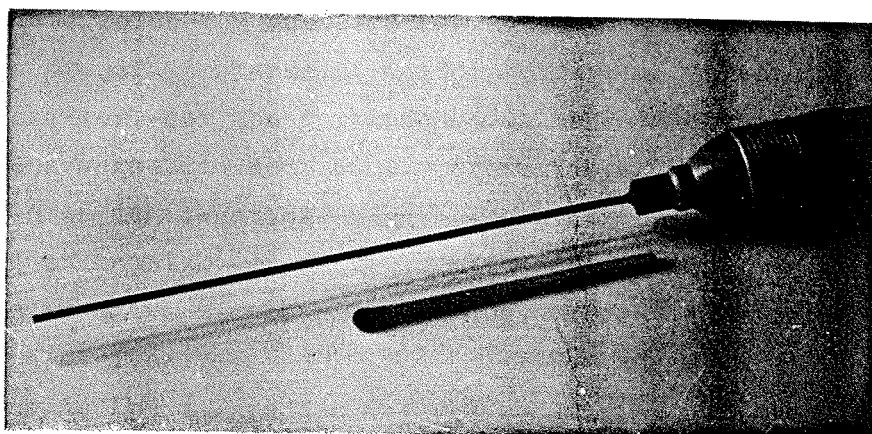


Fig. 12

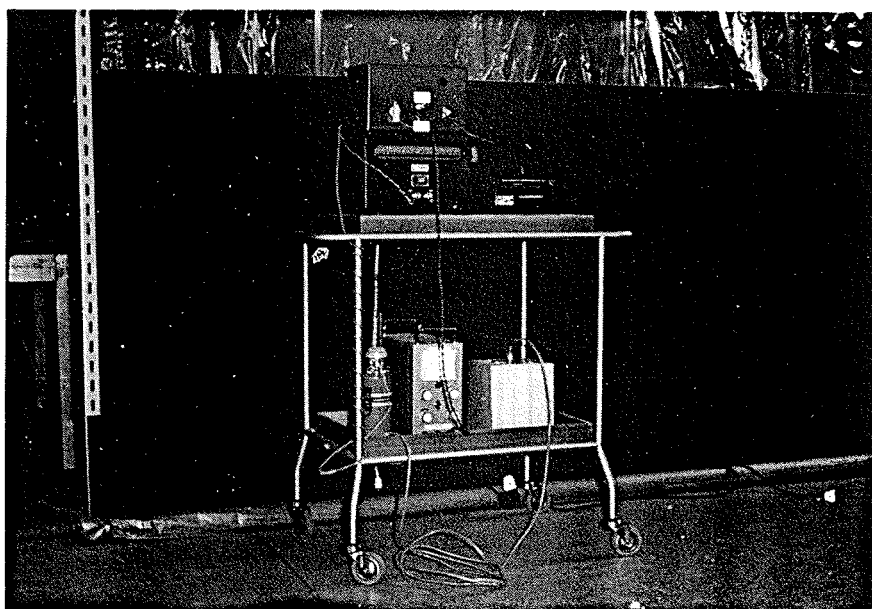


Fig. 13

anbringes i et bad af konstant temperatur. Temperaturmåling sker med et følsomt galvanometer, der er indskudt i termoelementets kobberledning.

Ved måling med sonden tilsluttes dens varmetråd en stabiliseret jævnspændingsforsyning gennem et præcisions-milliamperemeter, og temperaturændringer aflæses på galvanometeret. Ved de indledende målinger viste det sig nødvendigt at benytte et akustisk tidssignal, da temperatúraflæsningerne sker med 10 sec.'s interval. For at opnå så stabil en spænding som muligt, måtte spændingsstabilisatoren uden for måleperioderne belastes med en modstand af samme størrelse som varmetrådets.

I en svejst jernkasse er derfor anbragt en belastningsmodstand og en omskifter, der kan forbinde enten belastningsmodstanden eller sondens varmetråd med spændingsforsyningen. Yderligere indeholder kassen den akustiske signalgiver, der består af en synkronmotor med en knastskive, monteret på akselen. Hvert 10. sekund anslår en af skivens knaster en fjeder, hvorved en passende tidspræcis lyd afgives.

Figur 14 (på følgende side) viser en principskitse af sondens to elektriske kredsløb.

Figur 12 er et fotografi af den færdige sonde.

Figur 13 viser hele måleopstillingen på et rullebord. På den underste hylde står en termoflaske med vand, hvori termoelementkredsens 'kolde' loddested er neddykket. Til højre herfor står spændingsstabilisatoren, og yderst til højre står en materialeprøve, hvori en sonde er neddykket. På øverste hylde står et lyspletgalvanometer og milliamperemeteret, og ovenpå galvanometeret står den omtalte jernkasse med formodstand, omskifter og akustisk signalgiver.

Ved måling i et materiale som teglsten, voldtte boringen af et 10cm langt hul, hvis diameter er 1 mm $\varnothing$, i begyndelsen en del besvær. Bor med Widiaplatter fås ikke med diametre på under 2,3 mm,

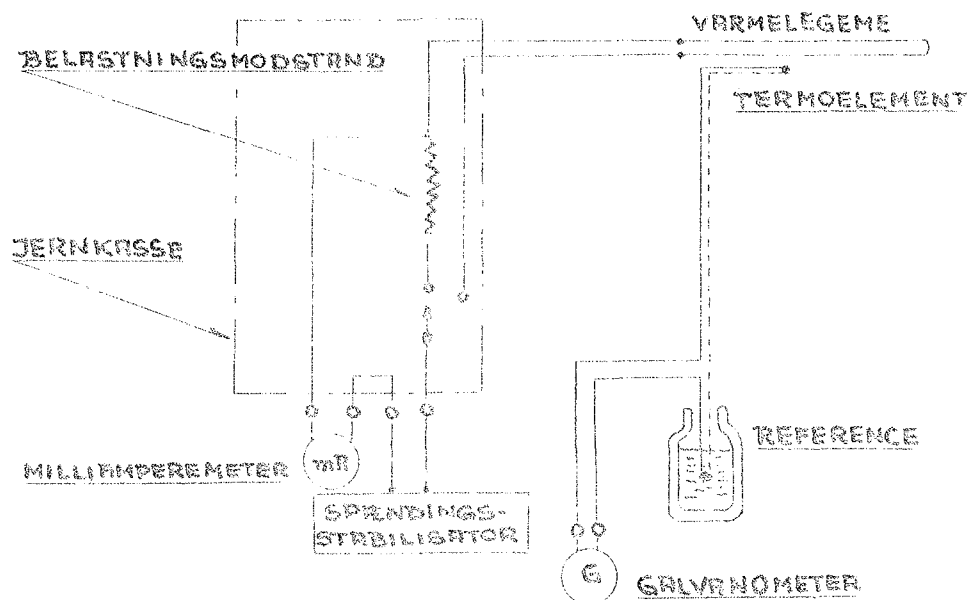


fig. 14

så bor af almindeligt high-speed stål, 0,9 mm $\varnothing$ måtte anvendes. Det lykkedes dog efter en del undersøgelser at nå frem til en metode, hvormed man med kvikselvhardede bor kan nå de ønskede huldimensioner. Ved hjælp af en fjederbelastet skralde, der konstrueredes til formålet, og hvori boret opspændes, bringes dette i vibration i sin længderetning, og denne slagvirkning, kombineret med den normale rotation af boret, formåede at nedbryde materialet. Samtidig indicerer skralden ved sin lyd, hvis boretrykket stiger ud over en ønsket størrelse.

På grund af en konstruktionsfejl ved sonde nr I, blev denne efter nogen tids brug uanvendelig, idet tilslutningsledningerne var utilstrækkeligt fikseret i sondens nylonhåndtag, og ved bevægelse i forhold til dette forårsagede træthedsbrud i termoelementets konstantanledning, umiddelbart efter hvor den træder ud af sondens beskyttelsesrør. Ved fremstillingen af sonderne nr. II og nr. III, faststøbtes tilslutningsledningerne med araldit i sondehåndtagene, hvilket tilsyneladende giver en god robusthed af sonden.

3.1 Anvendelsen af sonden til bestemmelse af varmeledningstal.

Målinger er udført med sonde II i en måleopstilling som vist principielt i fig. 14. Opstillingens data er følgende:

Modstand af sondens varmestav

pr. længdeenhed : $20,4 \frac{\Omega}{m} \pm 1 \%$

Samlet modstand af galvanometer +

sondens termoelementledninger : $29,9 \Omega \pm 0,3\%$

Indre modstand af

galvanometer : $7,0 \Omega \pm 1 \%$

Galvanometerudslag i afhæn-

gighed af klemspænding : $2,21 \frac{mV}{\mu V} \pm 0,5 \%$

Galvanometerudslag i afhængighed af

termoelementets elektromotoriske kraft : $\frac{7,0 \cdot 2,21}{29,9} \frac{mV}{\mu V} \pm 1,2 \%$

Afhængende af varmeovergangsmodstanden mellem sonden og prøvematerialet, vil sondens overtemperatur i forhold til materialet variere, men er iøvrigt uden betydning for måleresultaterne, hvilket kan ses af udtryk (50). Dog spiller temperaturen en rolle ved beregningen af $C(I)$, da man her tilnærmer den krumlinede termoelementkarakteristik med en ret linie i det interval på ca. 2°C , der anvendes ved λ -værdiberegningerne. Ved en sondetemperatur på 28°C er dette rette liniestykkes hældning $0,0244 \frac{^\circ\text{C}}{\mu\text{V}} \pm 1 \%$.

Galvanometerudslaget T , i afhængighed af en temperaturstigning på dette niveau er da

$$T = \frac{2,21 \cdot 7,0}{29,9 \cdot 0,0244} \frac{mV}{^\circ\text{C}} \pm 1,5 \%$$

Som tidligere omtalt vil det ses, at temperaturforløbet ved afbildning i et semilogaritmisk koordinatsystem nærmer sig asymp-

totisk til et retliniet forløb, hvilket almindeligvis med god tilnærmelse kan antages at være nået for $t > 100$ sec. Varmeledningstallet kan herefter beregnes af kurvehældningen mellem punkterne svarende til $t_1 = 100$ sec og $t_2 = 500$ sec, hvortil svarer temperaturerne henholdsvis ϑ_1 og ϑ_2 , eller galvanometerudslagene u_1 og u_2 målt i millimeter.

Idet I betegner strømmen gennem sondens varmestav, målt i ampere, og R betegner dennes modstand pr. længdeenhed, har man til bestemmelse af λ :

$$\lambda = \frac{W \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)}{4\pi(\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{R \cdot I^2 \cdot 0,860 \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)}{4\pi(\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{20,4 \cdot 0,860 \ln\left(\frac{500}{100}\right) 2,21 \cdot 7,0}{4\pi \cdot 29,9 \cdot 0,0244} \cdot \frac{I^2}{u_2 - u_1} =$$

$$= \frac{C(I)}{u_2 - u_1}.$$

Ved måling på et materiale tilpasses strømstyrken I , således at størrelsesordenen af $u_2 - u_1$ bliver 25 mm, svarende til en temperaturstigning på mellem 1°C og $1,5^\circ\text{C}$. Strømstyrken måles med et milliamperometer, klasse 0,2 af fabrikatet Hartmann og Braun, $C(I)$ er for temperaturområdet 28°C beregnet for forskellige strømstyrker og gengives i skemaform

I	75 mA	100 mA	150 mA	200 mA	300 mA	400 mA	450 mA	500 mA	550 mA
$C(I)$	0,27	0,48	1,07	1,90	4,29	7,62	9,64	11,9	14,4

Når spændingsstabilisatoren efter ca. 1 times forløb er varmet op, er spændingsvariationerne så små, at ubestemtheden herfra kan negligeres. Usikkerheden på måling af I er i ugunstigste tilfælde 0,75 %.

Usikkerheden på størrelsen $\ln \frac{t_2}{t_1} = \ln \frac{500}{100} = 0,5$ %.

Usikkerheden på størrelsen $C(I)$ beregnes herefter til

$$rU[C(I)] = \sqrt{rU(R)^2 + 2rU(I)^2 + rU\left(\ln \frac{t_2}{t_1}\right)^2 + rU(T)^2} = 2,2 \%$$

For målinger ved andre sondetemperaturer korrigeres $C(I)$ for den ændrede hældning af termoelementkarakteristikken.

For galvanometerudslag $u_2 - u_1 \sim 25$ mm er usikkerheden på aflæsningen 1 %, og usikkerheden på λ -værdien beregnet ud fra det tilnærmet asymptotiske temperaturforløb er 2,4 %. Indenfor denne grænse ligger reproducerbarheden af de enkelte målinger på et materiale også.

Lægges hertil de skønnede usikkerheder for tilnærmelse af asymptotishældning ved hældning af selve temperaturkurven (<1 %) og for tilnærmelse af sonden ved den uendelige lange sonde ($<0,5$ %), samt for fejlen der skønnes begået ved at negligere aksialledning i sondematerialet (<2 %), findes usikkerheden på en måling efter sondemetoden at være ca. 3,5 %.

Proceduren ved måling med sonden kan herefter beskrives således:

En materialeprøve af passende dimensioner (for de fleste aktuelle materialer er kravet, at en ca. 10 cm lang cylinder med diameter 5 cm skal kunne være indskrevet i prøvelegemet) 'forsynes' om nødvendigt med et hul af samme dimensioner som sondens udvendige mål. Sonden indstikkes i materialeprøven, som derefter anbringes på et sted med så konstante temperaturforhold som muligt (taget indenfor en periode på ca. 10 min.) Når sonden iøvrigt er tilsluttet måleopstillingen, findes ved grove forsøg en værdi af strømstyrken I , der giver en passende størrelse af $u_2 - u_1$, svarende til tiderne $t_2 = 500$ og $t_1 = 100$ sekunder efter strømslutningen. Herefter lades prøvelegeme og sonde i ro, indtil man ved hjælp af galvanometeret kan overtøge sig om, at den strømløse sonde og prøvelegemet er kommet i temperaturligevægt med omgivelserne. Når dette er tilfældet, kan den egentlige måling påbegyndes, og den akustiske signalgiver starter. Tidspunktet $t = 0$ sec

fastlægges til det klik fra signalgiveren, hvor den elektriske strøm til sondens varmetav sluttet. For hvert følgende klik aflæses galvanometervisningen og noteres i tabelform. Efter 500 sekunders forløb afbrydes forsøget, idet man dog først, ligesom når det var muligt under målingen, kontrollerer størrelsen af strømmen I til sondens varmetav.

Herefter afbildes galvanometeraflæsningerne u i afhængighed af lu t i et semilogaritmisk koordinatsystem, og en ret linie forsøges trukket gennem punkterne svarende til $100 \leq t \leq 500$, hvilket i regelen nemt lader sig gøre. Herved opnås en form for kontrol af, om målingerne er i overensstemmelse med teorien. Under denne forudsætning dannes herefter differensen $u_2 - u_1$ mm svarende til $t_2 = 500$ sec og $t_1 = 100$ sec, hvorefter λ beregnes af

$$\lambda = \frac{C(I)}{u_2 - u_1}$$

Dersom temperaturforløbet ved afbildningen mod forventning ikke er retlinet, kan årsagen være, at prøvematerialet ikke er homogent, eller at dets smelte- eller blødgøringspunkt ligger i det temperaturområde, som sonden gennemløber under målingen (sondens temperatur er ved slutningen af måletiden normalt ca. 10°C over omgivelsernes temperatur). Hvor prøvematerialet er en vædske, kan konvektion langs sonden forstyrre målingen, således er måling på vand uden stoffer til bromsning af konvektionen umulig med den foreliggende sonde. Yderligere kan en årsag til at temperaturforløbet ikke er retlinet være, at varmeovergangsmodstanden mellem sonden og prøvematerialet er uforholdsmæssig stor på grund af et for stort hul i prøvelegemet. Dette kan normalt konstateres ved udvidelse af måleperioden, når prøvelegemets dimensioner ellers tolererer dette, idet det retlinede forløb så blot skulle indtræde noget senere.

Endelig kan en årsag være, at prøvematerialets varmeledningstal og varmekapacitet har for lave størrelser i forhold til kvotienten af sondens varmekapacitet og varmeproduktion, således at sondens egen-

opvarmning kommer til at spille for stor rolle indenfor måleperioden, der er begrænset af sondens slankhedsforhold. Måling med den omtalte sonde har vist sig umulig på stoffer som polystyrenskum, mineraluld og polyurethanskum, idet et retlinet temperaturforløb her først indtræffer i et kort tidsinterval, førend forstyrrelserne hidrørende fra sondens endelige længde (her betragtet som i et uendeligt medium på grund af det lille forhold mellem λ -værdierne for materialet og luft) gør sig gældende. Ønskes målinger efter sondeprincippet foretaget på materialer med varmeledningstal i dette område, må tyndere og eventuelt længere sondetyper konstrueres. Dette kan lettest opnås ved udeladelse af sondens beskyttelsesrør, idet man så blot placerer en tynd varmetråd og et termoelementloddested mellem to plader af isoleringsmaterialet.

Ved de foreliggende undersøgelser er målt på materialer, hvis λ -værdi ligger i området mellem $0,1 \frac{\text{kcal}}{\text{mh}^\circ\text{C}}$ og $1,0 \frac{\text{kcal}}{\text{mh}^\circ\text{C}}$, blandt andet på materialerne sand, plexiglas, tegl og vaseline, for hvilke resultater gives her i rapporten.

Det er naturligvis af stor interesse som kontrol på målemetoden at sammenholde de herved opnåede resultater med resultater ved andre målemetoder, men kun relativt få stoffer er så tilpas veldefinerede, at en objektiv sammenligning er mulig, og desværre ligger de to stoffer, for hvilke sammenligning i det foreliggende er mulig, begge med λ -værdier på omkring $0,2 \frac{\text{kcal}}{\text{mh}^\circ\text{C}}$, nemlig stofferne sand og plexiglas.

Sandet er støbesand, der er sigtet således, at kornstørrelsen så vidt muligt er 0,20 mm. Efter passende tørring af sandet blev dets varmeledningstal ved velvillig bistand fra Teknologisk Instituts varmetekniske afdeling bestemt ved hjælp af det Jespersens pladeapparat, der er omtalt i det foregående. Ved bestemmelsen anvendtes ca. 40 liter sand, og heraf blev udtaget en mængde på ca. 2 liter, hvori sondemålingerne senere har fundet sted.

Plexiglas er en varemærkebetegnelse for et acrylmateriale, der fremstilles af det tyske firma Rohm und Haas GmbH, og antages derfor at være ret veldefineret med hensyn til kemisk sammensætning, foruden

at det er isotropt. Varmeledningstallet for dette materiale er bestemt med pladeapparater efter Poensgen-princippet, både på Forschungsheim für Warmeschutz, Munchen, og af Krischer, og desuden med det tidligere omtalte Krischer og Esdorns apparat.

Vaseline er en blanding af tunge kulbrinter og kan variere noget i sammensætning. For en, ikke nærmere angivet, sammensætning opgives et varmeledningstal i International Critical Tables, med hvilken værdi de foreliggende målinger på vaseline skal sammenlignes, dog med forbehold.

Nogen egentlig kontrol af sonde målingerne på tegl kan ikke forventes, da dette materiale er meget uensartet som følge af dets naturlige oprindelse, uensartethed ved formning af mursten og ved brændingen af disse. Selv mellem sten med samme rumvægt kan man konstatere forskelle i varmeledningstallene, hvilket forhold må forklares ved de tre førnævnte faktorer, der har indflydelse på pore størrelse og poreform. I "Der Warme- und Kalteschutz in der Industrie" [14] angiver J.S. Cammerer varmeledningstal for teglsten med rumvægtene 1800 kg/m^3 og 2000 kg/m^3 til henholdsvis $0,47$ og $0,60 \frac{\text{kcal}}{\text{mh}^\circ\text{C}}$ for materialer i laborietør tilstand, og angiver samtidig at enkeltværdier kan afvige fra disse middelværdier med op til $\pm 20 \%$. I "Regler for beregning af varmetab for bygninger" [15] refereres til danske laboriemålinger på tilsvarende materialer, hvor resultaterne for T/1800 og T/2000 er henholdsvis $0,60$ - og $0,8 \frac{\text{kcal}}{\text{mh}^\circ\text{C}}$.

I det foreliggende arbejde gives resultater fra målinger på 5 røde facadeteglsten, som af hensyn til beskrivelsen er tildelt numrene fra 1 til 5. Af resultaterne skal kun sluttes, at måling kan finde sted på tegl.

Sten nr. 1, 4 og 5 er tilfældigt valgte hårdtbrændte sten fra et sjællandsk teglværk, mens sten nr. 2 og 3 er mindre hårdt brændt og stammer fra en undersøgelse foretaget af Kalk- og Teglværkslaboratoriet, hvorunder varmeledningstallet $\lambda = 0,47 \frac{\text{kcal}}{\text{mh}^\circ\text{C}}$ bestemmes for 36 tilsvarende sten i Jespersens apparat.

Sten nr. 1 har en rumvægt på ca. 1900 kg/m^3 , mens de øvrige stens

rumvægt er ca. 1800 kg/m^3 . I sten nr. 5 er på to forskellige steder boret hul for indstikning af sonden, mens de øvrige sten kun er forsynet med et enkelt hul. For sten 5 fandtes i det foreliggende tilfælde ingen afvigelse i resultaterne fra måling på de to steder.

Alle stenene har været opbevaret i laboratoriets forsøgshal gennem længere tid og må antages at have indstillet sig i fugtligevægt med luften her. Fugtindholdet skønnes neraf at være ca. 0,1 volumen procent.

Det vil ses, at på grund af det ringe volumen af forsøgsmaterialet, der inddrages i målingerne med sondemetoden, vil det være nødvendigt med målinger på mange sten og flere steder på hver af disse, førend en middelværdi af dette uensartede materiales varmeledningstal kan gives til brug for normgivning. Til sådant brug vil målinger med et Poensgen-apparat langt hurtigere kunne give en anvendelig middelværdi på grund af prøvelegemets langt større dimensioner. Derimod opnås ved sondemålingerne et godt billede af spredningen i materialets λ -værdi.

I figurerne 15 - 25 vises kurver optegnet på grundlag af målingerne på de nævnte stoffer. I visse tilfælde er målingerne på samme materiale gennemført ved 2 forskellige strømstyrker. Mens abscissen i figurerne er en logaritmisk tidsskala for t angivet i sekunder, er ordinaten u galvanometerudslag i mm.

I fig. 26 og 27 er vist temperaturforløbet for plexiglasstænger med henholdsvis diameteren 15 mm og 50 mm, hvor den tidligere omtalte reflektionseffekt tydeligt ses at indtræffe efter henholdsvis 100 sec og 1100 sec's forløb, hvor det efter Vos's angivelse skulle indtræffe efter 75 sec og 850 sec.

I fig. 28 er resultatet af de nævnte målinger opført på skemaform og sammenlignet med værdierne fundet ved andre målemetoder, og samme middeltemperatur af materialet. Det vil heraf ses, at i det snævre λ -værdiområde, hvor det under det foreliggende arbejde har været muligt at kontrollere målingerne, er overensstemmelsen med andre målemetoder tilfredsstillende, idet usikkerhedsområderne for de forskellige målemetoder overlapper hinanden.

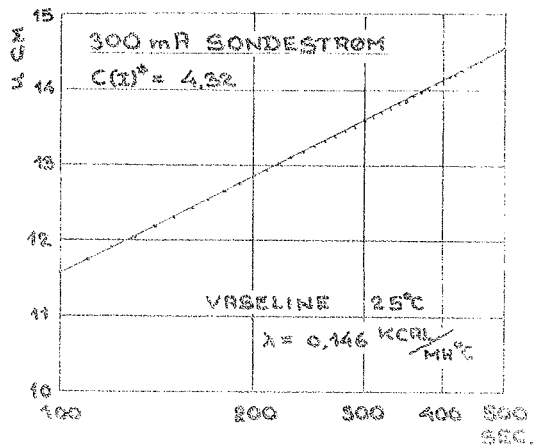


fig. 15

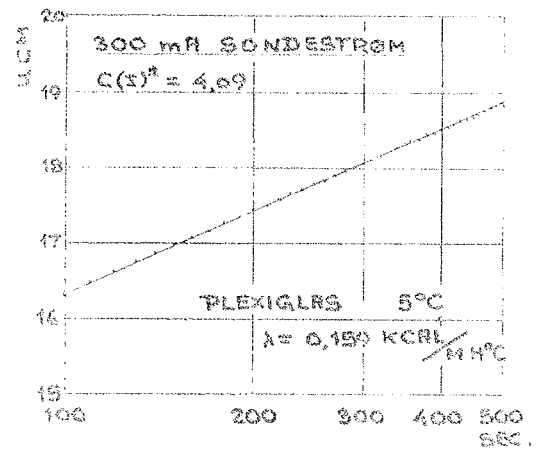


fig. 18

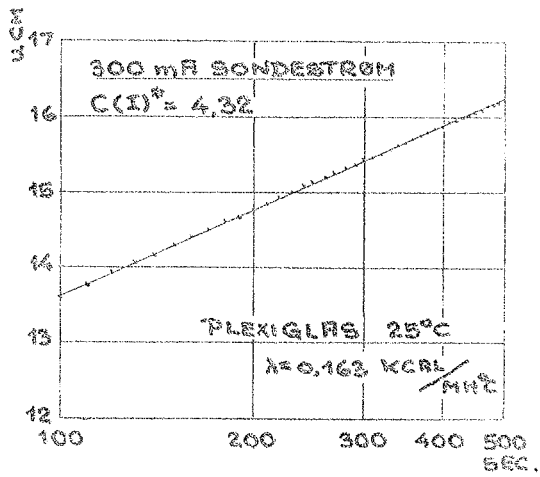


fig. 16

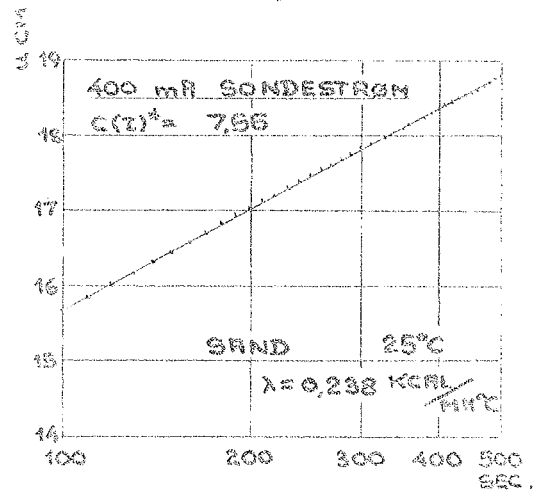


fig. 19

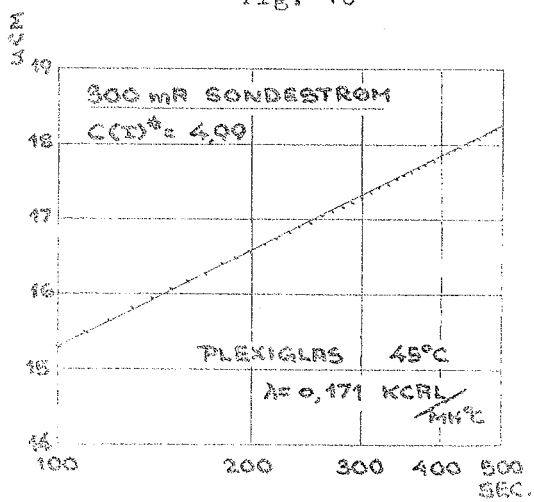


fig. 17

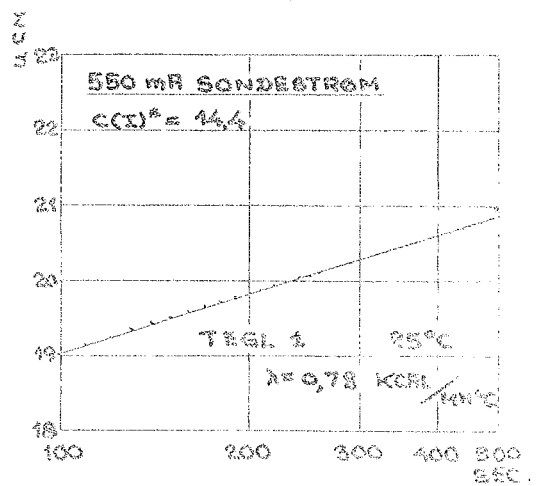


fig. 20

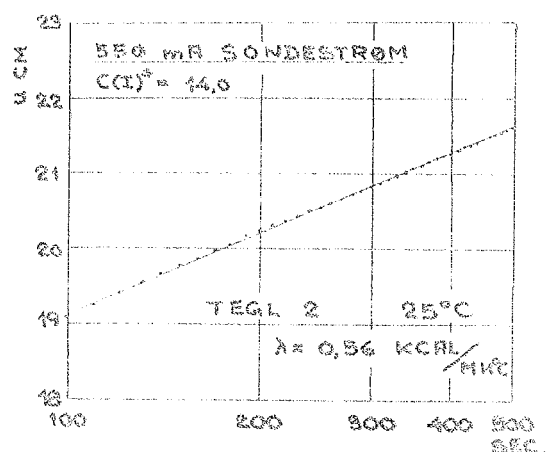


fig. 21

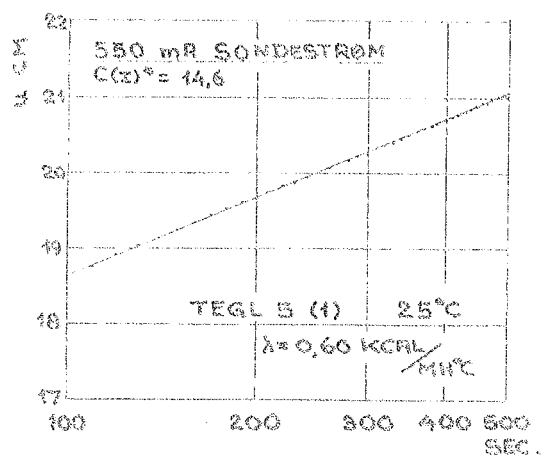


fig. 24

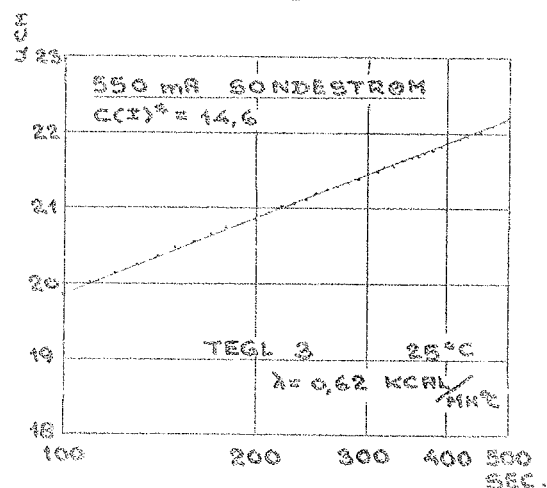


fig. 22

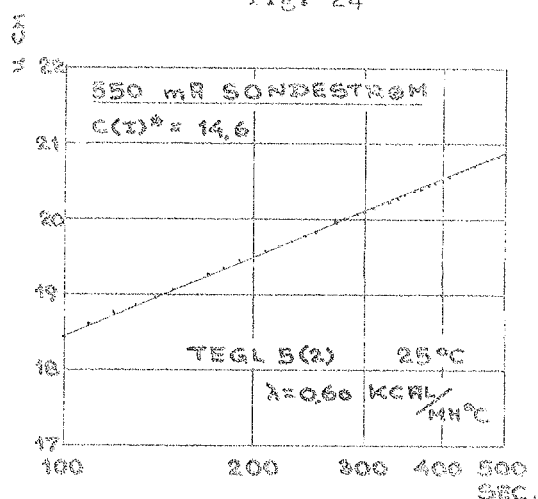


fig. 25

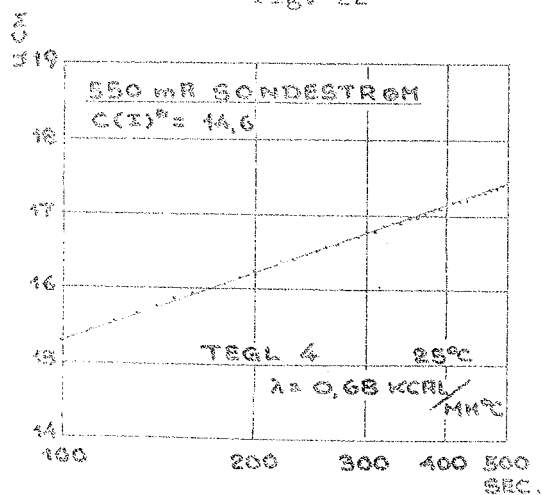


fig. 23

I fig. 15 - 25 angiver $C(I)^*$ den temperaturkorrigerede værdi af $C(I)$. Det bemærkes, at sondens temperatur ofte ligger en del højere end det omgivende materiales temperatur, på grund af varmeovergangsmodstanden mellem sonden og materialet.

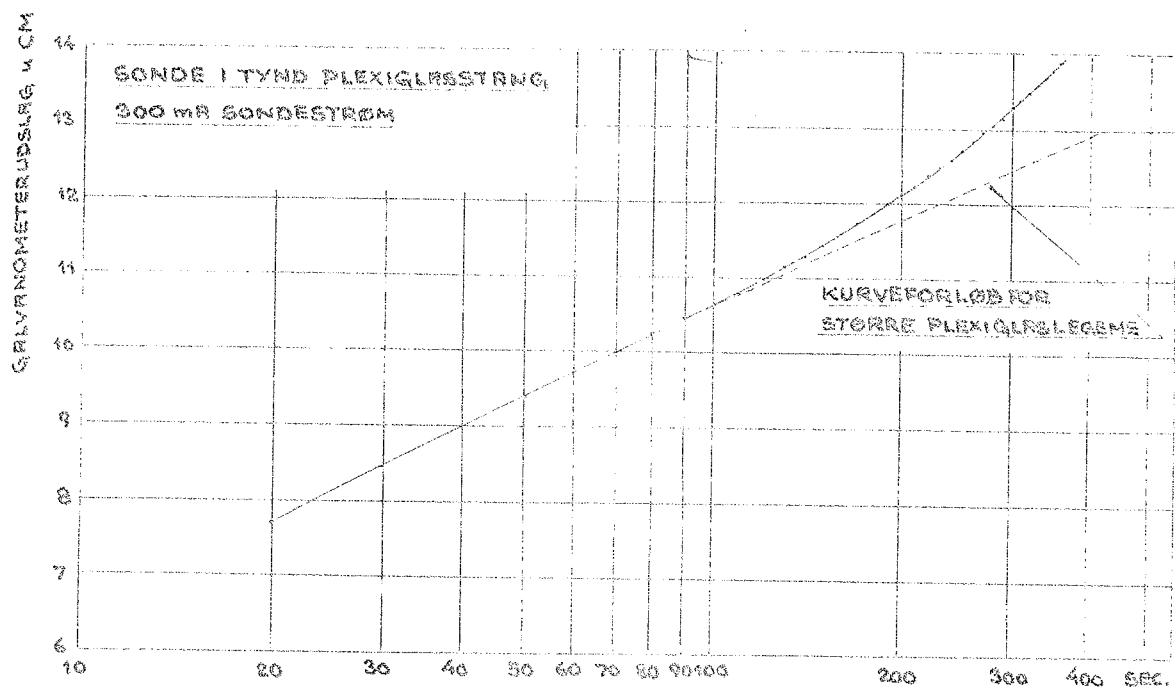


fig. 25

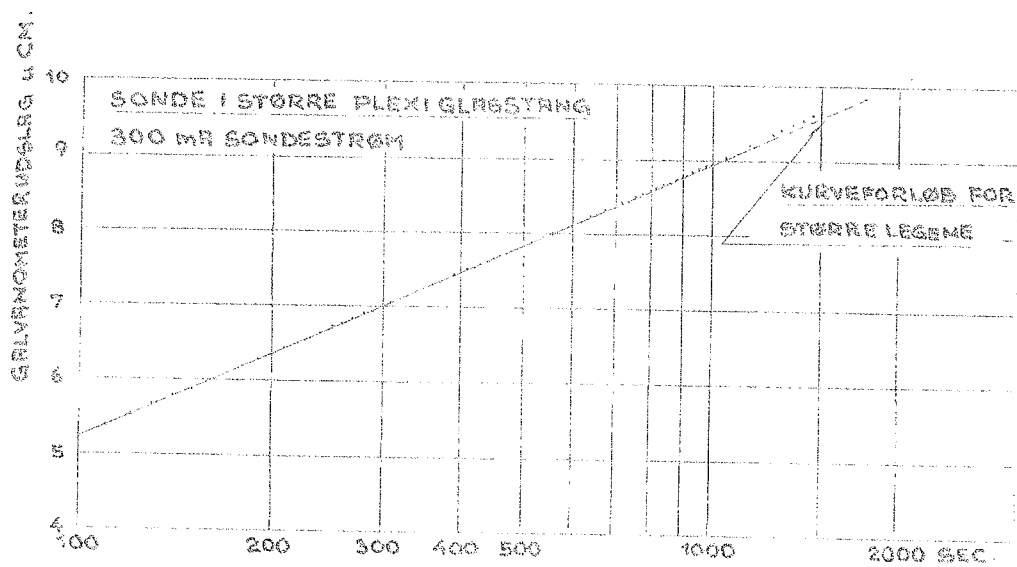


fig. 27

Det må naturligvis betragtes som utilfredsstillende, at muligheden for kontrolsammenligning ved høje varmeledningstal er vanskelig, men af de systematiske fejl, der indføres ved sondemålingerne, er aksialledning gennem sondematerialet den mest væsentlige. Denne vil imidlertid mindskes, når prøvematerialets λ -værdi stiger mod sondens egen λ -værdi, så at stigende usikkerhed af denne grund i hvert fald ikke er at forvente.

På grund af de små dimensioner af sonde og prøvelegeme er det særdeles nemt at anbringe denne del af måleopstillingen i rum med temperaturer, der afviger fra stuetemperatur, f.eks. i et køle- eller et varmeskab, og således at gennemføre λ -værdibestemmelser ved andre temperaturer. For den fremstillede sonde gælder det dog, at dens plasticdele ikke tåler temperaturer på over 80-100 °C.

3.2 Resultater af målinger på forskellige materialer.

Materiale	Middeltemp. af mat. ved bestemmelsen	Rumvægt i kg/m ³	λ-værdi be- stemt v. eg- ne målinger	λ-værdi be- stemt af an- dre f.tils. materiale	afvigelse mel. andres og egne λ-værdier i % af egne værdier
Vaseline	25°C	900	0,146	0,154	-5 %
Plexiglas	25°C	1170	0,163	0,163	0 %
Plexiglas	45°C	1170	0,171	-	-
Plexiglas	5°C	1170	0,159	-	-
Sand	25°C	1480	0,238	0,225	+5 %
Teglsten 1	25°C	ca. 1900	0,78	0,54-0,70	min. -10 % max. -31 %
Teglsten 2	25°C	ca. 1800	0,56	0,47-0,60	min. +7 % max. -16 %
Teglsten 3	25°C	ca. 1800	0,62	0,47-0,60	min. -2 % max. -24 %
Teglsten 4	25°C	ca. 1800	0,68	0,47-0,60	min. -12 % max. -31 %
Teglsten 5(1)	25°C	ca. 1800	0,60	0,47-0,60	min. 0 max. 22 %
Teglsten 5(2)	25°C	-	0,60	0,47-0,60	min. 0 max. 22 %

Fig. 28

4. Sammenligning af målemetoder nævnt i det foregående.

4.o. Vurdering af de enkelte målemetoder.

Foruden kravet til lille måleusikkerhed ved bestemmelsen af varmeledningstal, eksisterer i praksis også kravene til kort måletid, enkel tildannelsesproces af prøvelegemer, prøvelegemets nødvendige volumen (hvor det er af et kostbart materiale, f.eks. ved produktionskontrol), lave omkostninger ved måling ved ekstreme temperaturer, mulighed for transport af måleudstyret, mulighed for bestemmelse af λ -værdier ved ret veldefinerede temperaturer, og endelig også anskaffelsesomkostningerne for måleudstyret.

Pladeapparater af Poensgen-typen kan anvendes til måling på faste stoffer, kornede stoffer, samt halvflydende og evt. flydende stoffer, for den sidste gruppe gælder dog, at vædskelegets tykkelse skal være lille, så konvektionsstrømme i laget så vidt muligt undgås. Herved øges måleusikkerheden noget.

Målenøjagtigheden for denne apparattype vil under gunstige betingelser kunne gøres meget høj, så usikkerheder på ca. 2 % opnås. Til gengæld er metoden vel den mest tidsrøvende af de her omtalte, idet tiden for en bestemmelse sagtens kan være flere døgn på grund af en langsom indstilling til stationære forhold, som jo nødvendigvis må finde sted i apparatet.

Prøvelegemernes dimensioner er almindeligvis ca. $50 \times 50 \times 5 \text{ cm}^3$. Hvor de er af et fast stof, er en forudgående bearbejdning ved høvling eller slibning nødvendig, så planparallelle flader opnås med god nøjagtighed. De udvendige dimensioner af apparatet er af størrelsesordenen $1 \times 1 \times 0,5 \text{ m}^3$, og til opretholdelse af ekstreme temperaturforhold i apparatet kræves ret store køle- eller varmeeffekter på grund af transmissionstab til omgivelserne. Det ret store og fintregulerende køleanlæg, som kræves i tilslutning til apparatet, gør, at dette må betragtes som stationært. Prisen ved anskaffelsen af et sådant apparat er ret høj.

Schröders apparat kan anvendes til måling på faste stoffer.

Måleusikkerheden hævdes at være ca. 3 % og måletiden ca. 15 minutter. Prøvelegemets dimensioner er små (af størrelsesordenen et par cm), og tildannelsen af disse må tilsyneladende ske med meget stor omhu, hvis usikkerheder af nævnte størrelsesorden skal kunne være realisable. Apparattypen er særdeles velegnet til bestemmelse ved ekstreme temperaturer, idet der er rigelige valgmuligheder af vædske, også flydende gasser, med forskellige kogepunkter foreligger i et stort temperaturområde. Apparatet kræver ikke meget hjælpeudstyr, da temperaturer og varme-strømme er bestemt på grundlag af vædskernes data, der så til gengæld må være kendt med god nøjagtighed. Om omkostningerne ved anskaffelse af et sådant apparat kan intet siges.

Nusselts kugle kan anvendes til måling på løse materialer, såsom sand og isoleringsfyld, samt med noget besvær på faste stoffer. Måle-usikkerheden anslås at være ca. 7-8 % på grund af vanskeligheden med at opnå en homogen fordeling af de løse materialer indenfor kugleskallen. Det kugleformede prøvelegeme har almindeligvis en størstediameter på mellem 20 og 50 cm. Kun ved måling på faste materialer volder tildannelsen af prøvelegemet nævneværdigt arbejde, idet tildannelsen af to ens halvkugleformede skaller må foregå ved spåntagning eller slibning. Apparattypen er anvendelig ved måling under ekstreme temperaturforhold, idet kuglen kan nedsænkes i et bad af den ønskede konstante temperatur. På grund af en ret lang nødvendig tid før indstilling i ligevægtstilstand kan dette dog være forbundet med nogen omkostninger.

Kerstens rør kan anvendes til måling på løse fyldmaterialer og anslås at have en usikkerhed på bestemmelsen af λ -værdier på ca. 7-8 %. Ifyldning af materiale i apparatet volder ingen besvær, og måleresultater kan opnås efter nogle timers forsøg. Apparatets størrelse (2-3 meter) gør det uegnet til λ -værdi-bestemmelse i temperaturområder udenfor stuetemperatur, og det må samtidigt betragtes som stationært.

Krischer og Esdorns apparat kan anvendes til måling på faste materialer og har en angivet måleusikkerhed på ca. 2 %. Måletiden for bestemmelse af både λ -værdi, varmeindtrængningstal og varmekapacitet er ialt ca. 15 minutter. Til målingen kræves ialt 8 ens prøvelegemer, ved

hvis tildannelse til planparallelle plader af samme tykkelse nogen omhu må lægges for dagen. Prøvelegemernes dimensioner er ca. $10 \times 10 \times 2,5 \text{ cm}^3$, varierende noget i tykkelsen.

Da apparatet er omsluttet af en lufttæt kappe, kan en vilkårlig atmosfære opretholdes omkring prøvelegemerne, og apparatets ydre dimensioner (ca. $20 \times 20 \times 50 \text{ cm}^3$) muliggør yderligere anbringelse i forholdsvis små rum, der holdes på ekstreme temperaturer, således at λ -værdibestemmelse kan ske under meget varierede forhold. Omkostningsprisen ved anskaffelse af et sådant apparat skønnes at være overkommelig.

Joffe-metoden er, som tidligere nævnt, kun sparsomt belyst med hensyn til praktisk anvendelse, idet oplysningerne om måleusikkerhed på ca. 3 % og en måletid på ca. 5 minutter faktisk er de eneste. Målinger kan ske på prøvelegemer af faste materialer, som må udformes med to planparallelle flader, ofte ved slibning. Dimensionerne af prøvelegemerne er små, og apparatet tilsyneladende lille, så man må antage, at der er særdeles gode muligheder for bestemmelse ved ekstreme temperaturer, hvorunder det bad med konstant temperatur, som apparatets store kobberklods neddykkes i, kan bestå af en vilkårlig vædske med et passende kogepunkt.

Apparatet med periodestationære varmemstrømme blev bygget her på laboratoriet med den oprindelige hensigt at efterprøve teorierne om analogien mellem elektriske strømme og varmemstrømme. Herudover er apparatet, som nævnt, blevet anvendt til måling på forskellige bygningssten. Det kan kun anvendes til måling på faste, pladeformede materialer, og måleusikkerheden kan vel bringes ned til ca. 4-5 %. Indsvingningstiden til periodestationære tilstande er lang, og kravet om nogle fulde svingninger herefter forlænger yderligere måletiden. Prøvelegemernes dimensioner er $50 \times 50 \times 10 \text{ cm}^3$. Apparatet kan i sin nuværende form udelukkende anvendes til bestemmelse ved temperaturer omkring stuetemperatur.

Bestemmelse af varmeledningstal med termosonde kan ske med målenøjagtighed på ca. 4 %. Ubestemtheden ved måling på mange materialer er ret stor på grund af den ringe materiale-mængde, der er inddraget i

målingen, som tilfældet altid er ved prøvelegemer med små dimensioner. Måling kan ske på faste stoffer, kornformige stoffer og flydende stoffer, hvis flydenhed dog må være så lille, at konvektionsstrømme ikke kan opstå.

Til prøvelegemet stilles krav om visse minimumsmål, og for faste stoffer består tildannelsen herefter i boring af et hul med dimensioner svarende til sondens, og for de øvrige stoffer i indstikning af sonden i prøvelegemet. På grund af sondernes ringe dimensioner kan λ -værdibestemmelser ved ekstreme temperaturer foregå i meget snævre rum. B.H. Vos har således bestemt λ -værdier ved temperaturer varierende mellem kogepunktet for atmosfærisk luft og stuetemperatur. Forsøget kunne gennemføres med ret lave udgifter, og korrektion for den naturlige temperaturstigning i prøvematerialet under forsøget skete ved at de "kolde" loddesteder for sondens termoelementer var anbragt i klods af samme materiale og dimensioner som prøvelegemet. Klodsen befandt sig sammen med prøvelegemet i et Dewarkar, hvis temperatur efter afkøling med flydende luft langsomt steg mod stuetemperatur.

Måletiden med termosonder varierer mellem 120 sekunder og 20 minutter. En termosonde er et særdeles håndterligt instrument, der er velegnet til materialekontrol, og som om fornødent kan anvendes til målinger "i marken". Sonder egnet til måling af velisolerende materialer samt af vædske kan konstrueres, hvorved gode muligheder for produktionskontrol kan skabes.

Endelig skal nævnes, at kravene til volumen af prøvelegemet vel næst efter Joffe-metodens er de ringeste, således at målinger på kostbare materialer er økonomisk overkommelige, samtidig med at måling er mulig på materialer som f.eks. kød og visse andre fødevarer, hvor prøvelegemets størrelse ofte er begrænset af fremstillingsmulighederne. Målinger på sidstnævnte produkter kan have interesse i frysekonserveringsteknikken.

Konklusion.

Når valg af målemetoder skal træffes, vil den ene metode ikke uden

videre kunne foretrækkes for de andre, idet kravene til målingerne jo altid vil være et kompromis af følgende:

1. Forsøgets varighed.
2. Ubestemthed på resultat.
3. Egnethed for det pågældende prøvemateriale.
4. Størrelsen af arbejdet ved tildannelsen af prøvelegemer af materialet.
5. Mulighed for måling under ekstreme temperaturforhold.
6. Målenøjagtighed.

Ved anskaffelse af måleapparatur må derfor altid forinden foretages en vurdering af de aktuelle og fremtidige krav, hvorefter et valg af metode må bero på den bedst mulige overensstemmelse mellem de pågældende krav og de, der kan honoreres af de enkelte målemetoder.

I dag stræber man stadig efter at finde frem til bestemmelse af varmeledningstal for fugtige materialer, hvorunder fugtfordelingen ikke ændrer sig i prøvematerialet under målingen. Således er der indtil nu gennemført en del forsøg på bestemmelse af fugtige materials varmeledningstal i afhængighed af materialets fugtindhold, middeltemperatur og varmemestrømmen gennem materialet. Forsøgene er dels gjort med stationære metoder i pladeapparater (hvor prøvelegemernes overflade på behørig vis var beskyttet mod fugtafgivelse, og hvor varmemestrømmen gennem prøvelegemerne var opadrettet, så at fugtforskydninger indenfor prøvelegemet i nogen grad måtte ophæves af tyngdekraften), dels med ikke-stationære korttidsmetoder, som med sondemetoden og Krischer og Esdorns metode, hvor måletiden ansås for at være så kort, at væsentlige fugtforskydninger ikke kunne nå at finde sted, samtidig med at varmemestrømmens størrelse her er ret ringe.

Metoden, der er anvendt her på laboratoriet, hvor en sinusformet varmemestrøm sendes igennem et pladeformet prøvelegeme, kunne ved overlejring af varmepladens sinusformede effekt med en konstant køleeffekt tilpasses, så differensen mellem middeltemperaturerne (med hensyn til tiden) i varmemestrømmens retning gennem prøvelegemet var 0, således at

fugtfordelingen var den samme efter gennemløbet af en fuld periode.

Ingen af de her nævnte metoder er imidlertid ideelle, da det dog må antages, at en fugttransport må finde sted, så snart varmestrømmen gennem materialet optræder.

Ved måling på fugtige materialer synes det derfor nødvendigt, at man foruden den kontrollerede varmetilførsel har en kontrolleret fugttilførsel (i ligevægtstilstand) til prøvelegemets varme side.

Ved måling med termosonder på fugtige materialer er konstateret en entydig sammenhæng mellem måleresultater på det enkelte materiale og dettes fugtindhold. Der synes altså her at være mulighed for bestemmelse af et materiales fugtindhold ud fra målinger med sonder, der forud er kalibreret i materialet. Man må dog ikke være blind for, at tilstedeværelsen af sondens indstikningshul i materialet kan have indflydelse på fugtfordelingen i umiddelbar nærhed heraf.

Alt i alt kan ingen af de i det foregående omtalte målemetoder skønnes velegnede til λ -værdibestemmelser på fugtige materialer, selv under hensyntagen til de allerede i indledningen nævnte komplekse forhold, der må tages i betragtning ved en definition af λ -værdi i sådanne tilfælde, og vurderingen af de foreliggende målemetoder er derfor foretaget under forudsætning af, at måling sker på laboratorietørre materialer.

R E T T E L S E R

side linie

- 4 4 f.o., $\{\vartheta\} = \overline{\vartheta}$, læs: $\mathcal{L}\{\vartheta\} = \overline{\vartheta}$
- 6 5 f.n., læs differentialkvotienten i sidste led på højre
side som $\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta \vartheta^2}$
- 9 1 f.n., $x \rightarrow \infty$, læs: $x \rightarrow \infty$
- 10 8 f.o., $==$, læs: $\Rightarrow$
- 18 1 f.n., $\int$ erstattes med $\sum$
- 26 8 f.n., (se fig. 1), læs: (se fig.)
- 30 5 f.o., på fig. 1, læs: på figuren
- 31 16 f.o., og vædske G's---, læs: og vædske g's---
- 35 1 f.o., formel (5a), læs: formel (5e)
- 36 5 f.o., udtrykket (5a), læs: udtrykket (5e)
- 40 9 f.o., læs: $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{H' l a}{\lambda l^2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-(n\pi)^2 \frac{at}{l^2}} \right]$ (7a)
- 67 10 f.n., $\frac{at}{r^2}$, læs: $\frac{at}{r_o^2}$
- 86 7 f.o., $\ln t$, læs: $\ln t$.

Resume.

Ved fremkomsten af Fouriers teori for varmetransmission i begyndelsen af forrige århundrede, indførtes definitionen på begrebet varmeledningstal for et stof. Til bestemmelse af et stofs varmeledningstal har man siden da hovedsagelig anvendt måleopstillinger med stationære temperaturforhold, hvor sammenhørende målinger af varmestrømsintensiteter og temperaturgradienter benyttes til beregning af varmeledningstallet. Gennem årene har apparat typer bygget efter dette måleprincip gennemgået en raffineringsproces, hvor bl.a. indførelsen af termoelektrisk måleudstyr har spillet en betydelig rolle.

I de senere år er flere bestemmelsesmetoder fremkommet, hvor målinger foretages under instationære temperaturforhold. I princippet er disse metoder baseret på løsninger af varmeledningsslikningen med begyndelses- og randbetingelser, der under praktiske forhold med god tilnærmelse kan påtrykkes et prøvelegeme af det stof, som ønskes undersøgt. Disse løsninger er blevet matematisk let tilgængelige efter indførelsen af teorien for operatorregning med Laplace-transformerede. I praksis er det overkommeligt at påtrykke en konstant temperatur eller en konstant varmestrøm som randbetingelse på en begrænsningsflade af et prøvelegeme, mens begyndelsesbetingelserne er lettest når prøvelegemet er gradientfrit indtil tidspunktet for påtrykningen af en af de førnævnte randbetingelser. Varmestrømmene i de i den foreliggende afhandling beskrevne apparater er enten aksialsymmetriske eller endimensionale.

Som et led i studierne af målemetoder er fremstillet en termosonde, der i princippet bygger på det teoretiske tilfælde, hvor en uendelig lang, linieformet varmekilde med konstant afgiven effekt er omgivet af et uendeligt medium. Ud fra en registrering af sondens temperaturstigning i afhængighed af tiden, kan varmeledningstallet for det omgivende medium bestemmes, da sondetemperaturen efter en vis indløbstid vil stige proportionalt med logaritmen til tiden forløbet siden forsøgets begyndelse. Proportionali-

tetsfaktoren varierer omvendt proportionalt med varmeledningstallet. Termosonden er opbygget af et 10 cm langt rustfrit stål-kanylet. Termosonden er opbygget af et 10 cm langt rustfrit stål-kanylet, hvis indvendige og udvendige diameter er henholdsvis 0,6 mm og 1,0 mm. I rørets indre er placeret et elektrisk modstandsvarmelegeme samt det ene loddested af et termoelement, mens det overskydende hulrum er fyldt med plastic. Med denne sonde er udført tilfredsstillende målinger på forskellige materialer, hvis varmeledningstal ligger i området mellem 0,1 – og 1,0 kcal/m h°C.

Generelt kan siges at de instationære metoder udmærker sig ved at tiden, der medgår til en bestemmelse af varmeledningstallet for et materiale, er meget kortere end den tilsvarende tid ved de stationære metoder, samtidig med at det materialevolumen, der kræves til rådighed for en instationær metode, i almindelighed er langt mindre end for de stationære. Derfor er de instationære apparattyper en del mindre end de stationære og kan ofte uden besvær anbringes i selv små rum med ekstremt høje eller lave temperaturer, hvorunder målinger kan gennemføres.

En ulempe ved det lille materialevolumen er imidlertid, at man, for prøver af materialer hvis egenskaber varierer noget fra sted til sted med relativt kort afstand, må gennemføre en serie målinger på mange prøver af materialet for at opnå en gyldig middelværdi for materialets varmeledningsevne. Antallet af nødvendige prøver reduceres, når den nødvendige størrelse af prøvelegemet vokser, idet man dog så bliver afskåret fra at bestemme spredningen for det pågældende materiales varmeledningsevne.

Ved sammenligning af de forskellige målemetoder kan den ene ikke umiddelbart foretrækkes for den anden, førend kravene med hensyn til måletidens længde og prøvelegemets størrelse, samt til målenøjagtigheden er fastlagt.

ooo

Nærværende arbejde er udført på Laboratoriet for Varmeisolering, DTH, med docent, civilingeniør Vagn Korsgaard som faglærer.

Lyngby, den 31. maj 1963

Axel Rubinstein.