Nr. 2

DAS LABORATORIUM FÜR WÄRMEISOLIERUNG
Hjortekærsvej 99 Lyngby

DK 69.022:699.86

THERMISCH ÄQUIVALENTE AUSSENWÄNDE

Artikel von

Dozent, Dipl.-Ingenieur Vagn Korsgaard

Das Laboratorium für Wärmeisolierung
an der Technische Hochschule

Kopenhagen

11. Dezember 1961

KURZAUSZUG

Der voeliegende Aufsatz stellt einen neuen Gesichtspunkt betreffs der thermischen Aquivalenz von Aussenwänden dar. Im Vergleich einer leichten Wand mit einer schweren Wand in bezug auf thermische Eigenschaften ist es nicht wie bisher hinreichend nur ihre Wärmewiderstände in Betracht zu ziehen. Um eine Wand in thermischer Beziehung völlig zu beschreiben ist der Begriff der "Transmissionsmatrix" einer Wand eingeführt. Für den Vergleich verschiedener Wände ist der Begriff "beinahe thermische Aquivalenz" eingeführt, und zwei verschiedene Arten beinahe thermischer Aquivalenz, nämlich "Amplitudenäquivalenz" und "Phasenäquivalenz" sind besonders erwähnt. Es wird gezeigt, dass es auf Grund der Analogie zwischen Wärmeströmen und elektrischen Strömen eine ziemlich unkomplizierte Sache ist, eine Wand, die mit einer gegebenen Wand beinahe thermisch äquivalent ist, zu bestimmen.

√ dänischen

Im Vorschlage zu den Vorschriften der neuen √ Landesbauordnung werden, wie in den bisher geltenden Staatsanleiheregeln, bestimmte Forderungen an die Wärmeisolierungsfähigkeit von Aussenwänden gestellt. Während in den Staatsanleiheregeln eine bestimmte Isolierungsfähigkeit verlangt wurde, unabhängig von der Wandkonstruktion, stellt die neue Landesbauordnung grössere Forderungen an die Isolierungsfähigkeit leichterer Wände als an schwere Wände. Obwohl keine Begründung hierfür gegeben ist, ist es doch unter Bautechnikern allgemein bekannt, dass leichte Konstruktionen, wenn sie auch dieselbe Isolierungsfähigkeit haben, bei unterbrochener Heizung das sogenannte Barackenklima veranlassen, ein Klima, das im allgemeinen in Wohnungen als unerwünscht betrachtet wird. Barackenklima ist dabei (dadurch) charakteristisch (gekennzeichnet), dass die Temperatur in den Räumen über Nacht nach Unterbrechung der Heizung am Abend schnell herabsinkt, so dass es am Morgen unangenehm kalt wird. Ausserdem gibt es auch eine grössere Gefahr, dass Feuchtigkeitsschäden auf die (den) Aussenwände (n) erstehen (auftreten), da die Temperatur auf der Innenseite leichter unter den Taupunkt der Raumluft sinkt.

Im allgemeinen begnügt man sich damit, die Temperaturen und Wärmeströme bei stationären Verhältnissen zu berechnen, hauptsächlich wegen der berechnungsmässigen Schwierigkeiten, die bei instationären Verhältnissen auftreten.

Bei stationären Bedingungen sind die Oberflächentemperaturen auf einer Wand und die Wärmeströme allein durch die Übergangswiderstände und den Wärmewiderstand der Wand bestimmt, wenn die resultierenden Raumtemperaturen in bezug auf die beiden Überflächen der Wand gegeben sind. Der gesetzmässige Zusammenhang zwischen diesen Grössen können bekanntlich wie folgt formuliert werden: Die Widerstandszahl mit der Dichte des Wärmestromes multipliziert ist gleich der Temperaturdifferenz. Hieraus sieht man, dass unter stationären Verhältnissen werden verschiedene Wände in thermischer Beziehung bei demselben Wärmewiderstand äquivalent sein, welches dabei auszudrücken ist, dass sie widerstandsäquivalent sind. Da der Wärmewiderstand einer Wand von ihrer Wärmekapazität unabhängig ist, kann eine leichte Wand sehr wohl mit einer schweren Wand thermisch widerstands äquivalent sein.

In der Praxis gibt es aber niemals stationäre Verhältnisse, teils da sich das Wetter ändert, teils da die Wärmezufuhr in einem Raum gewöhnlich über Nacht ermässigt oder eingestellt wird. Deswegen wird es von Bedeutung sein, herauszufinden, ob verschiedene Wandkonstruktionen nicht stationären

nicht

Bedingungen gegenüber überhaupt thermisch äquivalent sein können, und im Bejahungsfalle, ob es möglich ist, eine mit einer gegebenen Wand thermisch äquivalente Wand anzugeben.

Dass verschiedene Wände den Umgebungen gegenüber thermisch äquivalent sind, ist damit gleichbedeutend, dass zusammengehörige Überflachentemperaturen und Wärmeströme durch die Überflächen einer Wand zu jeder Zeit denselben Wert haben sollen, wenn die Wände denselben äusseren Einflüssen ausgesetzt werden, z.B. beim Zeitverlauf der resultierenden Raumtemperaturen in bezug auf die Überflächen der Wände gegeben.

Wie bekannt kann jeder in der Praxis vorkommende Zeitverlauf Fourieranalysiert werden, d.h. in harmonische Oszillationen aufgelöst werden, z.B. Sinusoszillationen mit Frequenzen, die ganze Multipla der Grundfrequenz sind. Die Grundfrequenz kann z.B. einer Wiederholung des Zeitverlaufes mit der Periodenlänge eines Jahres, eines Monats, 24 Stunden oder einer Stunde entsprechen, von der Art der Aufgabe abhängig. Es führt deshalb keine grundsätzlichen Beschränkung der Gültigkeit der Betrachtungen mit, wenn nur reine Sinusoszillationen betrachtet werden. Es zeigt sich aber, dass obwohl die äusseren thermischen Einflüsse Sinusoszillationen gemäss verlaufen, ist es nicht möglich, zwei verschiedene Wandkonstruktionen, die thermisch äquivalent sind, anzugeben, wenn die obenerwähnten gestellten Forderungen erfüllt werden sollen.

In der Praxis werden besonders der Temperaturverlauf und der Wärmestrom an der Innenseite einer Wand von Interesse sein. Wenn die Forderungen an thermische Äquivalenz vernachlässigt werden, so dass sie nur die Innenseite der Wände gelten, können die folgenden zwei Formen beinahe thermischer Äquivalenz so formuliert werden:

„Fastäquivalenz"

1. Amplitudenäquivelenz.

Man sagt, dass zwei Aussenwände amplitudenäquivalent für eine gegebene Frequenz sind, wenn die sinusförmigen Temperaturverläufe an den Innenseite der Wände dieselbe Amplitude haben, wenn die resultierenden Raumtemperaturen Sinusoszillationen gemäss mit der betreffenden Frequenz verlaufen.

2. Phasenäquivalenz.

Man sagt, dass zwei Aussenwände phasenäquivalent für eine gegebene Frequenz sind, wenn die sinusförmigen Temperaturverläufe an den Innenseiten der Wände dieselbe Phase haben, wenn die resultierenden Raumtemperaturen Sinusoszillationen gemäss mit der betreffenden Frequenz verlaufen.

Von diesen beiden Formen beinahe thermischer Aquivalenz werden besonders der Begriff Amplitudenfrequenz äquivalenz in der Praxis von Interesse sein.

Die mathematische und messtechnische Behandlung des Problemes wird am leichtesten bei der Verwendung der Analogie zwischen Wärmeströmen und elektrischen Strömen gelöst, da eine Wand infolgedessen als einen passiven Vierpol betrachtet werden kann, für welchen es in der Elektrotechnik eine ausführliche Theorie gibt.

ANALOGIE ZWISCHEN ELEKTRISCHEN STRÖMEN UND WÄRMESTRÖMEN

Für das thermische Feld in einem homogenen, isotropischen Körper mit einer temperaturunabhängigen Wärmeleitungsfähigkeit gilt die Fourier Wärmeleitungsgleichung, die man für eindimensionale Wärmeströme wie folgt schreiben kann:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

worin bedeutet

ϑ die Temperatur
x die Ortskoordinate
t die Zeit
$a = \frac{\lambda}{c\rho}$ die Temperaturleitungszahl
λ die Wärmeleitungsfähigkeit
c die spezifische Wärme
ρ das spezifische Gewicht

$\frac{1}{a}$ kann auch als $M'K'$ geschrieben werden,
wo $M' = \frac{1}{\lambda A}$ der Wärmewiderstand pro Dickeneinheit ist, und
$K' = c\rho A$ die Wärmekapazität pro Dickeneinheit ist.

Die partielle Differentialgleichung (1) entspricht der partiellen Differentialgleichung, die für ein induktionsfreies elektrisches Kabel ohne Ableitung gilt, und die lautet

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_e^2} - R'C' \frac{\partial v}{\partial t_e} = 0 \tag{2}$$

worin bedeutet

v die Spannung
x_e die Ortskoordinate
t_e die Zeit
R' den Widerstand pro Längeneinheit
C' die Kapazität pro Längeneinheit

Gleichung (1) ist aus der Erfahrungsformel

$$dq = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} A \, dt \tag{3}$$

worin bedeutet

q die Wärmemenge

A den Flächeninhalt

herusgeleitet.

Die entsprechende Formel für elektrische Ströme lautet

$$dq_e = -\lambda_e \frac{\partial v}{\partial x_e} A_e \, dt \tag{4}$$

worin bedeutet

q_e die Elektrizitätsmenge

A_e die Fläche

λ_e die Leitungsfähigkeit

Man bemerkt, dass (1) und (2) nicht auf eindeutige Weise das Temperaturfeld und das Potentialfeld in der Wand beziehungsweise dem Kabel festlegen. Hierfür wird infolge der Theorie der Differentialgleichungen ausserdem eine Festlegung der Anfangsbedingungen und Randbedingungen erfordert.

Bei einem Vergleich zwischen (1) und (2) ersieht man unmittelbar

dass die Temperatur (ϑ) der Spannung (v) entspricht

die Länge (x) der Länge (x_e) entspricht

die Zeit (t) der Zeit (t_e) entspricht

Temperaturleitungszahl (a) $\frac{1}{R'C'}$ entspricht

und von (3) und (4) ersieht man,

dass die Wärmemenge (q) der Elektrizitätsmenge (q_e) entspricht

die Wärmeleitungsfähigkeit (λ) der elektrischen Leitungsfähigkeit (λ_e) entspricht

und für eine Wand der Dicke ℓ, bzw. ein Kabel der Länge ℓ_e sieht man, dass der Wärmewiderstand ($M = \frac{\ell}{\lambda A}$) einem ohmschen Widerstand ($R = \frac{\ell_e}{\lambda_e A_e}$) entspricht und die Wärmekapazität ($K = c\rho A\ell$) der Elektrizitätskapazität (C) entspricht.

Um ein elektrisches Modell eines gegebenen thermischen Systemes herstellen zu können, ist es notwendig, ein bestimmtes Verhältnis zwischen den zusammengehörigen elektrischen und thermischen Grössen zu wählen, die in die Gleichungen (1) und (2) eingehen:

das Potentialverhältnis $\frac{\Delta \vartheta}{\Delta v} = f_1$

das Längenverhältnis $\frac{\Delta x}{\Delta x_e} = f_2$

das Zeitverhältnis $\frac{\Delta t}{\Delta t_e} = f_3$

Durch Einführung dieser Verhältnisse in (1) erhält man

$$\frac{\partial^2 (f_1 v)}{\partial (\sqrt{f_2} x_e)^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial (f_1 v)}{\partial (f_3 t_e)} = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_e^2} - \frac{f_2}{f_3} \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial t_e} = 0 \tag{2a}$$

Hieraus sieht man, dass für gegebene Anfangs- und Randbedingungen die Lösung der partiellen Differentialgleichung für das elektrische System auch die Lösung des thermischen Systemes bis auf einige Konstanten ist.

Im Vergleich (2a) mit (2) sieht man, dass

$$\frac{f_2}{f_3} \frac{1}{a} = R'C'$$

Wird $\frac{1}{a} = M'K'$ eingesetzt, erhält man

$$\frac{f_2}{f_3} M'K' = R'C'$$

Wenn das Kapazitätsverhältnis $\frac{K}{C} = f_4$ gesetzt wird, erhält man das Widerstandsverhältnis $\frac{M}{R} = \frac{f_3}{f_4}$. Obwohl man theoretisch die Verhältnisse f_1, f_2, f_3 und f_4 frei wählen kann, muss man sich doch in der Praxis innerhalb ziemlich engen Grenzen halten, wenn man Standardkomponenten und gewöhnlichen Messausrüstung benutzen will. Dieses hat u.a. zur Folge, dass man in der Praxis das elektrisches Modell des thermischen Systemes nicht wie ein elektrisches Kabel ausstaltet, sondern es aus Einzelwiderständen und Kondensatoren baut. Hierdurch macht man aber eine Annäherung, die einer Ersetzung der Differentialgleichung durch eine Differenzgleichung entspricht. Das thermische Original wird in Schichten eingeteilt, und je mehrere Schichten, um so besser wird die Annäherung. Die Feinheit der Einteilung wird deshalb von der Genauigkeit, die man wünscht, abhängen. Für die meisten Zwecke wird es genügen, eine Wand in von 2 bis 6 Schichten einzuteilen, abhängig von der Art der Aufgabe. Im Modelle kann jede einzelne Schicht entweder wie ein T-Glied oder wie ein π-Glied aufgebaut werden.

Ein T-Glied (Bild 1) entspricht, dass man sich die Kapazität der ganzen Schicht im Mittelpunkt gesammelt denkt.

Ein π-Glied entspricht, dass man sich die Hälfte der Kapazität der Schicht in jedem Begrenzungsplan der Schicht gesammelt denkt.

Das Potentialverhältnis $f_1 = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta v}$ wird man gewöhnlich so wählen, dass die grösste Temperaturdifferenz, die im thermischen System auftritt, höchstens loo Volt entspricht.

Das Längenverhältnis $\sqrt{f_2} = \frac{\Delta t_e}{\Delta t}$ fällt weg, da jede Schicht einem T-Glied oder einem π-Glied entspricht.

Das Zeitverhältnis $f_3 = \frac{\Delta t_e}{\Delta t}$ hängt davon ab, welches Typ Registrierapparat man für die Ablesung der Messergebnisse benutzen will. Wird ein Kathodenstrahloszillograph verwendet, kann man die Werte für f_3 auf lo oder darüber benutzen, wenn Δt in Stunden und Δt_e in Sekunden gemessen werden. Hierdurch werden 24 Stunden im thermischen Modelle 2,4 Sekunden oder weniger im elektrisches Modelle entsprechen. Werden elektrische Schreibinstrumente mit Registrierpapier gebraucht, kann f_3 z.B. auf 1 gewählt werden, dazu entsprechend, dass eine Stunde im thermischen System einer Sekunde im elektrischen Modelle ist.

Das Kapazitätsverhältnis $f_4 = \frac{K}{C}$ wählt man so gross wie möglich um kleine und damit billige Kondensatoren zu erhalten. Man steht doch in dieser Beziehung nicht ganz frei, da f_4 und f_3 das Widerstandsverhältnis $f_5 = \frac{M}{R} = \frac{f_3}{f_4}$ bestimmen, so dass kleine Kapazitäten grosse Widerstände geben. Widerstände grösser als einige Megohm sollten normal vermieden werden, da der Oberflächennebenschluss beginnen kann sich geltend zu machen. Es wird bemerkt, dass um das Modell zu berechnen ist es nur notwendig, Werte für f_3 und f_4 festzusetzen.

WÄNDE ALS VIERPOLE AUFGEFASST

Unter ~~Bei~~ einem Vierpol, Bild 3, versteht man ein elektrisches Netzwerk an vier Klemmen verbunden, zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen (1). Die Vierpoltheorie handelt sich um den Einfluss, den solch ein Vierpol auf die Übertragung zwischen einem Stromkreis an den Eingangsklemmen verbunden und einem anderen an den Ausgangsklemmen verbunden hat, vorausgesetzt dass es keine Verbindung zwischen den beiden Kreisen ausserhalb dem Vierpol gibt.

Für einen Vierpol aus linearen Impedanzen aufgebaut wird die Abhängigkeit zwischen Strömen und Spannungen bei den beiden Klemmen durch zwei linearen Gleichungen, vier komplexen Konstanten enthaltend, ausgedrückt werden können. Für passive Vierpole, d.h. Vierpole, die keine Energiequellen enthalten, können die Eigenschaften durch drei komplexe Konstanten ausgedrückt werden. Wegen der Analogie zwischen Wärmeströme und elektrische Ströme kann eine Wand ohne weiteres als einen Vierpol aufgefasst werden, der, wenn die Wand nicht Wärmequellen enthält, passiv sein wird.

Für einen Vierpol kann man insgesamt sechs paar lineare Gleichungen mit komplexen Parametern aufstellen, indem man zwei willkürliche der vier Ein- und Ausgangsgrössen als die abhängig veränderliche und die beiden anderen als die unabhängig veränderlichen betrachten kann. Bei Untersuchungen über thermische Verhältnisse von Wänden werden normal nur drei dieser Gleichungssysteme von Interesse sein.

Indem ϑ die Temperaturdifferenzen und h die Wärmeströme angeben, erhält man die folgenden drei Gleichungssysteme, die nach der Dimension des Parameters bezeichnet werden. Index i gibt die Innenseite der Wand und u die Aussenseite der Wand an.

1. Die z-Parameter (die Impedanzparameter)

$$\vartheta_i = z_{11} \, h_i + z_{12} \, h_u$$
$$\vartheta_u = z_{21} \, h_i + z_{22} \, h_u$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \vartheta_i \\ \vartheta_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_i \\ h_u \end{pmatrix}$$

2. Die y-Parameter (die Admittanzparameter)

$$\begin{pmatrix} h_i \\ h_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_i \\ \vartheta_u \end{pmatrix} \qquad (6)$$

3. Die a-Parameter (die Transmissionsparameter)

$$\begin{pmatrix} \vartheta_i \\ h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_u \\ -h_u \end{pmatrix} \qquad (7)$$ NB

Für die passiven Vierpole gilt, dass die Matrizen der aufgeschreibenen Gleichungssysteme symmetrisch sind. Für die Matrizen zu den Transmissionsparametern gehörend gilt weiter, dass der Determinant den Wert 1 hat.

DIE TRANSMISSIONSPARAMETER FÜR EINE WAND

Für eine planparallelle, homogene Wand der Dicke l können die a-Parameter durch Lösung der beiden zusammdngehörigen partiellen Differentialgleichungen, die den Zusammenhang zwischen Temperaturen und Wärmeströmen in der Wand ausdrücken, gefunden werden.

Wird vorausgesetzt, dass der Verlauf der Temperaturen und Wärmeströme sinusförmig mit der Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ist, bekommt der Transmissionsmatrix die Form:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma l & Z \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Man sieht, dass der Matrix symmetrisch ist, und der zugehörige Determinant den Wert 1 hat.

$$\gamma = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \quad \text{ist die Wanderkonstante (die Fortpflanzungskonstante??)} \qquad (9)$$

Der reelle Teil von γ zeigt die Dämpfung und der imaginäre Teil die Phasenverschiebung pro Längeneinheit für eine unendlich dicke Wand an. Hieraus sieht man, dass die Dämpfungskonstante und die Winkelkonstante denselben Wert haben, nämlich $\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$.

$$Z = \frac{M'}{\gamma} = (1 - j) \frac{M'}{2 \sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \qquad (1o)$$

ist die charakteristische Impedanz oder Wellenimpedanz der Wand.

Es wird hieraus ersehen, dass wenn zwei Wände thermisch äquivalent für willkürliche Winkelfrequenzen $\omega \neq 0$ sein sollen, müssen sie die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\gamma_1 l_1 = \gamma_2 l_2 \text{ und } Z_1 = Z_2$$

das damit gleichbedeutend ist, dass

$$\frac{l_1}{\lambda_1} = \frac{l_2}{\lambda_2} \text{ und } l_1 \rho_1 c_1 = l_2 \rho_2 c_2$$

Für Baumaterialien mit Ausnahme von Metallen gilt, dass sie ungefähr dieselbe spezifische Wärme haben, $c \sim$ konstant, und dass die Wärmeleitfähigkeit mit steigendem Raumgewicht steigen will. Dieses verursacht aber, dass zwei Wände, die aus verschiedenen Materialien hergestellt sind, nicht beide Relationen gleichzeitig erfüllen können. In der Praxis gilt also aber, dass zwei homogene Wände ~~nicht~~ mehr thermisch äquivalent sein können, wenn sie ~~nicht~~ identisch gleich sind.

Es wird ersehen, dass diese Regel auch gilt, wenn man bloss verlangen will, dass sie thermisch äquivalent bei einer einzelnen Frequenz sein sollen. Dagegen werden zwei homogene Wände entweder amplitudenäquivalent oder phasenäquivalent bei einer einzelnen Frequenz sein können ohne identisch gleich zu sein.

Da die Konstanten der Wand implizit in den Transmissionsparametern enthalten sind, ist es aber nicht möglich durch die Lösung des Gleichungssystemes (7) eine Wand zu berechnen, die amplitudenäquivalent oder phasenäquivalent mit einer gegebenen Wand ist. Dieses kann nur durch sukzessive Annäherung getan werden, indem man anfänglich die Amplitude oder die Phase für die gegebene Wand bei der betreffenden Frequenz berechnet. Geht die Aufgabe z.B. darauf hinaus, die Dicke der äquivalenten Wand zu bestimmen, wenn das Wandmaterial gegeben ist, berechnet man zunächst die Amplitude oder die Phase bei derselben Frequenz für eine geschätzliche Dicke der Wand. Nach einer grösseren oder minderen Anzahl Um- Umrechnungen, findet man somit die Dicke, die amplituden- oder phasenäquivalent mit der gegebenen Wand ist. Dieses Verfahren wird doch ziemlich zeitraubend sein. Verfügt man aber über eine Analogrechenmaschine, ist es dagegen eine verhältnismässig leichte Sache. Handelt es sich um zusammengesetzte Wände, kann noch grössere Erleichterung durch Verwendung einer Analogrechenmaschine erzielt werden.

ZUSAMMENGESETZTE WÄNDE

Für eine Wand aus planparallellen, homogenen Schichten aufgebaut findet man die Transmissionsmatrize als das Produkt der Transmissionsmatrizen der einzelnen Schichten. Werden diese mit Index 1, 2, ... bezeichnet, hat man

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{1}_{11} & a^{1}_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{2}_{11} & a^{2}_{12} \\ a^{2}_{21} & a^{2}_{22} \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \begin{pmatrix} a^{n}_{11} & a^{n}_{12} \\ a^{n}_{21} & a^{n}_{22} \end{pmatrix}$$

Verfügt man nicht über eine Analogrechenmaschine, führt man die numerischen Berechnungen, da es sich um Rechnung mit komplexen Zahlen handelt, am leichtesten mit den von Rybner ausgearbeiteten Nomogrammen und Tabellen [2] , [3] , aus.

BESTIMMUNG VON ZWEI ÄQUIVALENTEN WÄNDEN

In der Praxis werden die thermischen Einflüsse an einer Wand bei den resultierenden Raumtemperaturen in bezug auf die beiden Oberflächen der Wand und den zugehörigen resultierenden Übergangswiderständen bestimmt sein. Dies führt aber mit sich, dass die äusseren thermischen Einflüsse von den thermischen Eigenschaften der Wand abhängig werden. Zum Beispiel wird es leicht eingesehen, dass der Übergangswiderstand für thermische Konvektion an der Innenseite der Wand von der Oberflächentemperatur der Wand abhängig ist. Zwei verschiedene Wandkonstruktionen haben aber nur dieselben thermischen Eigenschaften den Umgebungen gegenüber, wenn sie thermisch äquivalent sind, so wie es oben erwähnt wurde. Hier werden aber auch Wände, die beinahe thermisch äquivalent sind, betrachtet werden, als hätten sie dieselben thermischen Eigenschaften den Umgebungen gegenüber. Der Fehler, der hierbei bemacht ist, ist kaum von praktischer Bedeutung.

Betrachtet man die Wand in Bild 4, die einen Raum I von einem Raum U trennt, können die folgenden zwei Gleichungen für den Zusammenhang zwischen den resultierenden Raumtemperaturen und den beiden Oberflächentemperaturen der Wand aufgestellt werden:

$$\vartheta_i = \vartheta_I - h_i\, m_i \tag{11}$$

$$\vartheta_u = \vartheta_U \mp h_u\, m_u \tag{12}$$ NB

Die Wärmeströme h_u und h_i sind durch den y-Parametern (zu 10)

$$h_i = y_{11}\, \vartheta_i + y_{12}\, \vartheta_u \tag{13}$$

$$h_u = y_{21}\, \vartheta_i + y_{22}\, \vartheta_u \tag{14}$$

gegeben.

Aus (11) bis (14) findet man

$$\vartheta_i = \frac{(1 + m_u y_{22})\, \vartheta_I - m_i y_{12}\, \vartheta_U}{(1 + m_i y_{11})\,(1 + m_u y_{22}) \mp m_i m_u y_{12} y_{21}}$$ (15) NB

$$\vartheta_u = \frac{\div\, m_u y_{21}\, \vartheta_I + (1 + m_i y_{11})\, \vartheta_U}{(1 + m_i y_{11})\,(1 + m_u y_{22}) \mp m_i m_u y_{12} y_{21}}$$ (16) NB

Die y-Parameter sind durch den a-Parametern

$$y_{11} = \frac{a_{22}}{a_{12}} \qquad y_{12} = \frac{-1}{a_{12}}$$

$$y_{21} = \frac{-1}{a_{12}} \qquad y_{22} = \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

ausgedrückt.

Die numerische Berechnungsarbeit, die notwendig ist, um mittels dieser Formeln eine mit einer gegebenen Wand beinahe Thermish äquivalenten Wand zu bestimmen, ist doch sehr beträchtlich. Nachfolgendes Beispiel wird daher auch beim Gebrauch eines elektrischen Modelles durchgeführt werden.

Beispiel

Gegeben : eine 3o cm hohle Ziegelsteinmauer mit $k = 0,85$ Bild 5

Zu bestimmen: 1. eine widerstandsäquivalente Wand

2. eine amplitudenäquivalente Wand

3. eine phasenäquivalente Wand

die aus Asbestzementplatten mit einer dazwischenliegenden Schicht aus Mineralwolle besteht, Bild 7. Es handelt sich mit anderen Worten darum, die Dicke der Mineralwolle zu bestimmen. Man wünscht die äquivalenten Wände für folgende thermische Einflüsse zu bestimmen

$$\vartheta_I = 0$$

$$\vartheta_U = \sin \omega t$$

und eine Winkelfrequenz einer 24 Stunden Oszillation entsprechend. Weiter mit den Widerstandszahlen $m_i = 0,15$ und $m_u = 0,05$.

Die Aufgabe wird dadurch gelöst, dass zuerst ein thermisches Modell der beiden Wänden berechnet wird, indem eine Wandfläche von 1 m² betrachtet wird. Zunächst wird ein passendes Zeitverhältnis und ein Kapazitätsverhältnis gewählt, worauf das elektrische Modell bestimmt werden kann.

HOHLMAUER

a. thermisches Modell

Die beiden halbstein starken Wangen sind aus schweren Vormauervollziegeln gemauert und stehen unverputzt.

$$\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$$

$$\lambda = 0,76 \frac{\text{kcal}}{\text{m h C}}$$

$$c = 0,22 \frac{\text{kcal}}{\text{C kg}}$$

$$l = 0,11 \text{ m}$$

$$A = 1,00 \text{ m}^2$$

$$M = \frac{0,11}{1 \cdot 0,76} = 0,145 \frac{\text{C h}}{\text{kcal}}$$

$$K = 1 \cdot 1800 \cdot 0,22 \cdot 0,11 = 436 \frac{\text{kcal}}{\text{C}}$$

Das Hohlraum wird mit einem gedachten Isolierungsmaterial gefüllt angenommen.

$$\rho = 0 \text{ kg/m}^3$$

$$\lambda = 0{,}116 \, \frac{\text{kcal}}{\text{m h C}}$$

$$c = 0 \, \frac{\text{kcal}}{\text{C kg}}$$

$$l = 0{,}08 \text{ m}$$

$$A = 1{,}00 \text{ m}^2$$

$$M = \frac{0{,}08}{1 \cdot 0{,}116} = 0{,}69 \, \frac{\text{C h}}{\text{kcal}}$$

Der Transmissionsmatrix ist danach zu

$$\begin{pmatrix} -8{,}982 + j\,7{,}955 & 0{,}265 + j\,1{,}304 \\ -102{,}797 - j\,33{,}473 & -8{,}982 + j\,7{,}955 \end{pmatrix} \quad D: \; I \qquad (18)$$

ausgerechnet.

Das Zeitverhältnis $f_3 = \frac{\Delta t}{\Delta t_e}$ ist so gewählt, dass 24 Stunden im thermischen System 0,01 Sekunden im elektrischen System entspricht, welches hierdurch so schnell wird, dass der Spannungsverlauf mittels eines Kathodenstrahloszillographes aufgezeichnet werden kann.

$$f_3 = \frac{24}{0{,}01} = 2400$$

Die Wange wird in drei Schichten geteilt, welches für den vorliegenden Zweck genügende Genauigkeit gibt. Die Wärmekapazität jeder Schicht wird hierbei $14{,}5 \, \frac{\text{kcal}}{\text{C}}$. Das Kapazitätsverhältnis $f_4 = \frac{K}{C}$ wird so gewählt, dass jede Schicht von einem Kondensator von 0,05 μ F repräsentiert wird.

$$f_4 = \frac{14{,}5}{0{,}05} = 290$$

Hiermit ist das Widerstandsverhältnis $f_5 = \frac{M}{R}$ bestimmt, indem

$$f_5 = \frac{f_3}{f_4} = \frac{290}{2400} = 8{,}3$$

Wenn der Wärmewiderstand einer Ziegelsteinschicht 0,048 ist, wird der entsprechende elektrische Widerstand $\frac{0{,}048}{8{,}3} \sim 0{,}0058$ M Ohm = 5,8 k Ohm.

Das Isolierungsmaterial im Hohlraum wird von einem einzelnen Widerstand der Grösse $\frac{0{,}69}{8{,}3} \sim$ 82 k Ohm repräsentiert.

Der innere Übergangswiderstand wird $\frac{0{,}15}{8{,}3} \sim$ 18 k Ohm

Der äussere Übergangswiderstand wird $\frac{0{,}05}{8{,}3} \sim$ 6,2 k Ohm

Das Modell wird wie in Bild 5 und 6 gezeigt als T-Gliedern gebaut.

ELEMENTENWAND

a. thermisches Modell

Die beiden Asbestzementplatten haben folgende Daten:

$$\rho = 1900 \text{ kg/m}^3$$

$$\lambda = 0{,}50 \frac{\text{kcal}}{\text{m h C}}$$

$$c = 0{,}22 \frac{\text{kcal}}{\text{C kg}}$$

$$l = 0{,}01 \text{ m}$$

$$A = 1{,}00 \text{ m}^2$$

$$M \sim 0$$

$$K = 1 \cdot 1900 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}01 = 4{,}2 \frac{\text{kcal}}{\text{C}}$$

Die Mineralwolleschicht, deren Dicke zu bestimmen ist, hat übrigens folgende Daten:

$$\rho = 50 \text{ kg/m}^3$$

kcal

Der Transmissionsmatrix ist zu

$$\begin{pmatrix} 1{,}000 + j\,27{,}358\,x & 25\,x \\ -29{,}938\,x + j\,2{,}189 & 1 + j\,27{,}358\,x \end{pmatrix} \quad D \sim 1 \qquad (19)$$

ausgerechnet, indem die Wärmekapazität der Mineralwolleschicht ausser Betracht gelassen ist.

b. elektrisches Modell

Berechnung von Amplitudenäquivalenz

Mittels (17), (18) und (19) berechnet man die y-Elemente der beiden Wände, und durch Einsetzung in (15) können ϑ_i^h und ϑ_i^e für die Hohlmauer bzw. die Elementenwand gefunden werden. Für amplitudenäquivalente Wände soll das Amplitudenverhältnis 1 sein.

$$\left| \frac{\vartheta_i^e}{\vartheta_i^h} \right| = \frac{\vartheta_U \; 0{,}0045 \cdot \frac{1}{x}}{\vartheta_U \; 0{,}0428} = 1$$

woraus

$$x = \frac{0{,}0045}{0{,}0428} \sim 0{,}11 \text{ m}$$

indem ϑ_U abgekürzt werden kann.

Die entsprechende Mineralwolledicke ist durch die elektrische Analogie zu 0,13 m gefunden (siehe unten). Die Übereinstimmung zwischen den beiden Methoden ist also, wie es ersehen ist, einigermassen.

tudenkennlinie und teils eine Phasenkennlinie für das Modell der Hohlmauer aufgezeichnet. Die Kennlinien werden auf ein~~zelnes~~fach- logarithmisches Papier, Bild 8, abgesetzt. Als Abszisse benutzt man die Frequenz in hz im logarithmischen Massstab.

Bei der Amplitudenkennlinie wird als Ordinate das Amplitudenverhältnis in dizibel zwischen der Spannung (der Temperatur) an der Innenseite des Modelles ϑ_i und der aufgedruckten Spannung ϑ_u benutzt. Die Ordinate wird folglich als $20 \log \left| \frac{\vartheta_i}{\vartheta_u} \right|$ abgesetzt.

Bei der Phasenkennlinie wird als Ordinate den Phasenunterschied zwischen der aufgedruckten Spannung und der Spannung an der Innenseite des Modelles in Graden benutzt.

Eine Periodenlänge von 24 Stunden im thermischen System entspricht einer Frequenz von 100 hz im elektrischen System.

Für die Elementenwand wird das Amplitudenverhältnis und das Phasenverhältnis in Abhängigkeit der Dicke der Mineralwolleschicht für eine feste Frequenz von 100 hz einer 24 Stunden Oszillation entsprechend bestimmt.

Die Dicke der Mineralwolleschicht, für welche die Elementenwand amplitudenäquivalent bzw. phasenäquivalent mit der Hohlmauer ist, kann nun mittels der aufgezeichneten Kennlinien bestimmt werden.

Die gestellte Aufgabe kann dann wie folgt beantwortet werden:

Die Hohlmauer und die Elementenwand sind:

1. widerstandsäquivalent bei einer Dicke der Mineralwolleschicht von 0,04 m, k = 0,85
2. amplitudenäquivalent bei einer Dicke der Mineralwolleschicht von 0,13 m, k = 0,29
3. phasenäquivalent bei einer sehr grossen Dicke der Mineralwolleschicht, welches natürlich darauf zurückzuführen ist, dass die Mineralwolle beinahe keine Wärmekapazität hat.

Da die amplitudenäquivalente Wand einen k-Wert hat, der erheblich geringer als der der Hohlmauer ist, folgt hieraus, dass der Wärmeverlust im Laufe einer ganzen Periode entsprechend geringer wird.

Bei der vorgenommenen Bestimmung beinahe thermisch äquivalenten Wände sind sinusförmige Temperaturvariationen und feste Werte für die Übergangswiderstände benutzt worden. In Anbetracht dessen, dass eine Wand in der Praxis immer als einen Teil eines Raumes eingehen wird, und der Temperaturverlauf nicht rein sinusförmig sein wird, wird es richtiger sein, die Äquivalenz verschiedener Wände unter Verhältnissen zu bestimmen, die denen im höheren Grade entsprechen. Eine solche Bestimmung wird sehr wohl bei Analogiemethoden ausgeführt werden können, wenn nur der Begriff Amplitude als Höchst- oder Mindestwert ausgelegt wird und Phasenverschiebungen in Verhältnis zu diesen Werten gemessen werden.

Hierfür ist aber eine Analogrechenmaschine von einer recht erheblichen Grösse notwendig, die doch in bezug auf die Modellstromkreise verhältnismässig billig wird, da sie aus passiven Elementen (Widerständen und Kondensatoren) gebaut werden können. Die Ein- und Auslesenapparatur wird aber verhältnismässig kostbar. Das Laboratorium für Wärmeisolierung an der Technische Hochschule, Kopenhagen, hat soeben eine Staatsbewilligung erhalten für das Bauen einer solchen Analogrechenmaschine, die notwendig ist, wenn man Aufgaben der erwähnten Art und überhaupt Aufgaben betreffs instationärer Wärmeströme lösen können soll in einer Weise, die praktischen Verhältnissen nur einigermassen entspricht.

LITERATUR

[1] Pipes, L. A.: Matrix Analysis of Heat Transfer Problems. Journal of the Franklin Institute, 1957.

[2] Rybner, J.: Nomogrammes of complex hyperbolic functions, Copenhagen 1955.

[3] Shirtliffe, C. J. and D. G. Stephensen: Tabulated Values of Special Hyperbolic Functions. Technical Paper no. 114, N.R.C., Canada, Division of Building Research, 1961.

Figurtekster og de i figurerne forekommende ord

Bild 1. T-Glied.

Bild 2. π-Glied.

Bild 3. Vierpol.

Bild 4. Aussenwand.

Bild 5. Hohlmauer.
(Oszillograph, Innere Oberfläche, Generator, Elektrisches Modell, Widerstände I k-Ohm, Kapazitäten I μF, Ziegelsteine, Füllstoff, Thermisches Modell, k = o,85.)

Bild 6. Elektrisches Modell von Hohlmauer.

Bild 7. Elementenwand.
(Oszillograph, Generator, Eternit, Mineralwolle.)

Bild 8. Frequenzkennlinie für Hohlmauer.
(Frequenz, Amplitudenverhältnis, Phasenverschiebung.)

Bild 9. Kennlinie für Elementenwand bei der Frequenz loo hz, einer Oszillation von 24 Stunden entsprechend.
(Mineralwolle, Phasenverschiebung, Amplitudenverhältnis)