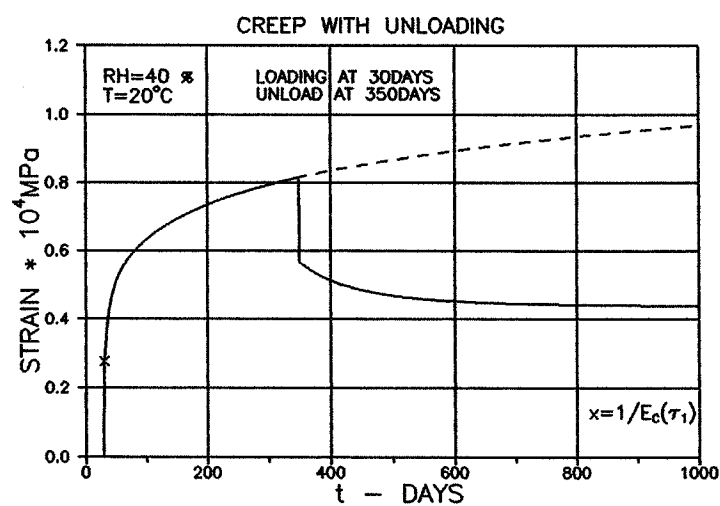


BETONS KRYBNING OG STIVHED

En rationel prediktionsmetode

Lauge Fuglsang Nielsen



Laboratoriet for Bygningsmaterialer
Danmarks tekniske Højskole
Bygning 118
2800 Lyngby

BETONS KRYBNING OG STIVHED

En rationel prediktionsmetode

Lauge Fuglsang Nielsen

Laboratoriet for Bygningmaterialer
Danmarks tekniske Højskole
Bygning 118 – 2800 Lyngby

Abstract: Uden teoretiske udledninger præsenterer rapporten en række resultater, der tidligere er udviklede af forfatteren i området, betons rheologi. Resultaterne koordineres i en metode for computerbestemmelse af krybningsfunktioner og elasticitetsmoduler. Metodens væsentligste uafhængigt variable er vand/cement- og tilslags/cementforhold, temperatur og udtørningsfugtighed samt belastningsalder. Metoden adskiller sig fra andre prediktionsmetoder derved, at den i sit grundlag akcepterer, at krybningsfunktionens afhængighed af belastningstidspunkt er en logisk konsekvens af betonkomponenternes komposit-rheologiske adfærd. Herved skaber metoden den nødvendige konsistens mellem krybningsforudsigelse og normalt anvendte metoder til beregning af betonkonstruktioner. I eksempler belyses alderens indflydelse på betons krybning og stivhed, samt deformation efter aflastning af en konstant last.

Program: Den omtalte metode er grundlaget i et effektivt computer-program, der på Laboratoriet for Bygningmaterialer er udviklet til bestemmelse af betons stivhed og krybning.

Nøgleord: Beton, krybning, stivhed, elasticitetskoefficient, Young's modul, forudsigelse, prediktion.

INDLEDNING

Rapporten omhandler en kompositteoretisk metode, som forfatteren tidligere har udviklet i (1,2,3) til bestemmelse af betons krybning og stivhed. Uden udledninger fremlægges de resultater, der er nødvendige i opstillingen af en algoritme for en effektiv computerbestemmelse af krybningsfunktioner og elasticitetsmoduler. For en detaljeret forklaring af de anvendte symboler og udtryk, samt forståelse af metoden i det hele taget, henvises til original-artiklerne.

Algoritmens (prediktionsmetodens) væsentligste uafhængigt variable er vand/cement- og tilslags/cementforhold (W/C og A/C), temperatur (T) og udtørningsfugtighed (RH) samt belastningsalder. Metoden adskiller sig i to væsentlige forhold fra andre kendte prediktionsmetoder: Den beskriver betoners, specielt de unge betoners, konsolideringsdeformationer – og den akcepterer i sit grundlag, at krybningsfunktionens afhængighed af belastningstidspunkt ikke i sig selv er en materialeegenskab, men en logisk konsekvens af betonkomponenternes komposit-rheologiske adfærd.

Forudsætninger, modenhed og hærdningsgrad

Der forudsættes i rapporten, at de væsentligste klimaændringer er overstået før betonen belastes. Fugtigheden regnes altid tilstrækkelig til, at hydreringen af cementen kan foregå optimalt. Det forudsættes yderligere, at det anvendte tilslag er stivere end cementpastaen, og at der er god sammenhæng mellem disse to faser. Korrektion for svigtende sammenhæng kan udføres som anført i (4). Klimaændringer giver sig hovedsagelig udslag i ændringer i den irreversible del (flow) af krybningsfunktionen. Den relativt beskedne ændring i den elastiske og forsinket elastiske komponent ignoreres i denne rapport.

Betonens hærdningstilstand under varierende temperatur bestemmes som tilstanden af en tilsvarende, men ulige gammel referencebeton ved 20°C. Referencebetonens (ækvivalente) alder er den såkaldte modenhed med hvilken den vigtige tilstandsparameter, hærdningsgraden g kan bestemmes efter udtryk gældende for hærdning ved 20°C. (Hærdningsgraden er mængden af hydrateret cement i forhold til den oprindelige mængde).

Modenhed: Efter (5,6) bestemmes modenheden $\langle t \rangle$ ved følgende udtryk, hvor t , T , $H(T)$ er betonalder, temperatur (°C) henholdsvis temperaturfunktion,

$$\langle t \rangle = \int_0^t H(T) d\tau \quad [H(T) \approx \left(\frac{T + 15}{35} \right)^{2.4} \quad \text{for } 0 < T < 100] \quad (1)$$

Udtrykket for temperaturfunktionen er tilnærmet af denne rapports forfatter efter grafisk angivne værdier i (6) for $-10^\circ\text{C} < T < 95^\circ\text{C}$.

Som et eksempel betragter vi en stepvis varierende temperatur med $T \equiv T_1$ fra $t = 0$ til t_1 , $T \equiv T_2$ fra $t = t_1$ til t_2 , hvorefter $T \equiv T$. For denne temperaturhistorie giver Ligning 1 følgende modenhed

$$\langle t \rangle = \begin{cases} H(T_1)t & (0 < t \leq t_1) \\ H(T_1)t_1 + H(T_2)(t - t_1) & (t_1 < t \leq t_2) \\ H(T_1)t_1 + H(T_2)(t_2 - t_1) + H(T)(t - t_2) & (t_2 < t) \end{cases} \quad (2)$$

Hærdningsgrad: For $W/C > \text{ca. } 0.4$ kan hærdningsgraden, g , skønnes som foreslået i (1,2) og gengivet ved det første udtryk i Ligning 3. Tidskonstanten, t_R , er afhængig af cementtype.

Andre hærdningsudtryk for $W/C > 0.4$ er angivet i litteraturen. Specielt henvises til det i Appendix givne udtryk udviklet af Freiesleben Hansen (e.g. 5,6). For lavere W/C -tal skønner forfatteren at hærdningsgraden udvikler sig som angivet ved det andet udtryk i Ligning 3 med en vægtningsgrad, $q \approx 0.75$.

Minimum hærkning: Det må iagttages, at der efter (7) ikke kan påregnes en effektiv strukturel sammenhæng i betonen for $g < 0.5(W/C)$, hvilket medfører ekstrem stor krybning og invers stivhed.

$$\begin{aligned}
 & W/C > 0.4 \\
 & g = g(t) = G(t) = 1 - 0.5 \left(\frac{t_R}{\langle t \rangle} \right)^{0.2} \quad (g > 0.1) \\
 & W/C \leq 0.4 \\
 & g = g(t) = \begin{cases} G(t) & (G < \frac{q}{0.4} W/C) \\ \frac{W/C}{0.4} \left[q + (1 - q) \frac{G - q*(W/C)/0.4}{1 - q*(W/C)/0.4} \right] & (G > \frac{q}{0.4} W/C) \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

PREDIKTIONSMETODE – ALGORITME

I. INDDATA

Blanding – Cementtype

W/C	Vand/cement (vægt)forhold
A/C	Samlet tilslags/cement (vægt)forhold.
t_R	Tidskonstant for hærkning, $t_R \approx 3$ og 2 døgn for normal- henholdsvis rapid Portland cement (RPC, NPC)

Materialeegenskaber

E_A	Tilslagets Young's modul	($E_A \approx 7.0 \cdot 10^4$ MPa)
K_0	Flowkonstant	($K_0 \approx 5.5 \cdot 10^4$ MPa)
C	Konsolideringstid	($C \approx 7$ døgn)
Q	Konsolideringsexponent	($Q \approx 0.2 - 0.5$)
P	Hastighedsexponent for forsinket elast. tøjning og konsolidering	($Q < P \approx 2 - 4$)

Betonalder (døgn)

t	betonalder
τ	beton alder ved lastpåførsel
t_1, t_2	aldre, hvor temperaturniveauer skifter (jfr. Lign. 2)

Klima

T_1, T_2, T	Temperaturniveauer ($^{\circ}\text{C}$), (jfr. Lign. 2)
RH_M	Relativ fugtighed i betonmidte ved lastpåførsel
RH	Relativ fugtighed i omgivelser fra lastpåførsel

Dimensioner

R	Hydraulisk radius, $R = 2V/S$ (m), hvor V (m^3) og S (m^2) er rumfang henholdsvis overflade af det betragtede betonvolumen
---	--

II. BEARBEJDEDE IND-DATA**Blanding**

$$A_W = \begin{cases} \left(\frac{0.4}{W/C}\right)^{1.3} & (W/C \geq 0.4) \\ 1 & (W/C < 0.4) \end{cases} \quad (4)$$

$$c_A = \begin{cases} \frac{0.38A/C}{W/C + 0.38A/C + 0.32} & (W/C \geq 0.4) \\ \frac{0.38A/C - 0.84W/C + 0.32}{W/C + 0.38A/C + 0.32} & (W/C < 0.4) \end{cases} \quad (5)$$

$$A_A = \frac{1 - c_A}{1 + c_A} \quad (6)$$

Materialekonstanter

$$N = \frac{E_A [MPa]}{3.2 \cdot 10^4} \quad (\text{Stivhedstal}) \quad (7)$$

$$\alpha_C = 1 - c_A \quad (\text{Elasticitetsfaktor, forsinket elasticitet}) \quad (8)$$

$$K = K_o \frac{A_W}{f_K A_A} \text{ MPa} \quad (\text{Flow-modul}) \quad (9)$$

$$f_K = \left(\frac{T + 15}{35} \right)^{1.5} \left(RH_M + 5 \frac{ABS(RH_M - RH)}{1 + 2R} \right) \quad (10)$$

Modenhed og hærdningsgrad

Modenheder og hærdningsgrad bestemmes ved udtrykkene 1-3.

III. UD-DATA – RESULTATER**Dynamisk Young's modul**

$$E_{DYN}(\tau) = 3.2 \cdot 10^4 (g A_W) \frac{A_A (g A_W) + N}{(g A_W) + N A_A} \text{ MPa} \quad (g = g(\tau)) \quad (11)$$

Beregningsmæssig (statisk) Young's modul

$$E_C(\tau) = E_{DYN}(\tau) * (g A_w)^{0.2 c_A} \text{ MPa} \quad (g = g(\tau)) \quad (12)$$

Krybningsfunktion

$$c(t, \tau) = \frac{1}{E_C(\tau)} \left[1 + \alpha_C \left(1 - \left(\frac{\langle \tau \rangle}{\langle t \rangle} \right)^P \right) \right] + \frac{1}{K} \left[\ln \left(\frac{\langle t \rangle}{\langle \tau \rangle} \right) + \left(\frac{C}{\langle \tau \rangle} \right)^Q \left(1 - \left(\frac{\langle \tau \rangle}{\langle t \rangle} \right)^P \right) \right] / \text{MPa} \quad (13)$$

Bemærkninger: De anførte værdier for parametrene K_0 , Q , P og C er af samme størrelsesorden som de, der er afledt i (1) på grundlag af resultater fra krybningsforsøg rapporterede i (8). Belastningsaldrene var $\tau = 7, 28, 90, 365$ og 730 døgn. Betonen var udført med "normal cement", "hard aggregates" og $(W/C, A/C) = (0.49, 4.8)$ med lagring og afprøvning i vand ved $T \approx 20^\circ \text{C}$.

Udtrykket 13 er en lettere simplificeret udgave af originaludtrykket i (1,2), der, jævnfør nærværende rapports Appendix, tilgodeser, at krybning af tidligere belastet beton ikke er ganske lig krybning af førstegangsbetonet (virgin) beton. Normalt er den indførte simplificering fuldt forsvarlig.

ANVENDELSER

Den beskrevne algoritme er grundlaget i et computer-program udviklet af forfatteren til prediktion af betons krybning og stivhed (LBM Special-rapport). Programmet er i dette afsnit anvendt til belysning af nogle krybnings- og stivhedsforhold for en beton anvendt i en bjælke med tværsnit, $0.3 \times 0.6 \text{ m}^2$. Oplysninger vedrørende blandingsforhold, materialegenskaber og hydraulisk radius er sammenfattede i nedenstående tabel. Temperaturen regnes konstant $T = 20^\circ \text{C}$. Yderligere antages det, at bjælkets tværsnittet er tilstrækkeligt stort til at fastholde en høj fugttilstand i dets midte, d.v.s. $RH_M \approx 1$.

Blanding:	W/C og A/C = 0.5 henholdsvis 5.0
NPCement:	$t_R = 3$ døgn
Materialegenskaber:	E_A og $K_0 = 7.0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ hhv $5.5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ C, Q og $P = 7$ døgn, 0.25 hhv 4.0
Hydraulisk radius:	$R = 0.2 \text{ m}$

Eksempel 1: Betonen er konstant våd. Bestem betonens stivhedsudvikling samt krybningsfunktionerne svarende til belastningstidspunkterne $\tau = 7, 30$ og 120 døgn. Prediktionen foretages med tabellens angivelser samt $T = 20^\circ\text{C}$ og $RH_M = RH = 1$ (i Ligning 10). Resultaterne er afbildet i Figurerne 1 og 2.

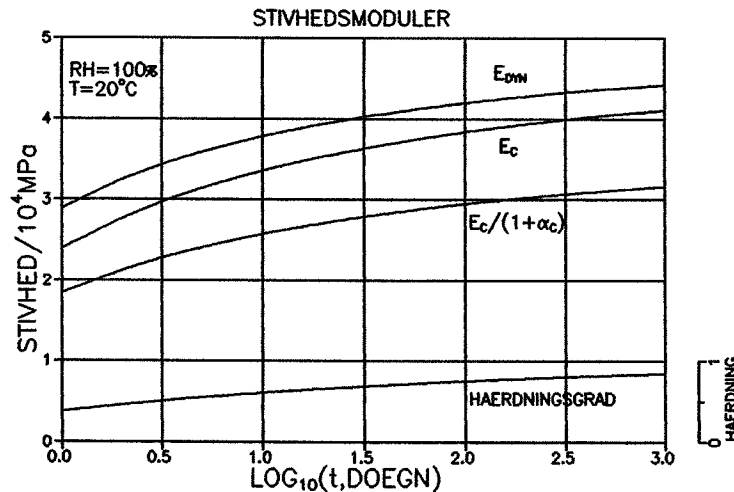


Figure 1 – Eksempel 1: Dyn. E-modul: E_{dyn} . Stat. E-modul: E_c . Modul for spontan + forsinket elastisk deformation, $E_c/(1 + \alpha_c)$. Hærtningsgraden er g.

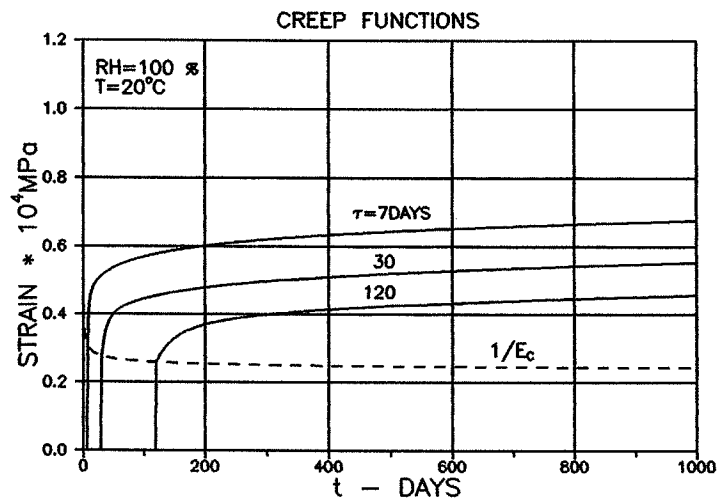


Figure 2 – Eksempel 1: Våd beton. Krybningsfunktionens afhængighed af belastningsalder. Den stiplede linie angiver den beregningsmæssige ($\approx$ statiske) elastiske komponent.

Eksempel 2: Fra en alder af 6 døgn udtørres betonen i en relativ fugtighed på 60 %. Bestem betonens krybningsfunktioner svarende til de samme belastningstidspunkter som i eksempel 1. Prediktionen foretages med tabellens angivelser samt $T = 20^\circ\text{C}$, $RH_M = 1$ og $RH = 0.6$ (i Ligning 10). Resultaterne er afbildet i Figurerne 3 og 4.

Eksempel 3: Fra en alder af 6 døgn udtørres betonen i en relativ fugtighed på 40 %. Bestem betonens krybning med aflastning. Belastningstidspunkt og

aflastningstidspunkt er 30 henholdsvis 350 døgn. Prediktionen foretages med tabellens angivelser samt $T = 20^{\circ}\text{C}$, $RH_M = 1.0$ og $RH = 0.4$ (i Ligning 10). Resultaterne er afbildet i Figur 5.

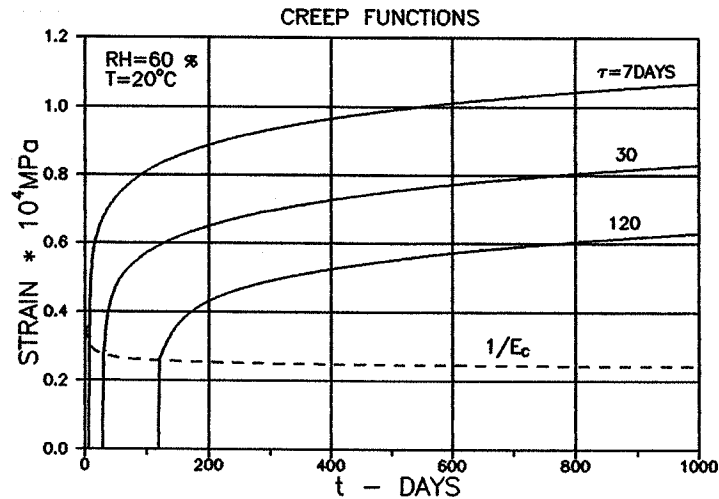


Figure 3 - Eksempel 2: Udtørrende beton. Krybningsfunktionens afhængighed af belastningsalder. Den stiplede linie angiver den beregningsmæssige ($\approx$ statiske) elastiske komponent.

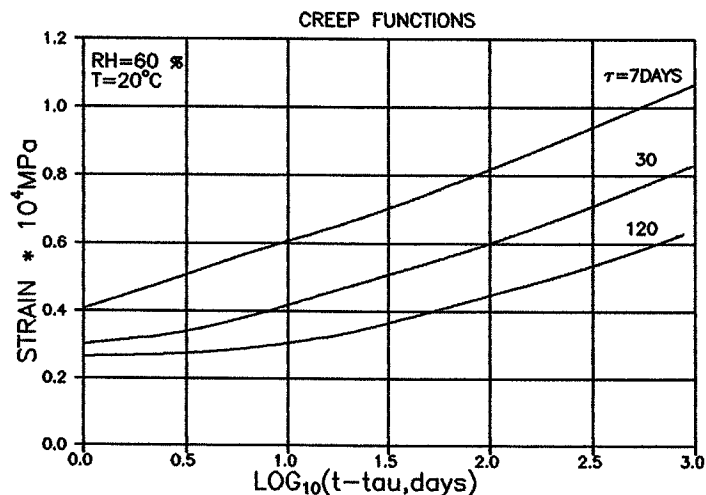


Figure 4 - Eksempel 2: Udtørrende beton. Krybningsfunktionens afhængighed af belastningsalder. Samme data som i Figur 3.

SLUTBEMÆRKNINGER

Vi genkalder fra indledningen, at den præsenterede prediktionsmetode i sit grundlag akcepterer, at krybningsfunktionens (og stivhedens) afhængighed af belastningstidspunkt ikke i sig selv er en materialeegenskab, men en logisk konsekvens af betonkomponenternes komposit-rheologiske adfærd. Erkendelsen af dette forhold (der er overset i andre eksisterende prediktionsmetoder) betyder, at der er konsistens mellem krybningsforudsigelse

og viskoelastiske beregningsmetoder, som de for eksempel er udviklede af forfatteren i (e.g. 9,10,11).

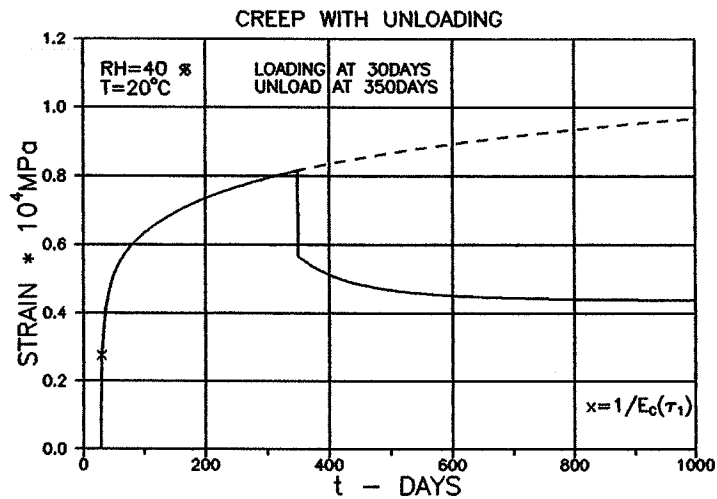


Figure 5 - Eksempel 3: Udtørrende beton. Krybningsfunktion svarende til $t = \tau_1$ med aflastning ved $t = \tau_2$. Tøjning = $c(t, \tau_1) - c(t, \tau_2)$.

I hele sin opbygning er prediktionsmetoden ny. Parametrene (K_0 , C , Q og P) er bestemt på grundlag af resultater fra eksisterende krybningsundersøgelser, der i overvejende grad har været designet for empirisk-fænomenologisk krybningsansættelse. Nogen parameterjustering kan komme på tale efterhånden som flere resultater "indløber" fra forsøg, der i deres grundlag akcepterer krybning i beton som et resultat af viskoelastiske kompositmaterialers mekaniske adfærd.

Appendix - Andre udtryk

Hærdningsgrad: Følgende udtryk for hærdningsgraden, g , følger umiddelbart af Freiesleben Hansens arbejder (e.g. 5,6) vedrørende betons hærdning. Modenhed, den karakteristiske tidskonstant og den dimensionsløse krumningsparameter er betegnet ved M , t_E henholdsvis α .

$$g(t) = \exp \left[- \left(\frac{t_E}{M} \right)^\alpha \right] \quad (A1)$$

Krybning: Forfatteren har ved tidligere lejlighed (e.g. 9,10) påpeget, at krybning af forbelastet beton ikke er ganske lig krybning af førstegangsbelastet (virgin) beton. Dette fænomen er tilgodeset i nedenstående krybningsfunktion (A2) udviklet i (1,2). Betonalderen ved førstegangsbelastning er betegnet ved t_0 . (Betydningen af de øvrige symboler er som forklaret i hovedteksten). Forskellen mellem de to krybningsansættelser er

ringe i forhold til de tøjningsusikkerheder, der introduceres i normal designpraksis ved ansættelse for eksempel af last, materialeegenskaber og klima. Så med mindre specielle præcisionsfremmende designforanstaltninger er indført, er det fuldt forsvarligt at ignorere det omtalte krybningsfænomen – hvilket gøres ved at sætte $t_0 = \tau$ i Ligning A2. Herved fremkommer hovedtekstens Ligning 13.

Krybningsfunktion

$$c(t, t_0, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} \left[1 + \alpha_c \left(1 - \left(\frac{\langle \tau \rangle}{\langle t \rangle} \right)^P \right) \right] + \frac{1}{K} \left[\ln \left(\frac{\langle t \rangle}{\langle \tau \rangle} \right) + \left(\frac{C}{\langle t_0 \rangle} \right)^Q \left(\frac{\langle t_0 \rangle}{\langle \tau \rangle} \right)^P \left(1 - \left(\frac{\langle \tau \rangle}{\langle t \rangle} \right)^P \right) \right] / \text{MPa} \quad (\text{A2})$$

Literatur

1. Nielsen, L. Fuglsang: "On prediction of rheological parameters for concrete", *DIALOG 1-80(1980)*, Danmarks Ingeniørakademi, Bygningsafdelingen, pp. 81-118.
2. – "On the prediction of creep functions for concrete", pp. 279-289 in *"Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete"* (ed. F.H. Wittmann), Martinus Nijhoff Publishers, The Hague 1982.
3. – *"Creep functions predicted for concretes used in the Olympic Tower, Montreal, Quebec"*. Tech. rep. 91(1980), Build. Mat. Lab., Tech. Univ. Denmark.
4. – "On the Effect of Defective Phase Contact on the Mechanical Behavior of Particulate Composites like Concrete", *Cement and Concrete Research*, 12(1982), 685.
5. Hansen, P. Freiesleben: *"Hærdeteknologi-1, Portland cement"* og *"Hærdeteknologi-2, Dekrementmetoden"*, Bkf-centralen, 1978.
6. Hansen, P. Freiesleben og Pedersen, E.J.: *"Vinterstøbning af beton"*, Statens Byggeforskningsinstitut, SBI-anvisning 125(1982).
7. Powers, T.C. and T.L. Brownnyard: Studies of the physical Properties of hardened Cement Paste". *ACI Journ., Proc.* 41(1946-47), 101, 249, 469, 549, 669, 845, 865, 933, 971. (Chicago, Portland Cement Association, Research Dept. Bulletin 22(1948)).
8. L'Hermite, R.L., Mamillan, M., og Lefevre, C.: "New Results on the strain and failure of concrete", *Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics*, 80(1965), 325.
9. Nielsen, L. Fuglsang: "Kriechen und Relaxation des Betons", *Beton- und Stahlbetonbau*, 65(1970), 272.

10. - "On the Applicability of Modified Dischinger Equations", Cement and Concrete Research, 7(1977), 149.
11. - "The Improved Dischinger Method as Related to Other Methods and Practical Applicability", Symp. on Design for Creep and Shrinkage in Concrete Structures, Houston, Texas, USA 1978. Proc., ACI Special Publication SP-76(1982), 169 - 191.