

GOODIER'S KUGLE

OG GENERALISERING TIL MANGE KUGLER

Lauge Fuglsang Nielsen
Laboratoriet for Bygningsmaterialer
Danmarks tekniske Højskole
Bygning 118
DK-2800 Lyngby, Danmark



THE TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING
BUILDING MATERIALS LABORATORY

GOODIER's KUGLE

og generalisering til flere kugler

Lauge Fuglsang Nielsen

ABSTRACT:

Goodier (1) har behandlet spændingsproblemet omkring og i en kugle placeret i en uendelig stor matrix, der langt borte er belastet med jævnt fordelt spænding.

På grundlag af Goodier's arbejde er de eksplicitte spændingsudtryk udviklet i (2) under forudsætning af, at de i problemet indgående Poisson-tal er $1/5$.

Der er i (2) endvidere udviklet tilnærmede spændingsudtryk for det generaliserede problem: En matrix med mange kugler.

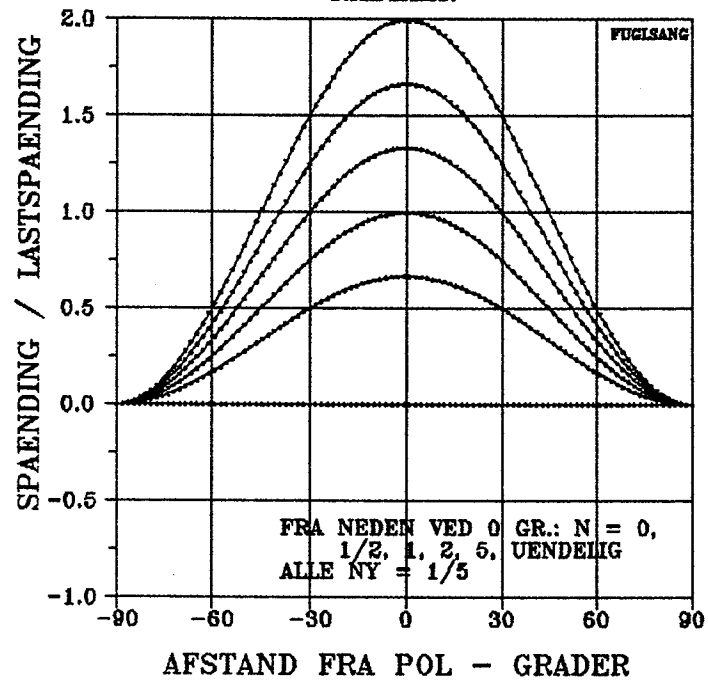
De nævnte eksplicitte spændingsudtryk er afbildet grafisk i nærværende notat. De tilhørende ligninger er angivet bagest i notatet sammen med en skitse vedrørende den anvendte terminologi med hensyn til spændinger og retninger.

Ligningerne er kopierede direkte fra (2) sammen med de tilsvarende udtryk for det generaliserede kugleproblem.

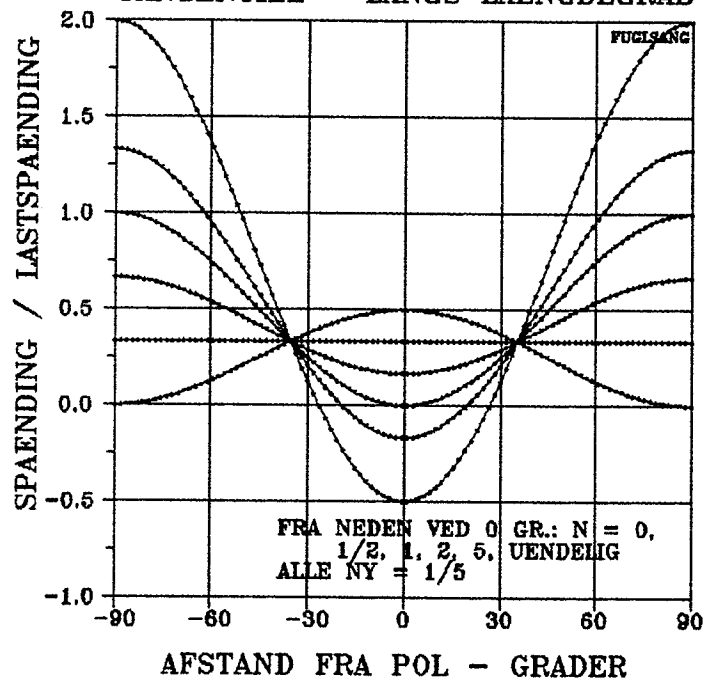
-
- 1) Goodier, J.N.: J. Appl. Mech., Trans. ASME 55APM(1933), p. 39.
 - 2) Nielsen, L. Fuglsang: "Lidt om Kompositmaterialer". Forelæsningsnotat, Tekn. Rapport 66(1979), Laboratoriet for Bygningsmaterialer, Dth.

GOODIER'S KUGLE
MATRIX-SPÆNDINGER

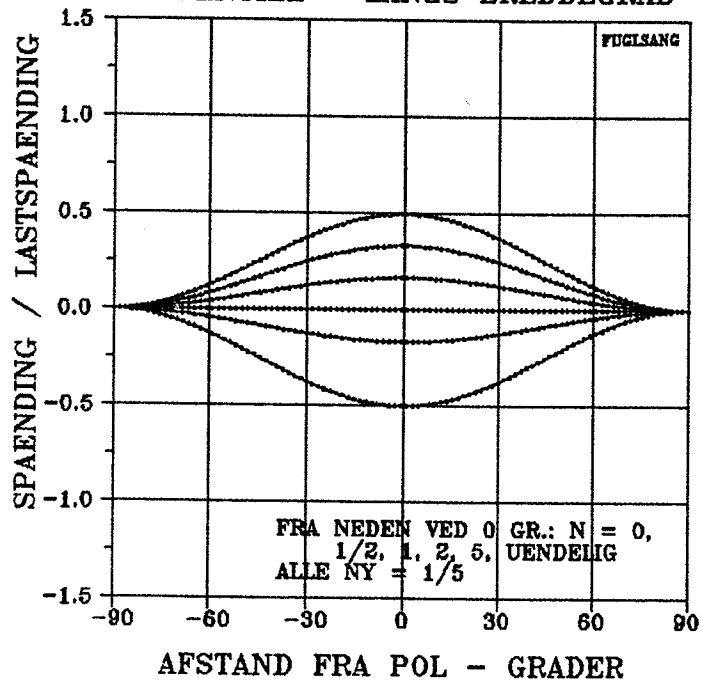
GOODIER'S KUGLE: MATRIXSPAENDING
RADIAER



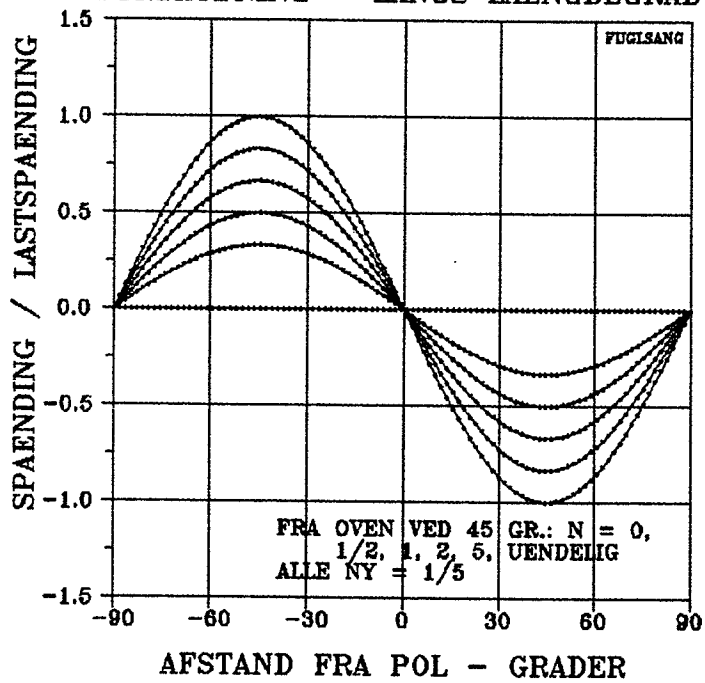
GOODIER'S KUGLE: MATRIXSPAENDING
TANGENTIEL - LANGS LAENGDEGRAD



GOODIER'S KUGLE: MATRIXSPAENDING
TANGENTIEL - LANGS BREDDEGRAD



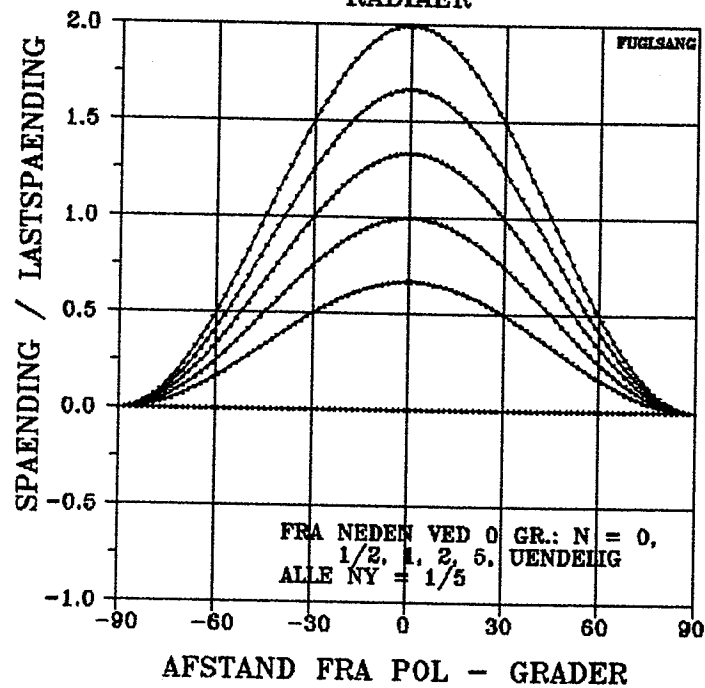
GOODIER'S KUGLE: MATRIXSPAENDING
FORSKYDNING - LANGS LAENGDEGRAD



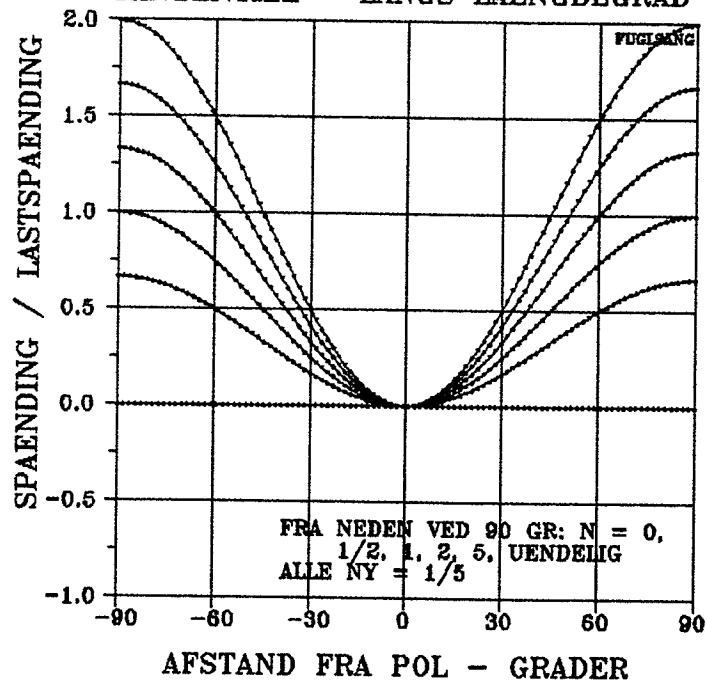
GOODIER'S KUGLE

KUGLE-SPÆNDINGER

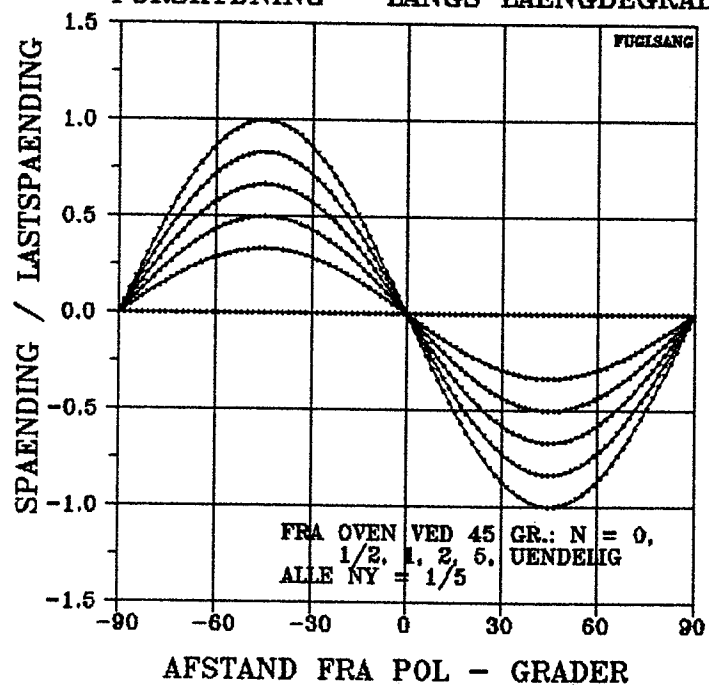
GOODIER'S KUGLE: KUGLESPAENDING
RADIAER



GOODIER'S KUGLE: KUGLESPAENDING
TANGENTIEL - LANGS LAENGDEGRAD



GOODIER'S KUGLE: KUGLESPAENDING
FORSKYDNING - LANGS LAENGDEGRAD



SPÆNDINGSUDTRYK
for
GOODIER'S KUGLEMODEL
og
DEN GENERALISEREDE KUGLEMODEL

På grundlag af Goodier's teori (19) for en enkelt kugle i en uendelig matrix, påvirket i det fjerne af den eenaksede spænding, T, kan følgende spændinger udledes. Alle Poissontal er sat til .2.

Matrixspændinger lige ved kuglen:

$$\sigma_r^m = T(1+\cos 2\theta) \frac{n}{n+1} \quad (28)$$

$$\sigma_\theta^m = T \frac{3+n+(n-5)\cos 2\theta}{4} \frac{n}{n+1} \quad (29)$$

$$\sigma_\psi^m = T \frac{1}{4} (1+\cos 2\theta) \frac{n-1}{n+1} \quad (30)$$

$$\tau^m = -T \sin 2\theta \frac{n}{n+1} \quad (\text{andre } \tau = 0) \quad (31)$$

Samtidigt er selve kuglens spændinger givet ved,

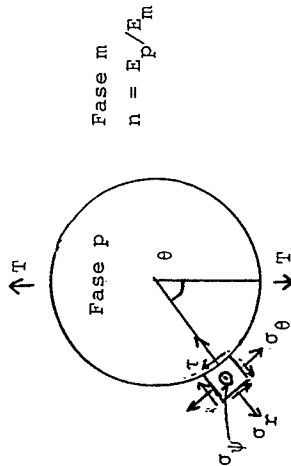
$$\sigma_r^p = T(1+\cos 2\theta) \frac{n}{n+1} \quad (32)$$

$$\sigma_\theta^p = T(1-\cos 2\theta) \frac{n}{n+1} \quad (33)$$

$$\sigma_\psi^p = 0 \quad (34)$$

$$\tau^p = -T \frac{n}{n+1} \sin 2\theta \quad (\text{andre } \tau = 0) \quad (35)$$

Disse spændinger gælder for hele partiklen, uafhængig af koordinat r.



Figur 21.

For en kugle i et kornarmeret materiale fås et tilnærmet udtryk for de spændinger, der går ind i partiklen (σ_r og τ) ved at erstatte n med E_p/E^+ , se (20). Dvs. vi betragter matrixen som selve kompositmaterialet, for hvilket Youngmodulen E^+ kendes fra tidligere givne udtryk. Vi får.

$$\sigma_r = T(1+\cos 2\theta) \frac{1}{1+E^+/E_p} \quad (36)$$

$$\tau = -T \sin 2\theta \frac{1}{1+E^+/E_p} \quad (37)$$

Jævnfør (20) kan tilnærmelse forbedres ved multiplikation med

$$f = \frac{1+E^+/E_p}{1+c_p} \frac{n}{A+n} ; \quad A = \frac{1-c_p}{1+c_p} \quad (38)$$

Herved fås ligningerne 43, 46, 39 og 42. Det forekommer sandsynligt, at de andre spændinger kan forbedres i samme forhold.

D.v.s. ved multiplikation af lign. 29, 30, 33 og 34 med lign. 43/ lign. 32 = $(n+1)/(1+c_p)/(A+n)$. Herefter bliver for det enkelte korn i kompositmaterialet:

$$\sigma_r^m = T(1+\cos 2\theta) \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (39)$$

$$\sigma_\theta^m = T \frac{3+n+(n-5)\cos 2\theta}{4} \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (40)$$

$$\sigma_\psi^m = T \frac{1}{4} (1+\cos 2\theta) \frac{n-1}{(1+c_p)(A+n)} \quad (41)$$

$$\tau^m = -T \sin 2\theta \cdot \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (42)$$

$$\sigma_r^p = T(1+\cos 2\theta) \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (43)$$

$$\sigma_\theta^p = T(1-\cos 2\theta) \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (44)$$

$$\sigma_\psi^p = 0 \quad (45)$$

$$\tau^p = -T \cdot \sin 2\theta \cdot \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (46)$$

Som før gælder partikelspændingerne uanset koordinat r. Ved en flerakset påvirkning af kompositmaterialet med σ_{ij}^x er fa- sernes gennemsnitlige spændinger efter (20) bestemt tilnærmet ved

$$\sigma_{ij}^p = \frac{2}{1+c_p} \frac{n}{A+n} \sigma_{ij}^+ ; \quad \sigma_{ij}^m = \frac{1}{1+c_p} \frac{1+n}{A+n} \sigma_{ij}^+ \quad (47)$$