

SAMMENLIGNING AF SIMPEL MODEL FOR FUGTTRANSPORT  
OG FUGTTRANSPORT BESKREVET VED LINEÆR DIFFUSIONSTEORI

Morten Hjorslev Hansen  
Kurt Kielsgaard Hansen



---

THE TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK  
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING  
BUILDING MATERIALS LABORATORY

## FORORD

Ved Laboratoriet for Bygningsmaterialer indgår emnet fugtbinding og fugtvandring i bygningsmaterialer i det langsigtede forskningsprogram.

Den foreliggende rapport beskriver en sammenligning af en simpel model for vandindholdet i en træmast under udtørring med en sædvanlig diffusionsmodel. Den simple model er opstillet af Lauge Fuglsang Nielsen i forbindelse med en brudmekanisk undersøgelse, mens diffusionsmodellen, der er en numerisk model, er beskrevet i /4/.

Arbejdet er udført som led i FTU-projektet "Fugt i byggematerialer" (j.nr. 5.17.3.6.13), som udføres ved Laboratoriet for Bygningsmaterialer i perioden 1987-89.

Anders Nielsen

Projektleder

## INDHOLDSFORTEGNELSE

|          |                                                                   |    |
|----------|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1.       | SAMMENFATNING .....                                               | 4  |
| 2.       | DE TO MODELLER .....                                              | 4  |
| 2.1      | Simpel model for vandindhold i træmast .....                      | 4  |
| 2.2      | Fugttransport beskrevet ved diffusion .....                       | 6  |
| 2.3      | Numerisk løsning af diffusionsligningen .....                     | 8  |
| 3.       | SAMMENLIGNING AF SIMPEL MODEL OG DIFFUSIONSMODEL ..               | 8  |
| 3.1      | Analyse af uddata fra CYLDIF .....                                | 9  |
| 4.       | KONKLUSION .....                                                  | 14 |
| 5.       | LITTERATURFORTEGNELSE .....                                       | 16 |
| Bilag 1. | Analytisk løsning til diffusionsligning fra CRANK /3/             |    |
| Bilag 2. | Konvertering af analytisk løsning fra CRANK til det givne problem |    |

## 1. SAMMENFATNING

Udtørring af træ forårsager svindrevner. Erfaringen viser, at jo hurtigere træet udtørres, desto flere svindrevner vil der alt andet lige opstå.

Nielsen har i /1/ og /2/ vist, hvordan man analytisk kan bestemme en udtørningshastighed, der er optimal med hensyn til den forbrugte tid og den ønskede kvalitet af det udtørrede træ.

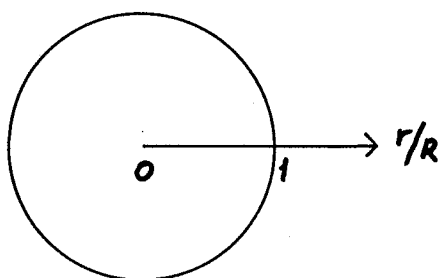
I /1/ og /2/ er der anvendt en simpel model for vandindholdet i en træmast under udtørring som funktion af tiden. Denne rapport foretager en sammenligning af denne simple model med en sædvanlig diffusionsmodel.

## 2. DE TO MODELLER

### 2.1 Simpel model for vandindhold i træmast

I dette afsnit beskrives den model for vandindholdet i en træmast, som Nielsen benytter i /1/ og /2/.

Træmasten betragtes som en cylinder. Der regnes kun med fugttransport i træmastens radiære retning. Vandindholdet i træmasten beskrives som en funktion af tiden  $t$  og en dimensionsløs radius  $r/R$  (se figur 1).



Figur 1. Dimensionsløs radius.

Vandindholdet i træmasten antages at være mindre end eller lig med vandindholdet ved fibermætningspunktet. Til tiden  $t \leq 0$  er vandindholdet overalt i træmasten

$$u(r,t) = u_i \quad (2.1)$$

Til tiden  $t = \infty$  er vandindholdet overalt i træmasten

$$u(r,t) = u_{\infty} \quad (2.2)$$

Det antages, at vandindholdet i træmastens overflade  $u_o$  kan beskrives ved udtrykket

$$u_o = u_i - D(1 - e^{-t/\alpha_o}) \quad (2.3)$$

hvor

$$D = u_i - u_{\infty} \quad (\text{vægt \%})$$

$$\alpha_o = \text{udtørringshastighed i overfladen} \quad (s)$$

Tilsvarende antages det, at vandindholdet i træmastens centrum  $u_c$  kan beskrives som

$$u_c = u_i - D(1 - e^{-t/\alpha_c}) \quad (2.4)$$

hvor

$$\alpha_c = \text{udtørringshastighed i centrum} \quad (s)$$

Det bemærkes, at der må gælde

$$\alpha_c > \alpha_o \quad (2.5)$$

Da vi indtil nu kun har udtryk for vandindholdet i træmastens centrum og overflade, mangler vi et udtryk for fugtprofilet imellem disse punkter. Nielsen antager, at fugtprofilet kan beskrives ved en n'te grads parabel af formen

$$u(r,t) = u_c - (u_c - u_o)(r/R)^n \quad (2.6)$$

hvor  $n$  er en konstant.

## 2.2 Fugttransport beskrevet ved diffusion

Diffusion af vanddamp i porøse bygningsmaterialer kan under isoterme forhold beskrives ved Ficks 1. lov som

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.7)$$

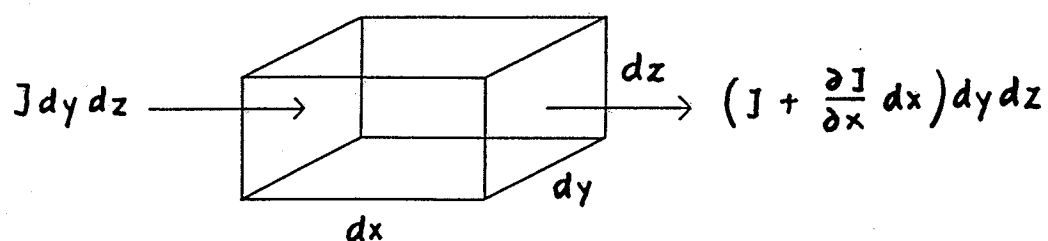
hvor

$J$  = den transporterede fugtmængde ( $\text{kg/s} \cdot \text{m}^2$ )

$D$  = diffusivitet ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

$c$  = vanddampindhold ( $\text{kg/m}^3$ )

$x$  = stedkoordinat (m)



Figur 2. Kontrolvolumen.

Opstilles kontinuitetsligningen for det infinitesimale kontrolvolumen i figur 2, fås

$$\text{fraført} - \text{tilført} + \text{oplagret} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(J + \frac{\partial J}{\partial x} dx) dy dz - J dy dz + \frac{\partial c}{\partial t} dx dy dz = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial c}{\partial t} dx dy dz = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -D \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Regnes diffusiviteten for uafhængig af  $c$  og  $x$ , fås den lineære diffusionsligning

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

Omskrives ligning 2.9 til cylinderkoordinater, og anvendes vandindholdet  $u$  som potentiale, fås

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (2.10)$$

der er en velegnet form til undersøgelse af fugtdiffusion i en cylinderformet træmast.

Ligning 2.10 kan kun løses under specielle rand- og begyndelsesbetingelser. Er randbetingelserne (som i formel 2.2 og 2.3)

$$u(r, \infty) = u_{\infty} \quad (2.11)$$

$$u(R, t) = u_i - (u_i - u_{\infty})(1 - e^{-t/\alpha_0}) \quad (2.12)$$

og begyndelsesbetingelsen (som i formel 2.1)

$$u(r, 0) = u_i \quad (2.13)$$

fås jvf. Crank /3/ (og bilag 2) løsningen

$$u(r, t) = u_i - (u_i - u_{\infty}) f(r, t) \quad (2.14)$$

med

$$f(r, t) = 1 - \frac{J_0\{(r^2/(\alpha_0 D))^{1/2}\}}{J_0\{(R^2/(\alpha_0 D))^{1/2}\}} \exp(-t/\alpha_0) +$$

$$\frac{2}{D\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0((r/R)\beta_n) \cdot \exp(-D(\beta_n/R)^2 t)}{\beta_n J_1(\beta_n) ((\beta_n/R)^2 - 1/(D\alpha_0))}$$

hvor

$J_0$  = Besselfunktionen af 0. orden, 1. art

$J_1$  = Besselfunktionen af 1. orden, 1. art

$\beta_n$  = den n'te rod af  $J_0$ , altså  $\beta_n$  givet ved  $J_0(\beta_n) = 0$

### 2.3 Numerisk løsning af diffusionsligningen

Den givne analytiske løsning 2.14 til diffusionsligningen 2.10 med rand- og begyndelsesbetingelserne 2.11-2.13 er numerisk set vanskelig at håndtere. Det er derfor valgt at løse diffusionsligningen numerisk ved brug af endelige differencers metode. Den numeriske løsningsmetode er implementeret i EDB-programmet CYLDIF, som er beskrevet i rapporten /4/.

### 3. SAMMENLIGNING AF SIMPEL MODEL OG DIFFUSIONSMODEL

Der er af tidsmæssige årsager kun foretaget 1 kørsel med programmet CYLDIF. Der er taget udgangspunkt i et eksempel, hvor en træmast udtørres fra et begyndelsesvandindhold  $u_i$  på

$$u_i = 30\% \quad (3.1)$$

til et slutvandindhold  $u_\infty$  på

$$u_\infty = 10\% \quad (3.2)$$

Vandindholdet i træmastens overflade  $u_o$  er givet ved funktionen (2.3)

$$u_o(t) = u_i - (u_i - u_\infty)(1 - e^{-t/\alpha_o}) \quad (3.3)$$

hvor udtørringshastigheden i overfladen  $\alpha_o$  er sat til

$$\alpha_o = 3,456 \cdot 10^6 \text{ s} = 40 \text{ dg.} \quad (3.4)$$

Træets diffusivitet  $D$  er sat til

$$D = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.5)$$

For beregningerne i CYLDIF er der anvendt et tidsskridt  $\Delta t$  på

$$\Delta t = 20000 \text{ s} \approx 5,5 \text{ h} \quad (3.6)$$

For hvert tidsskridt er træmastens vandindhold beregnet i 10 punkter i træmastens radius, nemlig

$$(r/R) = 0, 1/10, 2/10, 3/10, \dots, 8/10, 9/10 \quad (3.7)$$

Endvidere er  $n$  i udtrykket 2.6 beregnet ud fra vandindholdet i de tre punkter givet ved

$$r/R = 0, \frac{1}{2}, 1 \quad (3.8)$$

$n$  er da givet ved udtrykket

$$u(r,t) = u_c - (u_c - u_o)(r/R)^n \quad (3.9)$$

som for  $r/R = \frac{1}{2}$  og  $r = \frac{1}{2}$  bliver

$$n = \log_e((u_c - u(\frac{1}{2},t))/(u_c - u_o))/\log_e(\frac{1}{2}) \quad (3.10)$$

Udtørningshastigheden i træmastens centrum  $\alpha_c$  beregnes i hvert tidsskridt ud fra udtrykket 2.4 som

$$\alpha_c = (-t)/(\log_e(1 - (u_1 - u_c)/(u_1 - u_\infty))) \quad (3.11)$$

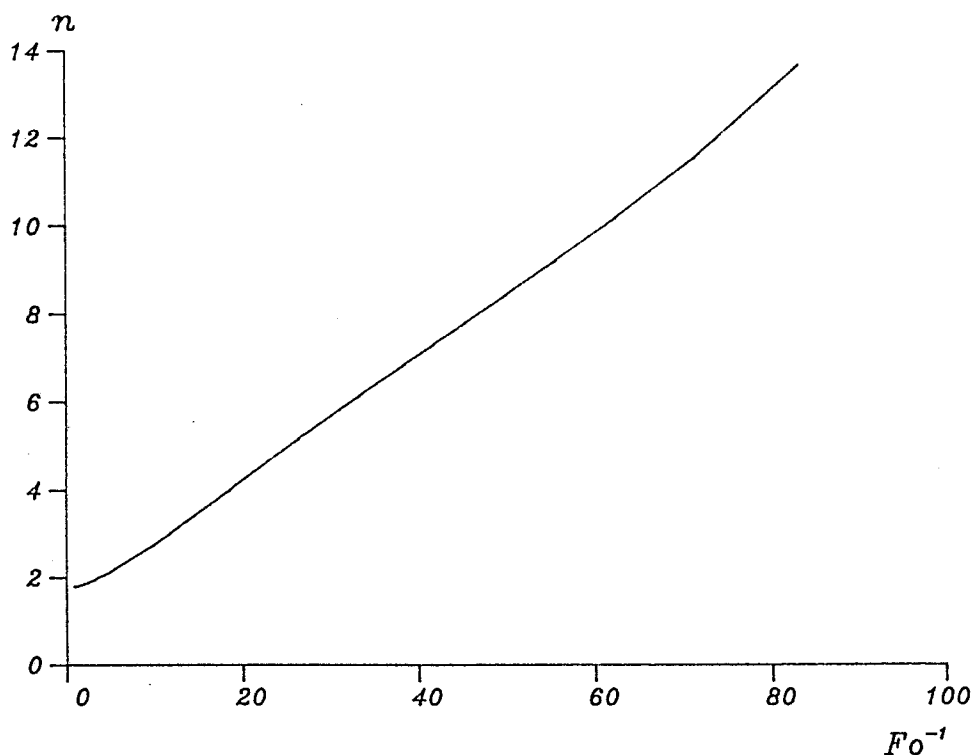
Endelig beregnes Fouriertallet i hvert tidsskridt som

$$Fo = Dt/R^2 \quad (3.12)$$

### 3.1 Analyse af uddata fra CYLDIF

EkspONENTEN  $n$  i udtrykket 2.6 som funktion af det reciproke Fouriertal er optegnet i figur 3. Det ses, at der er tale om en næsten ret linie. Der er derfor anvendt lineær regression på en model af formen

$$n = aFo^{-1} + b \quad (3.13)$$



Figur 3. Eksponenten  $n$  i udtrykket  $u(r,t) = u_e - (u_e - u_o)(r/R)^n$  som funktion af  $Fo^{-1}$ .

Regressionsanalysen gav resultatet

$$a = 0,13604$$

$$b = 1,5734 \quad (3.14)$$

$$r = 0,99680$$

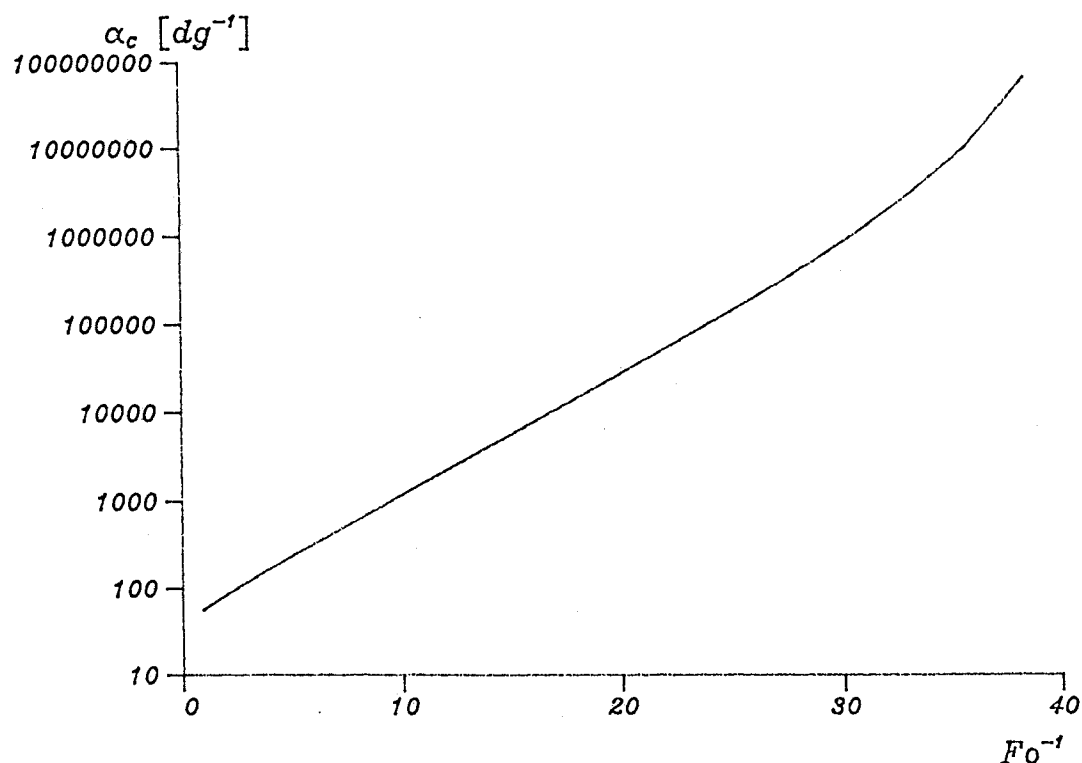
At korrelationskoefficienten  $r$  er så tæt på 1, er et udtryk for, at antagelsen om en lineær afhængighed er rimelig.

Udtørningshastigheden  $\alpha_e$  i udtrykket 2.4 er optegnet som funktion af det reciproke Fouriertal i figur 4. Bemærk, at  $\alpha_e$ -aksen er logaritmisk inddeelt. Det ses, at der også her er tale om en næsten ret linie. Der er derfor anvendt lineær regression på en model af formen

$$\log_e \alpha_e = a Fo^{-1} + b$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha_e = \exp(a Fo^{-1} + b) \quad (3.15)$$



Figur 4. Udtørningshastigheden  $\alpha_c$  i udtrykket  $u_c = u_i - (u_i - u_\infty) \cdot (1 - e^{-t/\alpha_c})$  som funktion af  $Fo^{-1}$ .

Regressionsanalysen gav resultatet

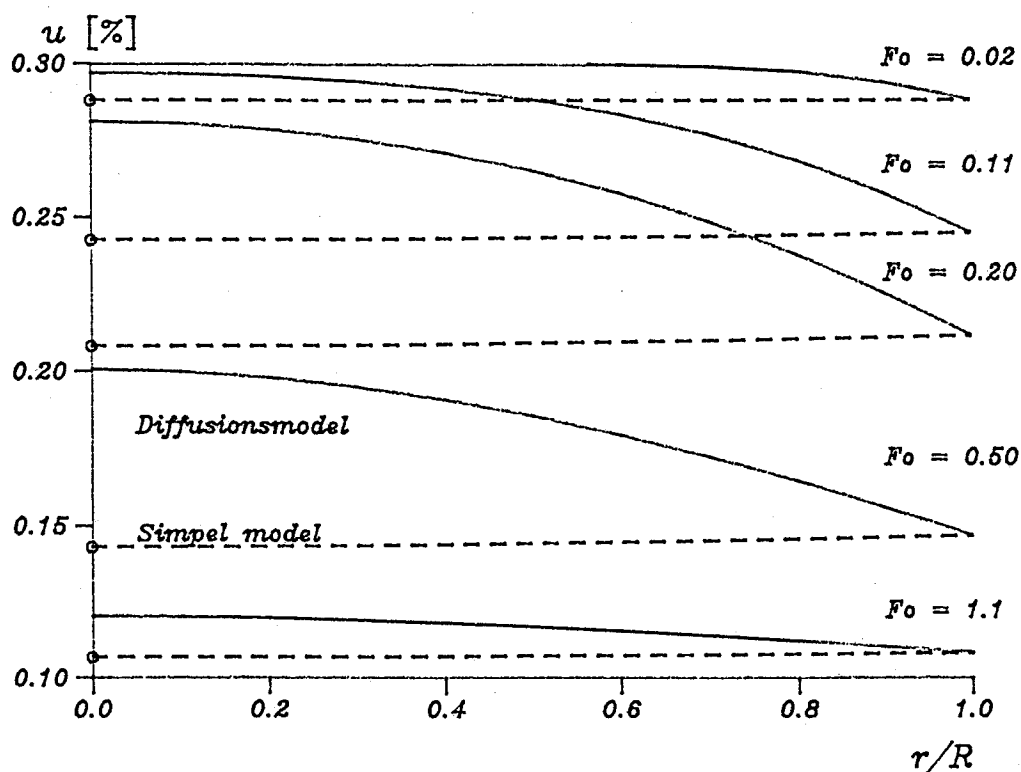
$$\begin{aligned} a &= 0,34008 \\ b &= 14,9951 \\ r &= 0,99738 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da korrelationskoefficienten  $r$  er tæt ved 1, er den anvendte model rimelig.

Spørgsmålet er nu, om man kan anvende faste værdier af  $n$  og  $\alpha_c$  og alligevel få den simple model til at være en god tilnærmelse til diffusionsmodellen. For at undersøge dette er fugtprofilerne udteget for 5  $Fo$ -tal, dels beregnet ved hjælp af diffusionsmodellen og dels ved hjælp af den simple model. I figur 5 er fugtprofilerne optegnet, hvor der for den simple model er anvendt

$$\begin{aligned} n &= 1,5734 \\ \alpha_c &= e^{14,9951} \text{ s} \approx 37,7 \text{ dg.} \end{aligned} \quad (3.17)$$

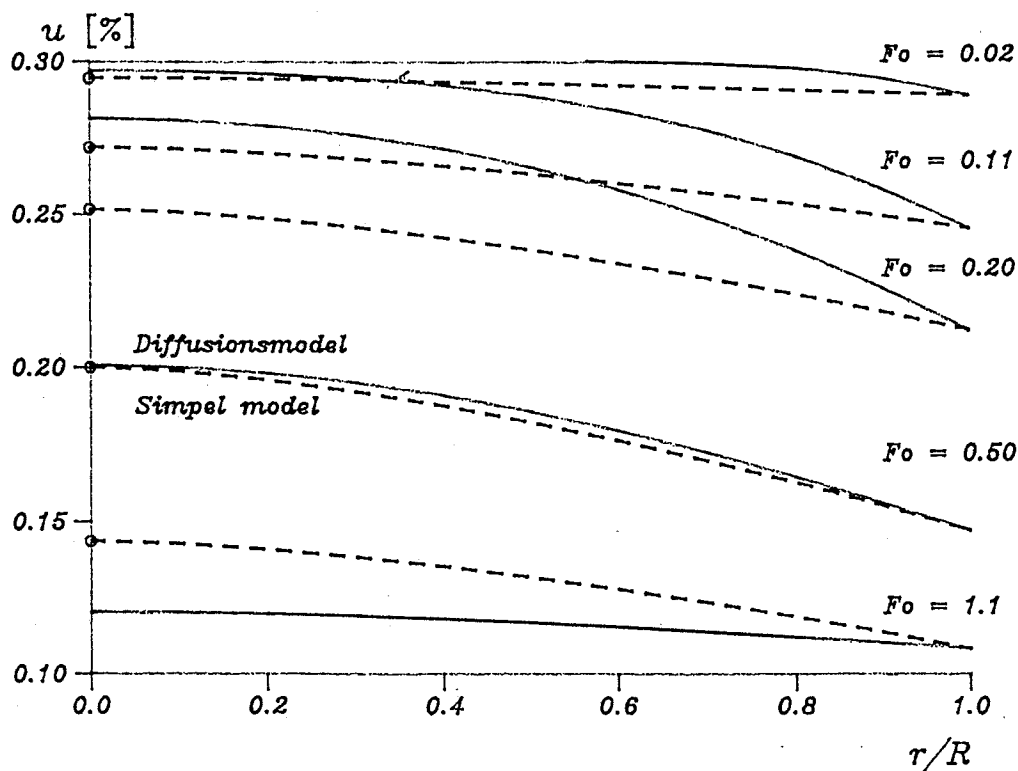
hvilket svarer til skæringspunkterne med akserne altså  $Fo = 0$ .



Figur 5. Sammenligning af fugtprofiler beregnet ved hjælp af diffusionsmodel (fuldt optrukket linie) og simpel model (punkteret linie).  $n = 1,5734$  og  $\alpha_c = e^{14,9951}$  s.

Det ses, at fugtprofilerne beregnet ved hjælp af den simple model er meget tæt ved at være retlinede, og at forskellen mellem vandindholdet i centrum og overfladen af træmaster er meget lille. Endvidere ligger vandindholdet i centrum beregnet med den simple model konstant under vandindholdet beregnet med diffusionsmodellen.

Det ser ud som om udtørningshastigheden  $\alpha_c$  i den simple model er valgt for lille. I figur 6 er fugtprofilerne optegnet med udtørningshastigheden  $\alpha_c = 7113475$  s  $\approx 2004$  dg. Det ses, at der er god overensstemmelse for  $Fo = 0.5$  mellem fugtprofilerne beregnet på de to måder. For fugtprofilerne



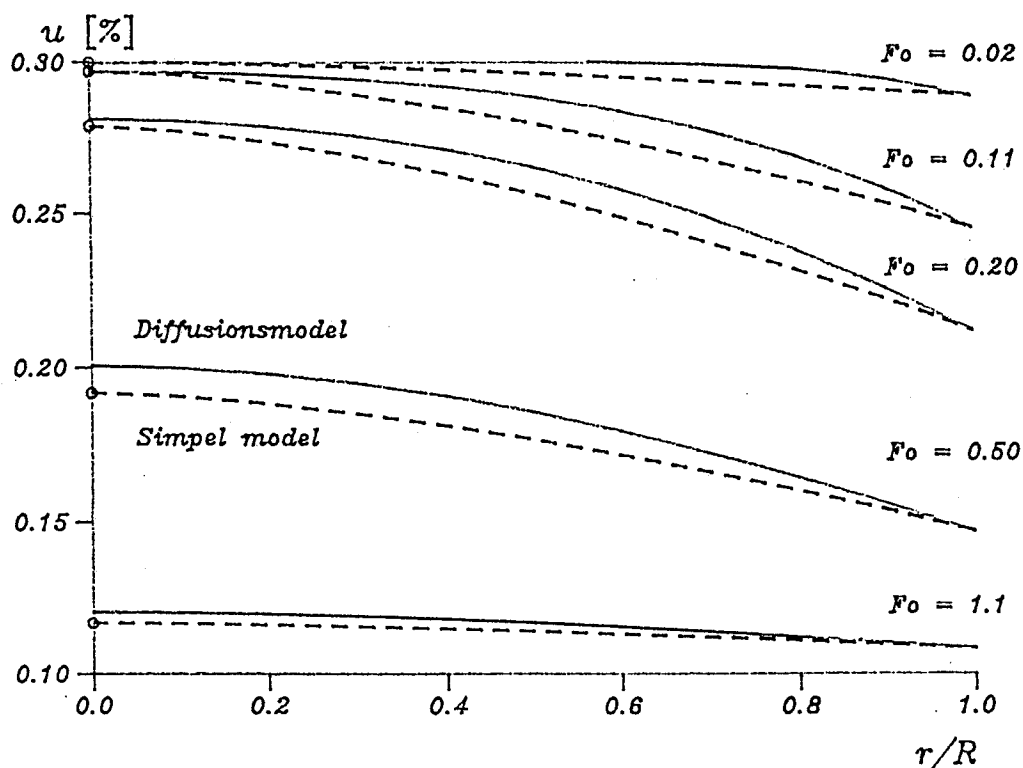
Figur 6. Sammenligning af fugtprofiler beregnet ved hjælp af diffusionsmodel (fuldt optrukket linie) og simpel model (punktet linie),  $n = 1,5734$  og  $\alpha_c = 7213475$  s.

optegnet for  $Fo < 0.5$  ses det, at vandindholdet i træmastens centrum beregnet med den simple model er mindre end det vandindhold, som er beregnet med diffusionsmodellen. For  $Fo > 0.5$  er det modsatte tilfældet. Man kan altså ikke få overensstemmelse mellem de to modeller for varierende  $Fo$ -tal, hvis  $\alpha_c$  er konstant. Det er derfor nærliggende at lade  $\alpha_c$  være givet ved udtrykket 3.15, der blev bestemt ved regression, nemlig

$$\alpha_c = \exp(aFo^{-1} + b) \quad (3.18)$$

hvor det i det aktuelle tilfælde blev fundet, at  $a = 0,34008$  og  $b = 14,9951$ .

I figur 7 er fugtprofilerne optegnet for  $\alpha_c$  varierende efter 3.15. Det ses, at der er en rimelig overensstemmelse mellem de to modeller.



Figur 7. Sammenligning af fugtprofilerne beregnet ved hjælp af diffusionsmodel (fuldt optrukket linie) og simpel model (punkteret linie).  $n = 1,5734$  og  $\alpha_c = \exp(aFo^{-1} + b)$ ,  $a = 0,34008$ ,  $b = 14,9951$ .

Det har af tidsmæssige årsager ikke været muligt at undersøge, hvordan størrelsen af udtørningshastigheden  $\alpha_o$  i overfladen af træmasten påvirker de to regressionsudtryk 3.13 og 3.15. En sådan fremtidig undersøgelse kunne kombineres med en undersøgelse af, hvor godt den simple model kvantitativt stemmer overens med diffusionsmodellen.

#### 4. KONKLUSION

Det er muligt at give en kvalitativt god beskrivelse af fugtdiffusion i en træmast under udtørring ved hjælp af et simpelt udtryk, nemlig

$$u(r,t) = u_c - (u_c - u_o)(r/R)^n$$

hvor

|              |                                                   |
|--------------|---------------------------------------------------|
| $u_o$        | $= u_i - (u_i - u_{\infty})(1 - e^{-t/\alpha_o})$ |
| $u_c$        | $= u_i - (u_i - u_{\infty})(1 - e^{-t/\alpha_c})$ |
| $\alpha_c$   | $= \exp(aFo^{-1} + b)$                            |
| $Fo$         | $= Dt/R^2$                                        |
| $u$          | $= \text{vandindhold (\%)}$                       |
| $r$          | $= \text{stedkoordinat (m)}$                      |
| $t$          | $= \text{tid (s)}$                                |
| $u_c$        | $= \text{vandindhold i mastens centrum (\%)}$     |
| $u_o$        | $= \text{vandindhold i mastens overflade (\%)}$   |
| $R$          | $= \text{træmastens radius (m)}$                  |
| $n$          | $= \text{konstant (-)}$                           |
| $u_i$        | $= \text{begyndelsesvandindhold (\%)}$            |
| $u_{\infty}$ | $= \text{slutvandindhold (\%)}$                   |
| $\alpha_o$   | $= \text{udtørringshastighed i overflade (s)}$    |
| $\alpha_c$   | $= \text{udtørringshastighed i centrum (s)}$      |
| $a$          | $= \text{konstant (-)}$                           |
| $b$          | $= \text{konstant (-)}$                           |
| $Fo$         | $= \text{Fouriertal (-)}$                         |
| $D$          | $= \text{diffusivitet (m}^2/\text{s)}$            |

Kvalitativt god skal i denne sammenhæng sættes i forhold til fugtdiffusion beskrevet ved den lineære partielle differentialligning

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)$$

med rand- og begyndelsesbetingelserne

$$\begin{aligned} u(R, t) &= u_o = u_i - (u_i - u_{\infty})(1 - e^{-t/\alpha_o}) \\ u(r, 0) &= u_i \\ u(r, \infty) &= u_{\infty} \end{aligned}$$

Da lineær diffusion ikke er en fuldstændig beskrivelse af fugttransport, kan det simple udtryk til en række formål give en passende beskrivelse.

## 5. LITTERATURFORTEGNELSE

- /1/ Nielsen, L.F.: Stresses in Wood Caused by Drying. Laboratoriet for Bygningsmaterialer, DTH, Teknisk Rapport 165/86, Lyngby, 1986.
- /2/ Nielsen, L.F.: Damage-Free Drying of Wood Poles. Laboratoriet for Bygningsmaterialer, DTH, Teknisk Rapport 166/86, Lyngby, 1986.
- /3/ Crank, J.: The Mathematics of Diffusion. Oxford University Press, Oxford, 1975.
- /4/ Hansen, M.H., og Hansen, K.K.: Fugttransport beskrevet som en-dimensional lineær diffusion. Laboratoriet for Bygningsmaterialer, DTH, Teknisk Rapport 177/88, Lyngby, 1988.

# Bilag 1 ANALYTISK LØSNING TIL DIFFUSIONSLIGNING

Jfr. CRANK /3/ s. 75

Idet

$$\phi(t) = C_0 \{1 - \exp(-\beta t)\}$$

repræsenterer overfladekoncentrationen som tilnærmer en stationær værdi  $C_0$ , og der gælder

$$\phi(0) = 0 \quad \text{og} \quad \phi(\infty) = C_0 \quad \text{fås}$$

$$\begin{aligned} \frac{C}{C_0} = & 1 - \frac{J_0\{(\beta r^2/D)^{1/2}\}}{J_0\{(\beta a^2/D)^{1/2}\}} \exp(-\beta t) \\ & + \frac{2\beta}{aD} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(a\alpha_n)} \frac{\exp(-D\alpha_n^2 t)}{(\alpha_n^2 - \beta/D)} \end{aligned}$$

$D$  = diffusionskoefficient

$C_0$  = slutkoncentration på overflade

$a$  = cylinderradius

$r$  = afstand fra center  $0 \leq \frac{r}{a} \leq 1$

$C$  = koncentration  $C = C(r, t)$

$t$  = tid

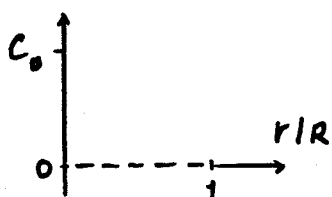
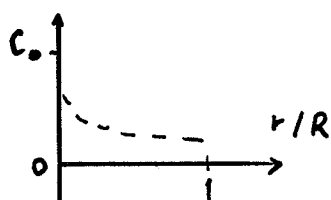
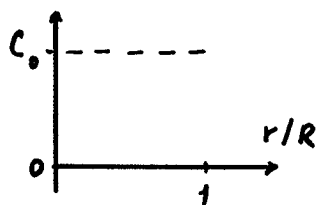
$\beta$  = "udtøringshastighed" ved overflade

$\alpha_n$  = rødderne af  $J_0(a\alpha_n) = 0$

$$J_0(\gamma_n) = 0$$

$$\gamma_n = a\alpha_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma_n}{a} = \alpha_n$$

Bilag 2KONVERTERING AF ANALYTISK LØSNING FRA  
CRANK /3/ TIL DET GIVNE PROBLEM $t = 0$  $t > 0$  $t = \infty$ 

Givet

RB:

$$C(R,t) = C_0 \{ 1 - \exp(-\beta t) \}$$

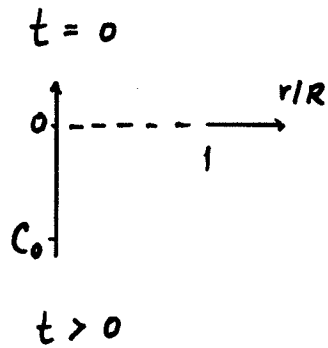
BB:

$$C(R,0) = 0$$

$$C(r,0) = 0$$

Lösning

$$C = C(r,t) = C_0 \cdot f(r,t)$$



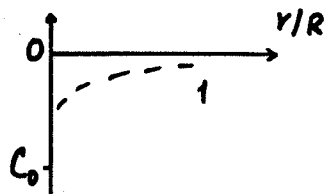
RB:

$$C(R,t) = -C_0 \{1 - \exp(-\beta t)\}$$

BB:

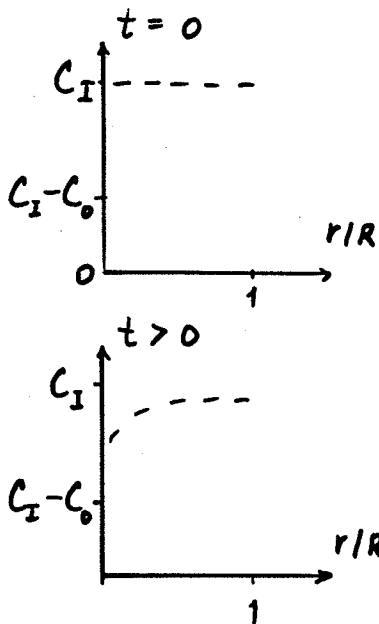
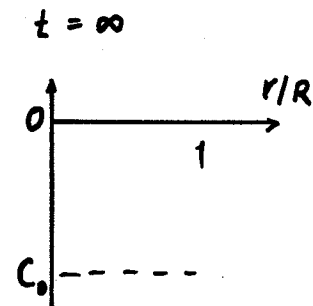
$$C(R,0) = 0$$

$$C(r,0) = 0$$



Lösning

$$C(r,t) = -C_0 f(r,t)$$



RB:

$$C(R,t) = C_I - C_0 \{1 - \exp(-\beta t)\}$$

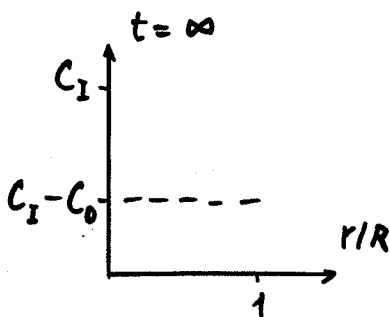
BB:

$$C(R,0) = C_I$$

$$C(r,0) = C_I$$

Lösning

$$C(r,t) = C_I - C_0 f(r,t)$$



RB

$$\begin{aligned}
 u(R,t) &= u_I - u_o \{ 1 - \exp(-t/\alpha_o) \} \\
 &= u_I - (u_I - u_{\infty}) \{ 1 - \exp(-t/\alpha_o) \}
 \end{aligned}$$

BB

$$u(R,0) = u_I$$

$$u(r,0) = u_I$$

Lösning

$$u(r,t) = u_I - (u_I - u_{\infty}) f(r,t)$$

$$J_0(\beta_n) = 0$$

$$f(0,t) = 1 - \frac{J_0(0)}{J_0\{(R^2/(D\alpha_o))^{1/2}\}} \exp(-t/\alpha_o) +$$

$$\frac{2}{D\alpha_o} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(0)}{\beta_n J_1(\beta_n)} \frac{\exp(-D(\beta_n/R)^2 t)}{(\beta_n/R)^2 - 1/(D\alpha_o)}$$