

Om Træbjælders Levetid

af

Lauge Fuglsang Nielsen

Laboratoriet for Bygningsmaterialer  
Danmarks tekniske Højskole  
Bygning 118  
2800 Lyngby



THE TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK  
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING  
BUILDING MATERIALS LABORATORY

## Om Træbjælkers Levetid

af

Lauge Fuglsang Nielsen

### ABSTRACT

Den foreliggende artikel omhandler bøjningspåvirkede træbjælkers levetid. Teoretisk antages bjælkerne at være fremstillede af knastfrit, homogen træ med fiberretning parallel med bjælkeakse. I praksis kan den opnåede løsning imidlertid ekstrapoleres til også at gælde en del bjælker af konstruktionstræ, hvor en enkelt kantknast definerer et tværgående brud i et tværsnit, hvor bjælkehøjden er reduceret med knastens dimension.

De betragtede bjælker vil bryde på tværs af fibrene p.gr.a. symmetri og træets (antagne) homogenitet. Praksis og teori viser, at et sådant brud ikke kan forklares på grundlag af almindelig revnemekanik. Revner på tværs af fibrene vil nemlig (p. gr.a. træets orthotropi) ikke få lov at udvikle sig, fordi revner parallelt med fibrene straks vil kvæle en sådan udvikling. En nærliggende, alternativ brudmodel er den klassisk-fænomenologiske: Brud indtræder når en kritisk brudtøjning,  $\epsilon_c$ , søges forceret.

Ved korttidsbrud er dette kriterium almindeligt anerkendt (i formen kritisk spænding). Artiklen påpeger, at det ikke kan afvises, at kriteriet også kan anvendes i forbindelse med prediktion af langtidsstyrken af træbjælker med tværgående brud.

## OM TRÆBJÆLKERS LEVETID

### 1. INDLEDNING

---

Den foreliggende artikel omhandler bøjningspåvirkede træbjælkernes levetid. Teoretisk antages bjælkerne at være fremstillede af knastfrit, homogen træ med fiberretning parallel med bjælkeakse. I praksis kan den opnåede løsning imidlertid ekstrapoleres til også at gælde en del bjælker af konstruktionstræ, hvor en enkelt kantknast definerer et tværgående brud i et tværsnit, hvor bjælkehøjden er reduceret med knastens dimension.

De betragtede bjælker vil bryde på tværs af fibrene p.gr.a. symmetri og træets (antagne) homogenitet. Praksis og teori viser, at et sådant brud ikke kan forklares på grundlag af almindelig revnemekanik. Revner på tværs af fibrene vil nemlig (p. gr.a. træets orthotropi) ikke få lov at udvikle sig, fordi revner parallelt med fibrene straks vil kvæle en sådan udvikling. En nærliggende, alternativ brudmodel er den klassisk-fænomenologiske: Brud indtræder når en kritisk brudtøjning,  $\epsilon_c$ , søges forceret. Vi vil anvende dette brudkriterium - og tillægge den simplificerende antagelse, at brud udelukkende fremkommer i bjælkens trækside.

Ved korttidsbrud er dette kriterium almindeligt anerkendt (i formen kritisk spænding) (f.eks. 1). Det er den foreliggende artikels hensigt at belyse muligheden for, at kriteriet også kan anvendes ved prediktion af langtidsstyrken for træbjælker med tværgående brud.

Træet antages at opføre sig som et lineær-viskoelastisk materiale med krybningsfunktion,

$$c(t) = \frac{1}{E} [1 + (\frac{t}{\tau})^{1/4}] \quad (1)$$

hvor t betyder tid, mens materialeparametrene E og  $\tau$  er Young's modul henholdsvis relaxationstid. Udtrykket er foreslægt i (2) som et rimeligt godt gennemsnit af resultater fra en række forfatteres krybningsundersøgelser (e.g. 3,4) på forskellige trætyper. Det skal bemærkes, at eksponenten,  $b = 0.25$ , i Ligning 1 ikke er invariant, hvilket vil sige, at  $b = 0.2$  er en omtrentlig så sandsynlig værdi.

Ved konstant, normalt rumklima har Young modulen og relaxationstiden i krybningsudtrykket efter (2) følgende størrelsesordnere:  $E \approx 10^4$  MPa henholdsvis  $\tau \approx 10^4$  døgn. Relaxationstiden er meget følsom overfor svingninger i træets fugtindhold. Selv meget små variationer kan decimere denne parameter.

Efter (2,5) kan relaxationstiden for træ i konstant klima justeres med følgende faktor, a, der tager hensyn til fugtindhold, u(%), og temperatur, T(°C), forskellig fra de værdier, der gælder ved normalt rumklima

$$a = 10^{(15-u)/10 + (20-T)/15} \quad (2)$$

## 2. ELASTISK SPÆNDINGSTILSTAND

---

Vi antager den i Figur 1 viste lineære fordeling af tværnitsspændinger. Denne fordeling er retfærdiggjort af de føromtalte langsgående revner ved brudzonens "spids". Bjælkens højde og bredde er H henholdsvis B. Brudzonens dybde er a, mens stedkoordinater er givet ved x, målt fra bjælkens underside.

Spændingen under belastningsmomentet M kan skrives

$$\sigma = \frac{6M}{B} \frac{H+a-2x}{(H-a)^3} \quad (3)$$

Brudmomentet,  $M_{cr}$ , for den oprindelige bjælke er givet ved

$$\sigma_{cr} = \frac{6M_{cr}}{BH^2} \quad (4)$$

hvor træstyrken,  $\sigma_{cr}$ , er relateret til brudtøjningen ved

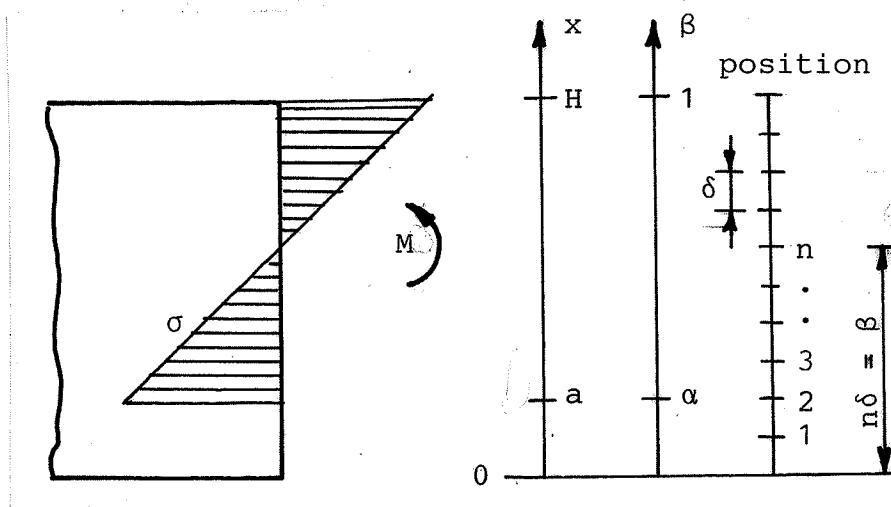
$$\sigma_{cr} = E\epsilon_{cr} \quad (5)$$

Divides Ligning 3 med Ligning 4 og indføres følgende dimensionsløse størrelser

$$\begin{aligned} \alpha &= a/H && \text{normeret dybde af brudzone} \\ \beta &= x/H && \text{normeret stedkoordinat} \\ SL &= M/M_{cr} && \text{belastningsniveau} \end{aligned} \quad (6)$$

kan spændingen udtrykkes ved

$$\sigma = \sigma_{cr} \cdot SL \frac{1+\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2} \quad (7)$$



Figur 1. Antaget spændingsfordeling i bøjningspåvirket bjælke med brydende underside. Stedkoordinaterne,  $x$ ,  $\beta$  og  $n\delta$  er forklaret i teksten.

Udtrykket gælder naturligvis kun for  $1 \geq \beta \geq \alpha$  (den ubrudte zone), og kun så lange  $\sigma \leq \sigma_{cr}$ . Den maksimale trækspænding forekommer ved "spidsen" af den brudte zone, d.v.s. ved  $\beta = \alpha$  svarende til  $\sigma_{max} = \sigma_{cr} \cdot SL / (1-\alpha)^2$ . I den brudte zone,  $\beta < \alpha$ , er  $\sigma \equiv 0$ .

Det er af interesse i den efterfølgende viskoelastiske analyse at kende spændingsvariationen i bjælketræsnittet, når brudzonen udvider sig. Vi får fra Ligning 7

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = 2\sigma_{cr}SL \frac{2+\alpha-3\delta}{(1-\alpha)^4} \quad (8)$$

---

### 2.1 SPRINGVIS UDVIDELSE AF BRUDZONEN

---

Tænker vi os brudzonen udvide sig springvist over de i Figur 1 viste positioner (med lige stor afstand,  $\delta$ ) kan Ligning 8 skrives

$$\Delta\sigma(m,n) = \sigma_{cr}SL*Q(m,n) \quad \text{med} \quad (9)$$

$$Q(m,n) = \frac{2 + (m-0.5)\delta - 3n\delta}{[1 - (m-0.5)\delta]^4}$$

hvor  $\Delta\sigma(m,n)$  betyder spændingsændring i position n fra en udvidelse af brudzonen fra position m-1 til position m.

Spændingsændringen sker "ovenpå" en begyndelsesspænding (spændingsændring fra  $\sigma = 0$ ), der ved hjælp af Ligning 7 med  $\alpha = 0$  kan skrives

$$\Delta\sigma_0(n) = \sigma_{cr}SL*Q_0(n) \quad \text{med} \quad (10)$$

$$Q_0(n) = 1 - 2n\delta$$

Ved numerisk afprøvning viser det sig, at Ligningerne 9 og 10 fungerer godt for en inddeling, hvor  $\delta \leq 1/100$ . Det vil sige, at spændingen i en position, n, kan bestemmes ved Ligning 10 + superposition af de ved Ligning 9 bestemte tillæg for brudzonens udvikling, position til position, begyndende fra bjælkeunderside.

---

### 3. LEVETID

---

Som en rimelig god tilnærrelse vil vi antage, at den viskoelastiske spændingsfordeling over bjælketrærsnittet er lineær. Vi kan med denne antagelse simplificere levetidsberegningerne betydeligt, idet den såkaldte elastisk-viskoelastiske analogi (f.eks. 6) da kan bringes i anvendelse. Det vil for eksempel medføre, at de viskoelastiske tøjninger kan bestemmes ved superposition af de elastisk bestemte spændingstilvækster - blot ved at erstatte den reciproke Young's modul med krybningsfunktionen. Dette forhold vil vi benytte i det følgende.

Brudzonen begynder at udvikle sig til tidspunkt  $t_0$ , når tøjningen,  $\epsilon(n=0) = \epsilon(0)$ , bestemt ved Ligning 10 antager den kritiske værdi,  $\epsilon_{cr}$ . Vi får ved anvendelse af Hookes lov ( $\epsilon = \sigma/E$ ) og efterfølgende erstatning af den reciproke Young's modul med krybningsfunktionen,  $c(t=t_0)$

$$\epsilon(0) = \frac{1}{E} \sigma_0(0) c(t_0) = \epsilon_{cr} = \sigma_{cr}/E \quad (11)$$

Efter bortforkortelse af  $\sigma_{cr}/E$  og en simpel omskrivning fås

$$C(t_0) = 1/SL \quad (12)$$

hvor den normerede krybningsfunktion,  $C(t) = Ec(t)$ , er indført. Under anvendelse af krybningsfunktionen, Ligning 1, bliver

$$\frac{t_0}{\tau} = \left(\frac{1}{SL} - 1\right)^4 \quad (13)$$

Brudzonen er fremme ved position 1 (se Figur 1) til tidspunkt  $t_1 = t_0 + \Delta t_1$ , hvor  $\Delta t_1$  er tiden, det tager brudzonen at vandre fra position 0 til 1. Sidstnævnte tid bestemmes ved hjælp af Ligningerne 9 og 10 gennem følgende tøjningssuperposition,

$$\epsilon(1) = \frac{1}{E} \sigma_0(1) c(t_0 + \Delta t_1) + \frac{1}{E} \sigma(1,1) c(\Delta t_1/2) = \epsilon_{cr}$$

hvor Hooke's lov med  $1/E \Rightarrow c(t)$  igen er anvendt. Divisionen med 2 i det sidste led tager højde for, at den respektive spændingstilvækst ikke udvikler sig springvis, men (tilnærmet) lineært over tidstilvæksten. Efter bortforkortning af  $\sigma_{cr}/E$  og en simpel omskrivning fås

$$Q_0(1)C(t_0 + \Delta t_1) + Q(1,1)C(\Delta t_1/2) = 1/SL \quad (14)$$

der under anvendelse af Ligning 1 giver

$$\frac{\Delta t_1}{\tau} = 2 \left[ \frac{1 - SL * Q_0(1) C(t_1)}{Q(1,1) SL} - 1 \right]^4 \quad (15)$$

Brudzonen er fremme ved position 2 ved  $t_2 = t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2$ , hvor  $\Delta t_2$  er tiden, det tager for brudzonen at udvikle sig fra position 1 til 2. Igen anvendes tøjningssuperposition under anvendelse af Ligningerne 9 og 10. Denne gang fås

$$Q_0(2)C(t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2) + Q(1,2)C(\Delta t_1/2 + \Delta t_2) + Q(2,2)C(\Delta t_2/2) = 1/SL \quad (16)$$

der under anvendelse af Ligning 1 giver

$$\frac{\Delta t_2}{\tau} = 2 \left[ \frac{1 - SL [Q_0(2)C(t_2) + Q(1,2)C(\Delta t_1/2 + \Delta t_2)]}{Q(2,2)SL} - 1 \right]^4 \quad (17)$$

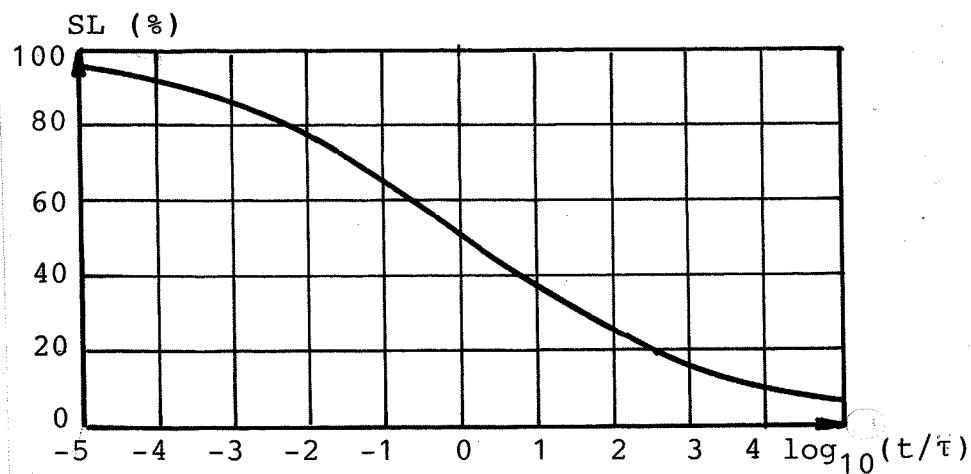
På tilsvarende måde bestemmes  $\Delta t_3$  og  $t_s = t_2 + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$  ved

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_3}{\tau} &= \\ &= 2 \left[ \frac{1 - SL [Q_0(3)C(t_3) + Q(1,3)C(\Delta t_1/2 + \Delta t_2 + \Delta t_3)]}{Q(3,3)SL} + \right. \\ &\quad \left. \frac{Q(2,3)C(\Delta t_2/2 + \Delta t_3)}{1} - 1 \right]^4 \end{aligned} \quad (18)$$

Ligningerne 15, 17 og 18 viser tydeligt, hvordan den generelle algorithme er for bestemmelse af tiden,  $t_{CAT}$ , til endeligt brud (katastrofebrud).  $t_{CAT} = t_s +$  summen af  $\Delta t$  op til  $\Delta t_i = 0$ . Katastrofebrudstedet er bestemt ved  $i^* \delta$ .

#### 4. KONKLUSION

---



Figur 2. Levetid for bøjningspåvirket bjælke af knastfrit træ, bestemt ved Ligning 19.

Numeriske beregninger viser, at  $t_{CAT}/t_s < 1.04$  for belastningsniveauer,  $SL > 0.1$ . Det vil sige, at levetiden for alle praktiske formål kan estimeres alene som tiden,  $t_s$ , til begyndende brud bestemt ved Ligning 13:

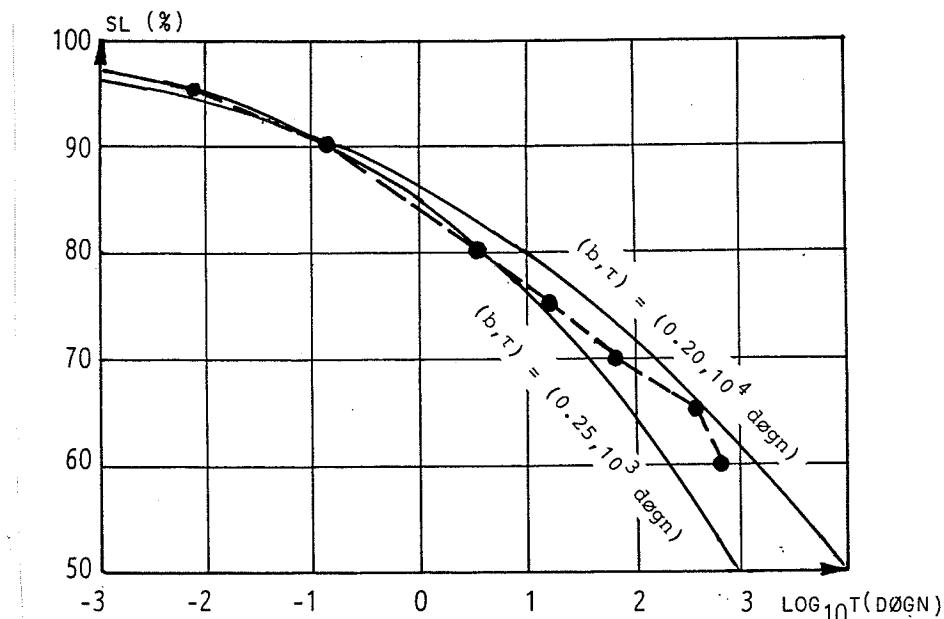
$$\frac{t_{\text{levetid}}}{\tau} \propto \frac{t_{\text{SL}}}{\tau} = \left( \frac{1}{SL} - 1 \right)^4 \quad (19)$$

Levetiden er vist grafisk i Figur 2. Det bemærkes, at tiden er angivet dimensionsløs i forhold til relaxationstiden,  $\tau$ . Det vil sige, at Figuren (og Ligning 19) er generelt anvendelig - d.v.s. uafhængig af træets fugtindhold.

Et eksempel: En bjælke som beskrevet i introduktionen er belastet til et belastningsniveau på  $SL = 60\%$ . Bjælken befinner sig i omgivelser, der svarer til normalt rumklima. D.v.s. relaxationstiden kan skønnes at være  $\tau \approx 10^4$  døgn.

Med denne relaxationstid og Figur 2 (eller Ligning 19) bestemmes bjælkens levetid til godt 5 år.

I Figur 3 er teorien konfronteret med experimentelle resultater fra de såkaldte Madison-forsøg (7), hvor levetiden blev målt for en stor mængde små bjælker, udført af knastfrit Douglas-Fir. De afbildede resultater (kraftige punkter og stiplet linie) er baseret på den i (8) givne datarepræsentation.



Figur 3. Eksperimentelt bestemte levetider for små bjælker af knastfrit træ (7,8) - vist med kraftige punkter og stiplet linie. De tyndere linier repræsenterer teoretisk bestemte levetider som angivet i teksten.

Der foreligger ikke krybningsdata fra Madison-forsøgene, hvorfor de teoretiske data må baseres på et skøn af de i indledningen omtalte krybningsparametre: relaxationsstiden,  $\tau$ , og eksponenten,  $b$ . Der er anvendt to skøn: 1)  $b = 1/4$  sammen med  $\tau = 10^3$  døgn, hvilket er 10 gange mindre end foreslået i indledningen som gennemsnit ved konstant, normalt rumklima. Værdien er imidlertid ikke mindre end, hvad der nemt forårsages af selv små klimavariationer. 2)  $\tau = 10^4$  døgn sammen med  $b = 1/5$ , hvilket er en 20 % lavere værdi end direkte angivet i indledningen. Det er imidlertid antydet, at en sådan eksponent ikke er usandsynlig. Den relativt ringe ændring af eksponenten i forhold til den ( $b = 0.25$ ), der er anvendt i artiklens teoretiske afsnit, har kun en negligerabel indflydelse på det principielle resultat i Ligning 19, nemlig  $t_{C\bar{A}T}/\tau \approx (1/SL - 1)^{1/b}$ . For  $b = 1/5$  bliver  $t_{C\bar{A}T}/\tau \approx (1/SL - 1)^{1/5}$ .

Figur 3 og ovenstående bemærkninger i forbindelse med træs krybning viser, at kritisk tøjning anvendt som brudkriterium, ikke kan afvises som værende anvendelig i forbindelse med bestemmelse af langtidsstyrken for træ, der bryder på tværs af fibrene.

Det skal til slut bemærkes, at træ med væsentlige inhomogeniteter som for eksempel almindeligt konstruktionstræ med knaster, oftest brydes med et markant islæt af brudflader parallelt med fibrene. Sådanne brudsituatoner kan ikke analyseres ved hjælp af den i artiklen udviklede teori. Revnemekanik er her et nødvendigt analyseredskab som det er vist i (f.eks. 5,9,10).

På baggrund af den foreliggende artikels resultater og de resultater, der opnås for konstruktionstræ i de lige nævnte referencer mener forfatteren, at der i praksis er grundlag for en simplificerende opdeling af levetidsanalyser for træ: 1) den foreliggende, der betragter brud, der "hovedsageligt" går på tværs af fibrene, og 2) den noget mere komplicerede revnemekaniske analyse, der anvendes, når brud "hovedsageligt" sker ved adskillelse parallelt med fibrene.

LITTERATUR

- 1) U.S. Forest Products Lab.: "WOOD Handbook: Wood as an Engineering Material". Agricultural Handbook No. 72 (revised). U.S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1974.
- 2) Nielsen, L. Fuglsang: "Power Law Creep as related to Relaxation, Elasticity, Damping, Rheological Spectra and Creep Recovery - With Special Reference to Wood". IUFRO-Engineering Group Meeting, Xalapa, Mexico, December 1984. Proc. Techn. Univ. Denmark, Build. Mat. Lab., Copenhagen 1984, 181-204.
- 3) Clouser, W. S.: "Creep of small Wood Beams under constant Bending Load". U.S. Forest Products Lab., Report 2150(1959).
- 4) Nielsen, A.: "Long-time Deflection of Wood Beams". (in danish). Nordisk Trætidsskrift (Aalborg University Center, Denmark), 7(1981), 201-210.
- 5) Nielsen, L. Fuglsang: "Wood as a Cracked Viscoelastic Material", "Part I: Theory and Applications" and "Part II: Sensitivity and Justification of a Theory". International Workshop on Duration Of Load, 12.-13. sept. 1985, Vancouver, B. C., Canada. Proc. FORINTEK, Western Forest Products Lab., Vancouver, B. C., 1986.
- 6) Flügge, W.: "Viscoelasticity". Blaisdell Publishing, London 1967.
- 7) Wood, L. W.: "Relation of Strength of Wood to Duration of Load". U.S Forest Products Lab., Madison, Wisc., U.S.A., Report R-1916(1951).
- 8) Madsen, B. and Barrett, J. D.: "Time-Strength Relationship for Lumber". SRSP no. 13. Dept. of Civ. Eng., University of British Columbia, Vancouver, B.C., 1976.
- 9) Nielsen, L. Fuglsang: "Crack Failure of Dead, Ramp, and Combined Loaded Viscoelastic Materials". First Int. Conf. on Wood Fracture, Banff, Alberta, Canada, August 1978. Proc., 1979, Western Forest products Lab., Univ. Brit. Columbia, Vancouver, B. C., Canada, 187-200.
- 10) Nielsen, L. Fuglsang: "A Lifetime Analysis of Cracked Linear Viscoelastic Materials - with Special Reference to Wood". IUFRO-Engineering Group Meeting, Borås, Sweden 1982. Proc. IUFRO S5.02, Chalmers Univ. of Technology, Dept. Civil Eng., Gothenburg 1982, 151-178. (previously available as Techn. Rep. 92/80, Build. Mat. Lab., Techn. Univ. of Denmark, Copenhagen, 1980.