INSTITUTTET FOR HUSBYGNING

Rapport nr. **189**

KLAVS FEILBERG HANSEN

REGULÆRE SKIVEKONSTRUKTIONER

Den polytekniske Læreanstalt, Danmarks tekniske Højskole

Lyngby 1988

FORORD

Denne afhandling er udarbejdet som et led i betingelserne for erhvervelsen af den tekniske licentiatgrad.

Licentiatarbejdet er udført ved Instituttet for Husbygning med lektor, civilingeniør, lic.techn. Egil Borchersen som vejleder.

Baggrunden for arbejdet er et STVF-projekt, udført ved Kunstakademiets Arkitektskole i København i samarbejde med akademiingeniør Ture Wester.

Min andel af dette STVF-projekt er oprindeligt påbegyndt ved SBI, men p.gr.a. dets grundvidenskabelige natur, som ligger uden for SBI's primære arbejdsområde, søgtes der støtte hos STVF, således at STVF betalte 3/5 af min løn og SBI resten.

Især den del af afhandlingen, som vedrører sammenhængen mellem gitter- og skivekonstruktioner, er fremkommet via en intens dialog med akademiingeniør Ture Wester, ligesom docent Jørgen Nielsen, Kunstakademiet i København, også har haft stor betydning for arbejdet som en af ophavsmændene til interessen for skivekonstruktioner i Danmark.

Inge Westergård og Mette Flagstad takkes for effektivt skrive- og tegnearbejde.

Lyngby, den 1. marts 1988

Klavs Feilberg Hansen

INDHOLDSFORTEGNELSE

		SIDE
FORORD		1
INDHOLDSFORTEGNELSE		2
RESUMÉ		4
1.	INDLEDNING	6
2.	BESKRIVELSE AF EN SKIVEKONSTRUKTION	8
2.1	Repræsentation af skive- og gitterkonstruktioner	8
2.2	Skiverepræsentationen set i relation til en statisk beregning	14
2.3	Skiverepræsentationen anvendt ved geometrisk beskrivelse	16
2.3.1	Skiverepræsentationens udfoldning	18
2.3.2	Tripletten	21
2.4	Fra udfoldning til konkret konstruktion	27
2.5	Skiverepræsentation for skiveelementer i samme plan	31
2.6	Stabile og ustabile beskrivelser af et polyeder	34
3.	GENERERING AF REGULÆRE SKIVEKONSTRUKTIONER	37
3.1	Basisskiveelementer	38
3.2	Flercellede skivekonstruktioner	48
3.2.1	Bestemmelse af navngiven kvadratnet	55
3.2.2	Generering af plane elementer	64
3.2.2.1	Min.- og max.snitprocesser	67
3.2.2.2	Samlingstyper	72
3.2.2.3	Middelsnitprocesser	75
3.2.2.4	Plane elementers overordnede statiske egenskaber	78
3.3	Skivefacetterede flader	79
3.3.1	Skivefacetterede fladers krumningsmål	80
3.3.1.1	Positivt og negativt krummede	81
3.3.1.2	En facets bidrag til krumnings målet	83
3.3.2	Flader med en totalkrumning på 0	85
3.3.2.1	Ændringer af elementers geometri	90
3.3.2.2	Skivefacettering af torus	110
3.3.3	Flader med negativ totalkrumning	112
3.3.4	Facettering af vilkårlig flade	116
3.3.4.1	Det duale gitters topologi	117
3.3.4.2	Bestemmelse af facetteringen v.h.a. stangflytninger i det duale gitter	122
3.3.4.3	Facettering af skibsskrog	129
3.3.4.4	Fordele og ulemper ved skivefacettering af dobbeltkrumme flader	132

4. ANALYSE AF SKIVEKONSTRUKTIONER 134

4.1 Stabilitetsforhold 135
4.2 Dualtransformationer 144
4.2.1 En kraft langs en terningkant 148
4.2.2 En kraft parallel med en terningkant 149
4.2.3 En vilkårlig kraft 152
4.2.4 En vilkårlig plan 154

SUMMARY 158

APPENDIX 160

LITTERATURLISTE 164

RESUME

I afhandlingen anvises der metoder til udvikling af en række forskellige rumlige skivekonstruktioner, opbygget af ens eller af få forskellige skiveelementer.

V.h.a. de opstillede metoder opnås et bredt spektrum af forskellige skivekonstruktioner, både hvad angår deres statiske egenskaber (fra statisk bestemte til mange gange statisk ubestemte), og hvad angår udformningen af de enkelte elementer (fra helt enkle til meget komplicerede).

I afhandlingen peges der ikke direkte på praktiske anvendelser, men de fleste af de eksempler, som vises, er valgt med henblik på en mulig praktisk anvendelse. Nogle af konstruktionerne danner således sammenhængende bøjnings- og vridningsstive planer, og kunne tænkes anvendt som et alternativ til rumgitre.

Afhandlingens første afsnit omhandler, hvorledes geometrien for en skivekonstruktion bedst kan repræsenteres.

Det vises, at når man definerer den enkelte skives geometri ved dens skæringslinier med naboskiverne, så får man en generel og meget hensigtsmæssig repræsentation.

Denne hensigtsmæssighed beror dels på, at man ud fra repræsentationen direkte kan opstille de statiske ligevægtsligningerne for de enkelte skiver, og dels på at man enkelt og overskueligt kan indføre ændringer og korrektioner af geometrien.

Denne repræsentation af en skivekonstruktions geometri er dual til den måde, hvorpå man normalt angiver en gitterkonstruktions geometri. Dualismen består i, at enkeltskiver og samlinger i skivekonstruktionen transformeres til knuder og stænger i gitterkonstruktionerne. Dualismen mellem skive- opg gitterkonstruktioner udnyttes i afhandlingens sidste afsnit.

I det andet afsnit gives der metoder til udledning af rumlige skivekonstruktioner, opbygget af ens elementer - eller få forskellige elementer. Det viser, hvorledes disse konstruktioner kan klassificeres efter deres topologiske egenskaber, og hvorledes deres overordnede statiske egenskaber kan bestemmes. Endvidere opstilles der en metode til skivefacettering af en vilkårlig flade, således at denne får optimale statiske egenskaber.

I afhandlingens sidste afsnit opstilles der dels metoder til bestemmelse af gitter- og skivekonstruktioners stabilitetsforhold, og dels gives der en fremstilling af sammenhængen mellem gitter- og skivekonstruktioners statik. Denne fremstilling munder ud i en opstilling af de transformationer, man skal anvende, hvis man vil beregne en vilkårlig skivekonstruktion med et generelt gitterberegningsprogram.

1. Indledning

I geometrisk henseende er en skivekonstruktion en rumlig struktur, bestående af plane elementer, samlet langs rette linier.

I denne rapport kaldes skivekonstruktioner for regulære, når deres udformning er styret af en systematik, som bevirker, at der findes simple matematiske relationer mellem de enkelte skiveelementers geometri. Den simpleste matematiske relation mellem 2 elementers geometri er kongruens, og en væsentlig del af rapporten omhandler skivekonstruktioner, hvor alle elementer er kongruente eller kan inddeles i grupper af kongruente elementer.

Formålet med rapporten er, at analysere og geometrisk klassificere regulære skivekonstruktioner, og at opstille beregningsmetoder for dem med henblik på praktiske anvendelser.

Et vigtigt aspect ved skivekonstruktionerne er deres tætte relation til gitterkonstruktionerne.

En skivekonstruktion består rent geometrisk af planer (skiver) og skæringslinier mellem planer (samlinger mellem skiver). En i geometrien ofte anvendt transformation går ud på at overføre planer i punkter og skæringslinier mellem planer i forbindelseslinier mellem de tilsvarende punkter. Anvendes denne transformation på de geometriske elementer i en skivekonstruktion, fås et antal punkter, forbundet med nogle rette linier.

Det viser sig, at transformationen kan indrettes således, at hvis man opfatter punkterne og forbindelseslinierne som en gitterkonstruktion, findes der en simpel entydig forbindelse mellem geometriske og

statiske størrelser i skivekonstruktionen og gitterkonstruktionen. De to konstruktioner siges at være hinandens duale [1].

Gitterkonstruktioner er systematisk undersøgt og udnyttet i mange år, og en del af denne viden kan man via dualtransformationen oversætte til en viden om de tilsvarende duale skivekonstruktioner.

Hvor denne viden er af generel natur, f.eks. at antallet af knuder sammenholdt med antallet af stænger og understøtninger siger noget væsentligt om gitterkonstruktionernes stabilitetsforhold, kan denne viden direkte oversættes til en tilsvarende viden om skivekonstruktioner. Ligeledes kan et generelt gitterberegningsprogram ved tilføjelse af nogle simple oversættelsesprocedurer anvendes til beregning af skivekonstruktioner.

En stor del af de rumlige gitterkonstruktioner, som anvendes i praksis, er udformet således, at antallet af forskellige knuder er minimalt.

Det viser sig imidlertid, at denne knudekongruens ikke ved dualtransformationen overføres i kongruente skiveelementer, og skivekonstruktioner med kongruente elementer kan derfor ikke afledes af de kendte gitterkonstruktioner med ens knuder.

Behandlingen af skivekonstruktioner, opbygget af ens elementer, er inspireret af krystallografien, idet de fra et geometrisk synspunkt kan betragtes som krystaller, hvor atomer og molekyler er erstattet af plane elementer.

2. BESKRIVELSE AF EN SKIVEKONSTRUKTION.

2.1 Repræsentation af skive- og gitterkonstruktion.

I dette og de følgende kapitler vil der ofte blive henvist til dualtransformationen. Denne er udførligt beskrevet i [1], og et resume er givet i kapitel 4. I dette kapitel udnyttes den geometriske del af transformationen.

Dualtransformationen kan enten transformere en skivekonstruktion til en gitterkonstruktion eller en gitterkonstruktion til en skivekonstruktion. Hvis der transformeres fra gitter- til skivekonstruktion består den i, at punkter transformeres til planer, og forbindelseslinier mellem punkter transformeres til skæringslinier mellem de tilsvarende planer. Transformationen fra skive- til gitterkonstruktion er den omvendte, dvs. planer bliver til punkter, og skæringslinier bliver til forbindelseslinier.

En gitterkonstruktion kan repræsenteres geometrisk af en række punkter i rummet og nogle forbindelseslinier mellem punkterne. Punkterne betegnes med

$$Z_i = (z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}) \qquad (1)$$

hvor (z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}) er koordinaterne til det i'te knudepunkt.

Forbindelseslinierne angives ved de punkter, som de forbinder - altså ved en liste af formen

$$(j_1, k_1)\ (j_2, k_2), \ldots\ (j_n, k_n) \qquad (2)$$

hvor j og k er numre på punkterne.

En geometrisk repræsentation af den duale skivekonstruktion fås simpelthen, ved at sætte

$$A_i = 2Z_i, \quad A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \qquad (3)$$

hvor (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) er koefficienterne til ligningen for en plan på formen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 1 \qquad (4)$$

Listen (2) overføres uforandret og angiver nu, istedet for forbindelseslinier mellem punkter, skæringslinier mellem de tilsvarende planer.

Konstanten 2 i udtrykket

$$A_i = 2Z_i$$

beror på et valg. I sin generelle udformning har transformationen fra punkt til plan formen

$$A_i = k_{ij}Z_j$$

hvor k_{ij} er en 3x3 matrix med determinant #0.

Her er altså valgt

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ;$$

Hvis man vil opbygge en model af en gitterkonstruktion, er den information, som ligger i gitterrepræsentationen, i form af koordinaterne til knudepunkterne og listen indeholdende stængerne, tilstrækkelig til en entydig løsning, når man ser bort fra udformningen af knuderne og stængerne.

Stiller man sig den tilsvarende opgave for en skivekonstruktion, at bygge en model på grundlag af skiverepræsentationen (skiveplanernes ligninger og listen indeholdende skæringerne), har denne opgave ikke nogen entydig løsning.

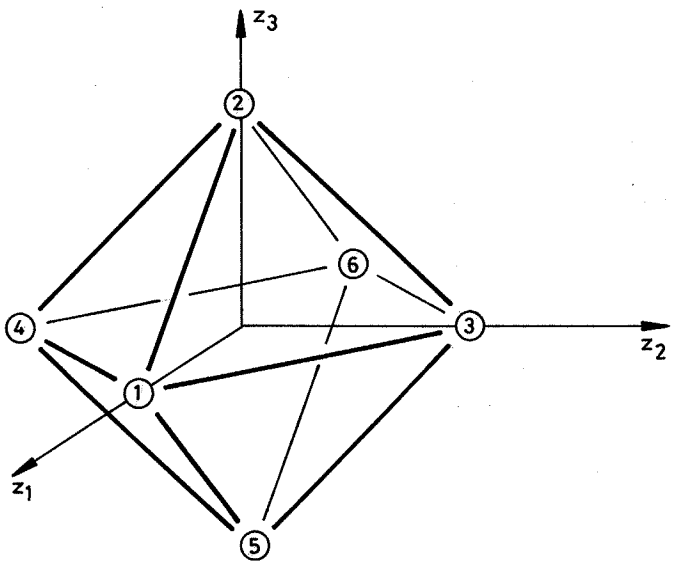
Betragtes f.eks. følgende gitterrepræsentation, bestående af 6 punkter:

Punkt 1 : $Z_1 = (1,0,0)$
Punkt 2 : $Z_2 = (0,0,1)$
Punkt 3 : $Z_3 = (0,1,0)$
Punkt 4 : $Z_4 = (0,-1,0)$
Punkt 5 : $Z_5 = (0,0,-1)$
Punkt 6 : $Z_6 = (-1,0,0)$

og 12 forbindelseslinier, givet ved numrene på de punkter, som de forbinder,

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4),
(2,6, (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)

kan man direkte bestemme den tilsvarende gitterkonstruktion, som vist på figur 1.



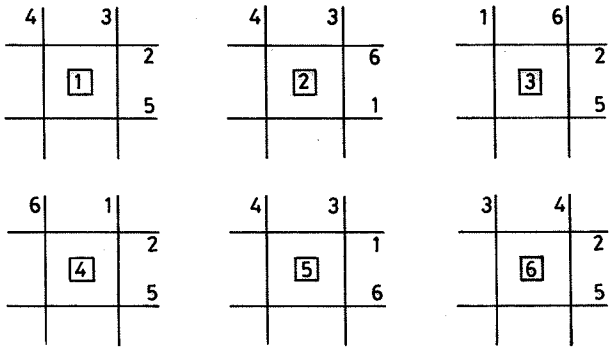
Figur 1. Gitterkonstruktion svarende til en given gitterrepræsentation.

Den tilsvarende duale skiverepræsentation består af følgende 6 planer:

Plan 1 : $2x_1 = 1$;
Plan 2 : $2x_3 = 1$;
Plan 3 : $2x_2 = 1$;
Plan 4 : $-2x_2 = 1$;
Plan 5 : $-2x_3 = 1$;
Plan 6 : $-2x_1 = 1$;

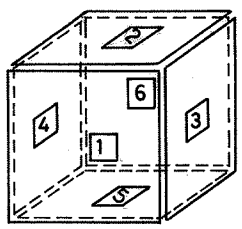
og 12 skæringslinier repræsenteret ved den samme liste som før.

Informationen i skiverepræsentationen kan afbildes, som vist på figur 2.



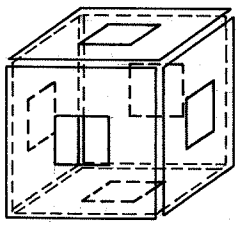
Figur 2. Grafisk afbildning af skiverepræsentationen

Figuren viser de mønstre, som dannes i hver plan af de øvrige planers skæringslinier. Ved passende valg af et sammenhængende område i hvert af disse planer, vil man kunne danne de skivekonstruktioner, som er i overensstemmelse med den givne repræsentation.
Et naturligt valg vil være de centrale kvadrater i hver plan. I figur 3 er vist den skivekonstruktion, som fremkommer ved dette valg.



Figur 3. Skivekonstruktion dannet af kvadrater

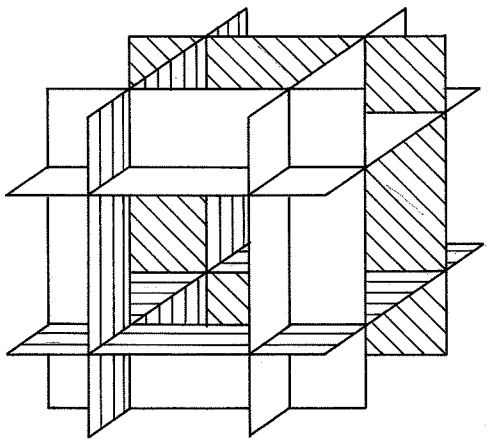
Der er ikke noget i vejen for, at kvadraterne kan indeholde et hul, som vist på figur 4.



Figur 4. Skivekonstruktion dannet af kvadrater med hul.

Denne skivekonstruktion er også i overensstemmelse med skiverepræsentationen.

Udvides hullerne til at omfatte hele kvadratet, er dette også lovligt, hvis man i så fald medtager noget af planen uden for det centrale kvadrat, som vist på figur 5.



Figur 5. Skivekonstruktion dannet af kvadrater med hul.

Skivekonstruktionerne i figurerne 3, 4 og 5 viser, at en og samme skiverepræsentation kan repræsentere skivekonstruktioner af ret forskelligt udseende.

Eksemplernes fælles udgangspunkt giver sig geometrisk til kende ved, at de alle danner kanterne i en terning.

Det fælles udgangspunkt betyder i konstruktionsmæssig (statisk) henseende, at ligevægtsligningerne for de enkelte skiver er de samme i alle eksempler. Dette følger direkte af, at skiverepræsentationen entydigt definerer de linier, hvor skiverne overfører forskydningskræfter til hinanden. Man kan sige, at skiverepræsentationen indeholder den nødvendige og tilstrækkelige information til, at man kan opstille ligevægtsligningerne for hver skive, hvilket er ensbetydende med, at man kan afgøre, om en given kraftfordeling er statisk mulig. Det er her forudsat, at man kender de ydre kræfters angrebslinier på de enkelte skiver, og at eventuelle understøtningsretninger også er givet.

Skiverepræsentationen for en given skivekonstruktion indeholder således en væsentlig del af den information, som er nødvendig, for at man kan foretage en statisk beregning.

2.2 Skiverepræsentationen set i relation til en statisk beregning.

For at undersøge, hvorledes skiverepræsentationens information skal suppleres, i afhængighed af den detailleringsgrad, beregningerne ønskes udført med, betragtes først den tilsvarende problemstilling for en gitterkonstruktion.

I normale ingeniørmæssige beregninger af gitterkonstruktioner forudsætter man, at stængerne kun kan overføre tryk- og træknormalkræfter, og at alle deformationer sker i stængerne, d.v.s. knuderne regnes uendelig stive. Med disse forudsætninger skal man blot supplere de informationer, som ligger i gitterrepræsentationen med oplysninger om de enkelte stængers stivheder, for at man kan bestemme kræfterne i konstruktionen.

Hvis gitteret er statisk bestemt, er gitterrepræsentationen alene tilstrækkelig.

Overfører man direkte ved dualtransformationen, forudsætningerne om en gitterkonstruktions opførsel til en skivekonstruktion, får man, at samlingerne kun kan overføre forskydningskræfter, og at alle deformationer sker i samlingerne, mens skiverne er uendelig stive.

Hvis disse forudsætninger skal være rimelige for en skivekonstruktion, må de deformationer, som sker i samlingerne, tolkes som sammensat af 2 bidrag.

Det ene af disse bidrag hidrører fra selve samlingen. Størrelsem af dette bidrag afhænger af samlingens udførelse. Drejer det sig om svejste samlinger i stålkonstruktioner eller limede samlinger i trækonstruktioner, vil det være rimeligt at sætte det til 0.

Det andet bidrag skal tage hensyn til (simulere) deformationerne i de to skiver, som støder op til samlingen.

Dette bidrag kan kun findes, hvis man kender de enkelte skivers konkrete udformning. Der skal ikke i denne rapport nærmere redegøres for, hvordan dette bidrag kan findes, men en nærliggende fremgangsmåde vil være at anvende energimetoder. For regulære skivekonstruktioner vil der kun være få forskellige samlingstyper, og en skønsmæssig ansættelse af deres relative stivheder vil ofte være tilstrækkelig til en beregning af en skivekonstruktions principielle konstruktionsmæssige egenskaber.

Skiverepræsentationen, suppleret med oplysninger om samlingernes stivheder, udgør altså en tilstrækkelig og nødvendig informationsmængde til beregning af de kræfter, skiverne i en skivekonstruktion overfører til hinanden, og ligesom det var tilfældet for gitterkonstruktionerne, er skiverepræsentationen alene tilstrækkelig, hvis konstruktionen er statisk bestemt.

En beregning af de kræfter, som de enkelte skiver overfører til hinanden, kan man foretage ved hjælp af et generelt gitterberegningsprogram, suppleret med procedurer, som kan foretage de fornødne dualtransformationer.

Ønsker man en detaljeret beregning af spændingerne inde i de enkelte skiver, må skiverepræsentationen suppleres med oplysninger om skivernes konkrete udformning.

I statisk henseende er det således naturligt at inddele skivekonstruktionerne i klasser af konstruktioner med samme skiverepræsentation.

2.3 Skiverepræsentationen anvendt ved geometrisk beskrivelse

Inddelingen af skivekonstruktionerne i klasser med samme skiverepræsentation frembyder også fra et geometrisk synspunkt mange fordele, og der skal derfor nærmere redegøres for skiverepræsentationens egenskaber, og hvilke konkrete skivekonstruktioner en given skiverepræsentation kan repræsentere.

Som tidligere omtalt, består skiverepræsentationen af 2 dele. Den ene del er koefficienterne til ligningerne for de planer, de enkelte skiver ligger i.

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \quad ;$$

hvor planens ligning har formen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 1$$

Denne del vil i det følgende blive betegnet som den geometriske del af skiverepræsentationen.

Den anden del er en liste af formen

$$(j_1, k_1), (j_2, k_2), \ldots\ldots$$

hvor hver parentes indeholder numrene på 2 skiver, som er samlet til hinanden. Denne del vil i det følgende blive betegnet som den topologiske del af skiverepræsentationen.

Det følger af den form, en plans ligning er givet på

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1 \ ,$$

at talsættet A = (0,0,0) ikke er lovligt, da

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \quad ;$$

aldrig er opfyldt og derfor ikke fremstiller nogen plan. Det følger også, at planen gennem (0,0,0) ikke kan fremstilles af en ligning af formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1$$

Disse formelle matematiske problemer, som kunne have været undgået ved at vælge mere generelle fremstillinger af en plan, afspejler imidlertid dualiteten mellem punkt og plan, idet det duale punkt til en plan gennem (0,0,0) er det uendelige fjerne punkt, og den duale plan til et punkt, liggende i (0,0,0), er den uendelige fjerne plan.

Fremstillingen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1$$

sikrer, at der for planer, som ikke indeholder (0,0,0), er en entydig forbindelse mellem en plan og dens ligning, d.v.s. at skiverepræsentationen er entydig, og at der til en given skiverepræsentation findes èn og kun èn gitterrepræsentation.

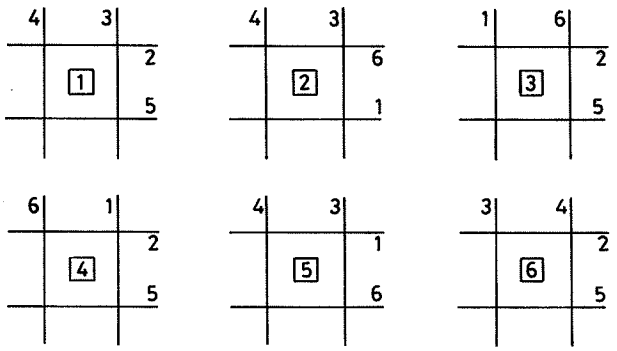
Sammenhængen mellem skive- og gitterrepræsentationen er afhængig af det valgte koordinatsystem. Beskrives et givet sæt af planer og skæringslinier i forskellige koordinatsystemer, fås forskellige gitterrepræsentationer.

Afbildes informationerne i skiverepræsentationen grafisk ved, at man i hver plan optegner de øvrige planers skæringslinier, udgør denne afbildning en af koordinatsystemet uafhængig fremstilling af informationerne i skiverepræsentationen. Denne afbildning kaldes skiverepræsentationens udfoldning.

2.3.1 Skiverepræsentationens udfoldning.

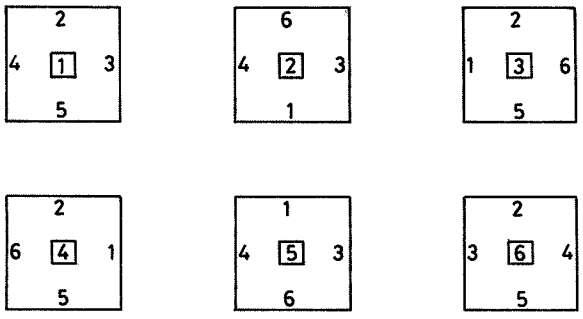
Ved undersøgelse af skiverepræsentationens egenskaber viser det sig hensigtsmæssigt at benytte udfoldningen.

I første omgang betragtes igen det tidligere benyttede eksempel, som var den duale skiverepræsentation til et regulært oktaeder. Udfoldningen er vist på figur 6.



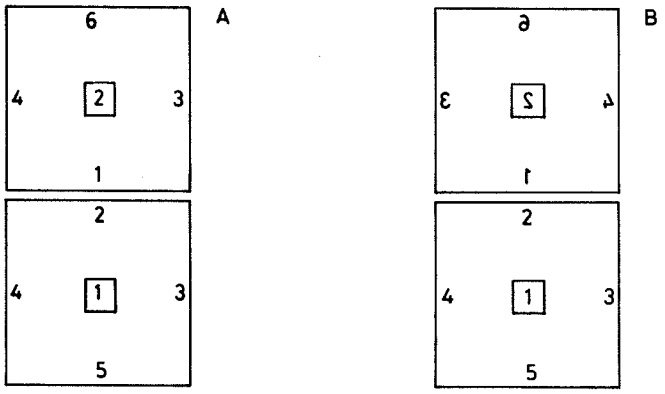
Figur 6. Udfoldet skiverepræsentation.

Der blev i begyndelsen af dette kapitel givet 3 konkrete eksempler på skivekonstruktioner, som var i overensstemmelse med denne udfoldning. Det skal nu nærmere undersøges, hvorledes informationen i udfoldningen kan benyttes, når den rumlige opbygning skal foretages. Der betragtes eksemplet, hvor skiverne udgøres af de centrale kvadrater i udfoldningen. Der foreligger altså 6 skiveelementer, markeret, som vist på figur 7.



Figur 7. Markerede skiveelementer.

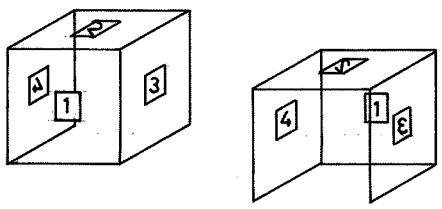
Markeringen på disse elementer betyder, at f.eks. siden 2 i element 1 skal parres med siden 1 i element 2. Dette kan gøres på 2 forskellige måder, som vist på figur 8.



Figur 8. De to forskellige måder, hvorpå element 1 og 2 kan samles til hinanden.

Set alene ud fra element 1 og 2 er disse parringer lige gode, men når man skal tilføje element 3 og 4, er dette kun muligt i tilfælde A.

For at kunne tilføje element 3, skal de 2 elementer (tilfælde A) drejes i forhold til hinanden om deres fælles linie, således at vinklen mellem linie 3 i element 1 og linie 3 i element 2 bliver den samme som vinklen mellem linierne 1 og 2 i element 3.
Denne drejning kan foretages ved, at element 2 enten drejes ind i planen eller ud af planen, som vist på figur 9, hvor også placeringen af elementerne 3 og 4 er vist.



Figur 9. De to muligheder for sammenbygning af elementerne 1, 2, 3 og 4. Elementerne er tegnet som gennemsigtige.

I begge tilfælde er anbringelsen af skiverne 5 og 6 entydig, og elementerne i figur 7 kan således samles på 2 forskellige måder. I dette tilfælde er de to opbygninger ens, hvis man fjerner markeringerne på skiverne, men det skyldes terningens symmetriegenskaber, idet det gælder, at de to rumlige opbygninger, som en given samling markerede elementer kan samles til, vil være hinandens spejlbilleder. Dette fænomen er helt analogt til, at mange organiske molekyler findes i en højre og en venstre udgave, som er hinandens spejlbilleder. Fænomenet kendes også fra handskefremstilling, hvor man kun behøver et mønster for at kunne tilvirke både højre og venstre handsker.

2.3.2 Tripletten

Den her givne forklaring på, hvordan man samler 6 kvadratformede skiver til en terning, fører naturligt til følgende.

En udfoldning kan opfattes som en punktmængde, beliggende i et antal forskellige planer, hver karakteriseret ved et navn (nummer). Punkterne i hver plan består af nogle navngivne rette linier. Navnene angiver, hvorledes linierne i de forskellige planer skal parres med hinanden, idet linien n_2 i plan n_1 skal parres med linien n_1 i plan n_2. Dette udtrykkes ved, at man skriver

$$n_1n_2,\ n_2n_1 \tag{5}$$

hvor det første navn angiver planen, og det andet navn angiver linien i den pågældende plan.
Tre navne $n_1n_2n_3$ angiver det punkt i plan n_1, hvor linierne n_2 og n_3 skærer hinanden. Man har derfor

$$n_1n_2n_3 = n_1n_2 \cap n_1n_3 \tag{6}$$

Reglerne for parring af linier medfører, at punktet $n_1n_2n_3$ i plan n_1 skal være sammenfaldende med punktet $n_2n_3n_1$ i plan n_2 og punktet $n_3n_1n_2$ i plan n_3. Dette angives topografisk ved

$$n_2n_3n_1,\ n_1n_2n_3,\ n_3n_1n_2 \tag{7}$$

Indføres (6) i (7) fås

$$n_2n_3 \cap n_2n_1,\ n_1n_2 \cap n_1n_3,\ n_3n_1 \cap n_3n_2 \tag{8}$$

Dette kaldes <u>en triplet</u>, og den udtrykker at:

Punktet $n_1n_2n_3$ i plan n_1 falder sammen med punkterne $n_3n_1n_2$ i plan n_3 og $n_2n_3n_1$ i plan n_2 på en sådan måde, at følgende linier er parrede

$n_2n_1,\ n_1n_2$;

$n_1n_3,\ n_3n_1$;

$n_3n_2,\ n_2n_3$.

I skiverepræsentationen udgør informationen om, hvilke linier i hvilke planer som skal parres, den topologiske del. I det konkrete eksempel er listen

(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,6)

(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)

Hvert element i denne liste angiver en parring, f.eks. udtrykker (2,4) parringen

2 4, 4 2 .

Altså, at linien, markeret med 4 i plan 2, skal parres med linien, markeret med 2 i plan 4.

Som det fremgik af den måde, en skivekonstruktion blev samlet på, indeholder parringerne også indirekte information om hvilke punkter i planerne, som skal være sammenfaldende, og denne information kan, som det er blevet vist, udtrykkes som tripletter. Det skal nu vises, hvordan man ud fra skiverepræsentationens topologiske del kan danne disse tripletter.

Der udtages først 2 elementer fra listen, som har et nummer fælles. Disse 2 elementer repræsenterer 2 parringer og et punkt i den plan, hvis nummer er det fælles f.eks.

1 2 ∩ 1 3 .

Disse 2 elementer derfinerer entydigt en triplet, som det fremgår af det følgende:

1 2 ∩ 1 3

↓

2 1, 1 2 ∩ 1 3, 3 1 [3 1 skal parres med 1 3 ; 2 1 " " 1 2]

↓

2 3 ∩ 2 1, 1 2 ∩ 1 3, 3 1 ∩ 3 2

Da listen også indeholder parringen 3 2, 2 3, er tripletten i orden.

Herefter betragtes punktet

1 2 ∩ 1 5

som fører til tripletten

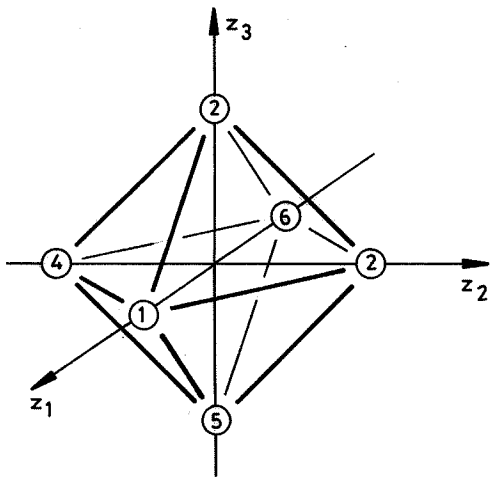
2 5 ∩ 2 1, 1 2 ∩ 1 5, 5 1 ∩ 5 2

Denne triplet er ikke i orden, da parringen 5 2, 2 5 (2,5) ikke er indeholdt i listen af parringer.

Samtlige lovlige tripletter, som kan dannes af listen af parringer, er:

1:	2 3 ∩ 2 1,1 2 ∩ 1 3,3 1 ∩ 3 2	1 2 3
2:	2 4 ∩ 2 1,1 2 ∩ 1 4,4 1 ∩ 4 2	1 2 4
3:	3 5 ∩ 3 1,1 3 ∩ 1 5,5 1 ∩ 5 3	1 3 5
4:	4 5 ∩ 4 1,1 4 ∩ 1 5,5 1 ∩ 5 4	1 4 5
5:	3 6 ∩ 3 2,2 3 ∩ 2 6,6 2 ∩ 6 3	2 3 6
6:	2 4 ∩ 2 6,6 2 ∩ 6 4,4 6 ∩ 4 2	2 4 6
7:	3 5 ∩ 6 3,6 3 ∩ 6 5,5 6 ∩ 5 3	3 5 6
8:	5 4 ∩ 5 6,6 5 ∩ 6 4,4 6 ∩ 4 5	4 5 6

Tripletterne kan entydigt udledes af skiverepræsentationens topologiske del, og i dette tilfælde indeholder tripletterne også alle parringerne i denne. Denne entydige sammenhæng mellem parringer og tripletter gælder ikke for alle skiverepræsentationer, og der findes endog stabile skivekonstruktioner uden en eneste triplet. Disse forhold illustreres lettest ved, at man betragter den duale gitterrepræsentation, som vist på figur 10.



Figur 10. Det duale gitter.

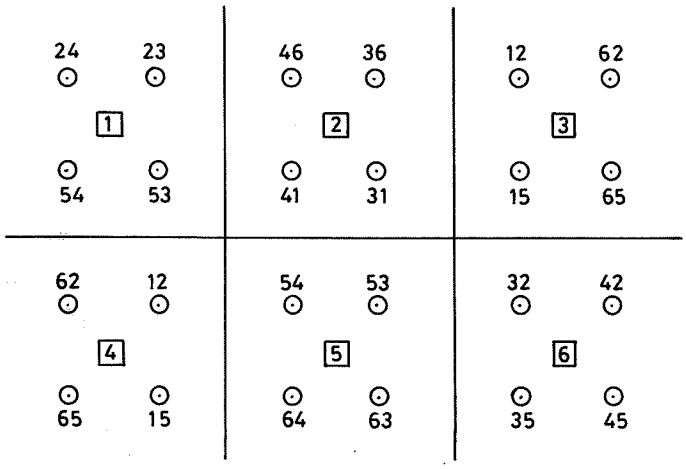
Listen af tripletter angiver de punkter, hvor 3 planer, som er indbyrdes parrede, skærer hinanden. Det ses, at hver triplet svarer til en trekant i gitteret, og bestemmelsen af tripletter kan lige så godt tolkes som, at man bestemmer trekanter i det duale gitter.

En skivekonstruktion uden tripletter er altså den duale til en gitterkonstruktion uden trekanter.

I de fleste i praksis anvendte gitterkonstruktioner, indgår hver stang i mindst èn trekant. Tilknytningen af en stang til mindst èn trekant, svarer i skivekonstruktioners verden til, at hver samling indgår i mindst èn triplet.

I det følgende forudsættes det, at hver samling i en skivekonstruktion indgår i mindst èn triplet, og når dette er tilfældet, kan skiverepræsentationens topologiske del oversættes til et sæt af tripletter.

En skiverepræsentation består nu af koefficienterne til de planer, de enkelte skiver ligger i samt et sæt af tripletter, som angiver samtlige skæringspunkter mellem 3 planer, som er indbyrdes samlede. En grafisk afbildning af disse informationer kan logisk bestå i, for hver plan at angive de punkter, hvor 2 andre planer skærer den pågældende plan. Anvendt på eksemplet, vil denne afbildning se ud, som vist på figur 11.



Figur 11. Udfoldet skiverepræsentation, hvor den topologiske del er angivet ved et sæt af tripletter.

Numrene ud for punkterne angiver, hvorledes punkterne skal forbindes med hinanden. - F.eks. skal punkt 2 4 i plan 1 forbindes med punkt 2 3 og punkt 4 5. Det er oplagt, at denne udfoldning, når punkterne er korrekt forbundne, er identisk med den tidligere viste udfoldning.

Man kan sige, at de to måder, udfoldningen er givet på, er duale, idet den duale definition til en plan figur, givet ved nogle linier og disses skæringer, er en figur, givet ved nogle punkter og disses forbindelseslinier.

Set fra et manuelt eller edb-grafikmæssigt synspunkt, er den sidste måde (dette - at figurerne er givet ved nogle punkter og deres forbindelseslinier) den mest hensigtsmæssige.

En udtegning af forbindelseslinierne mellem punkterne i hver plan, kaldes basisudfoldningen.

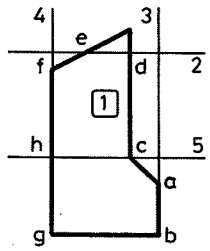
De skiveelementer, som fremkommer af basisudfoldningen, kaldes skiverepræsentationens basiselementer.

2.4 Fra udfoldning til konkret konstruktion.

Det skal nu undersøges, hvilke bånd en given udfoldning lægger på udformningen af skiveelementerne. Der betragtes igen det tidligere behandlede eksempel, hvor udfoldningen udgøres af 6 planer.

Man skal i hver af de 6 planer vælge et sammenhængende område som skiveelement. Valget er kun begrænset af, at alle skæringslinier mellem 2 planer på en strækning skal være indeholdt i 2 skiveelementer.

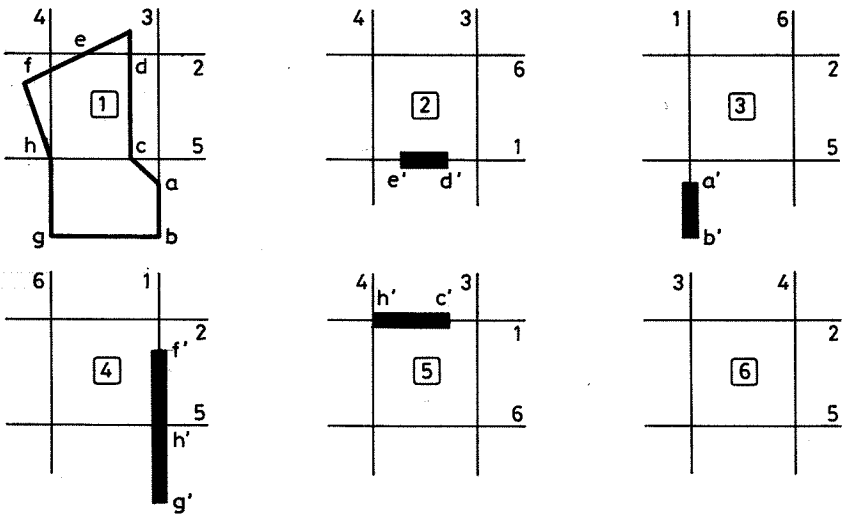
Til illustration af valgmulighederne undersøges det, hvilke bånd en enkelt skives konkrete udformning lægger på de øvrige. Det forudsættes f.eks., at skive 1 ser ud, som vist på figur 12.



Figur 12. Valg af geometri for skive 1.

Valget er foretaget således, at skiven har kontakt med samtlige skæringslinier i den pågældende plan.

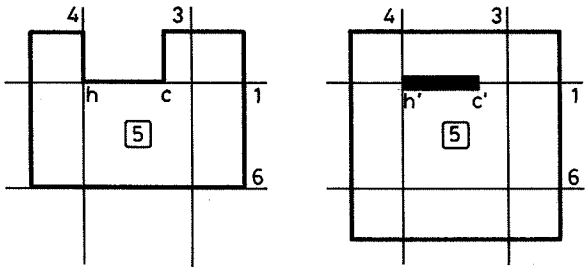
Punkterne, hvor skivens begrænsning skærer linierne i udfoldningen, er betegnet med (a, b, c, d, e, f, g, h). De, til disse punkter svarende punkter i de øvrige skiver, betegnes med (a', b', c', d', e', f', g', h'). Se figur 13.



Figur 13. Geometrien af skive 1 overført til de resterende skiver.

Beliggenheden af punkterne (a', b', ..., h') fås direkte af de oprindelige. F.eks. er punkt a beliggende på linien 1 3 med givne afstande til punkterne 1 3 2 og 1 3 5, d.v.s. at punkt a må ligge i skive 3 på linien 3 1 med givne afstande fra punkterne 3 1 5 og 3 1 2.

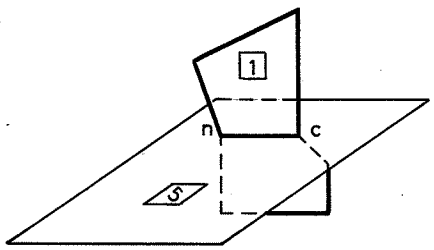
Betragtes f.eks. plan 5, skal skiveelement 5 indeholde noget af linien h'c', men man kan yderligere af figur 13 slutte, at da h c i skive 1 er en indre linie, må den strækning af h'c', som skiveelement 5 indeholder, ligge på randen, da skæringen ellers ikke er fysisk mulig. Skiveelement 5 kan f.eks. være udformet på en af de måder, som er vist på figur 14.



Figur 14. Udformning af skiveelement 5.

I første tilfælde er h'c' en del af randen, mens h'c' i det andet tilfælde er en slids, som også er en del af randen. Generelt har man, at en indre linie i et skiveelement kun kan parres med en randlinie i et andet skiveelement.

I begge tilfælde er parringen langs h c altså i princippet mulig, men i slidstilfældet kan selve anbringelsen af elementerne i forhold til hinanden kun foretages, hvis de kan deformeres. Se figur 15.



Figur 15. Elementerne 1 og 5 placeret i forhold til hinanden.

Når man har bestemt sig for udformningen af element 5, kan man finde de nye bånd, som denne udformning lægger på de resterende elementer. Herefter kan man igen bestemme sig til udformningen af det næste ele-

ment og så fremdeles, indtil alle elementers geometri er fastlagt. Det er således relativt enkelt at finde et sæt skiveelementer, der er i overensstemmelse med en given udfoldning.

Svaret på, om disse elementer, uden at deformeres, kan sammensættes til en rumlig skivekonstruktion, ligger naturligvis implicit i elementernes udformning, men det er langt fra altid så let at indse, hvad svaret er, som i det netop behandlede eksempel. I [2] er problemet beskrevet nærmere, men ikke udtømmende.

En måske teoretisk utilfredsstillende, men praktisk anvendelig metode til at få rede på dette spørgsmål består simpelthen i, at lave en model af konstruktionen i et deformerbart materiale f.eks. kraftigt papir, for derefter at undersøge om den kan skilles ad, uden at elementerne deformeres.

2.5 Skiverepræsentation for skivelementer i samme plan.

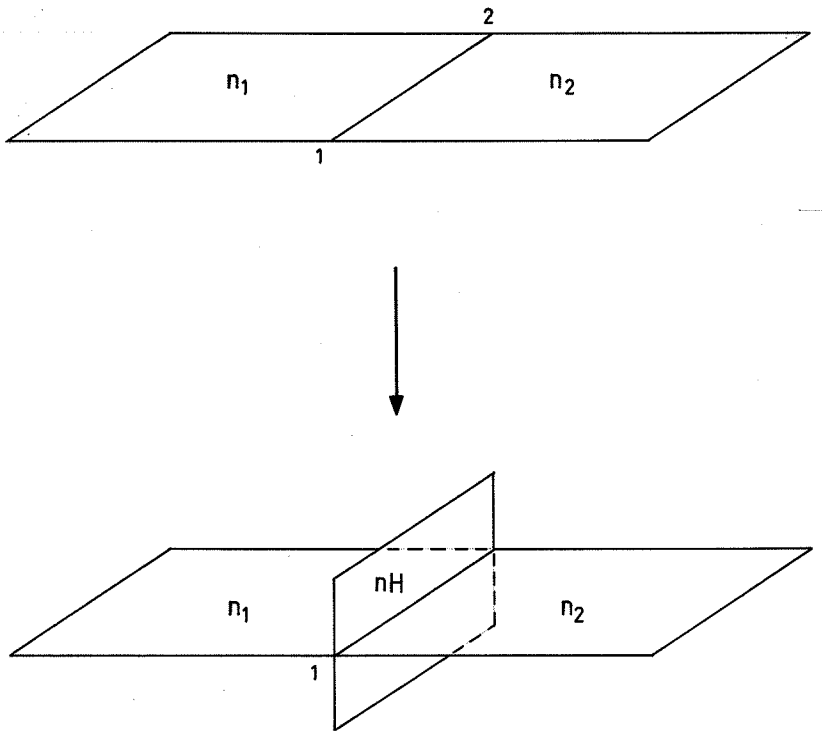
Skiverepræsentationen har i det foregående været beskrevet i relation til et konkret eksempel. Denne beskrivelse dækker de fleste aspekter ved skiverepræsentationen bortset fra det tilfælde, hvor en skivekonstruktion indeholder flere skiveelementer, som ligger i samme plan.

En skiverepræsentation for en skivekonstruktion, hvor flere elementer ligger i samme plan, vil i den geometriske del indeholde flere planer med samme ligning. Hvis elementerne, som ligger i samme plan, ikke er indbyrdes samlede, men kun indirekte har forbindelse med hinanden, frembyder elementer i samme plan ikke noget problem.

Hvis elementerne i samme plan derimod er direkte samlede, kan dette ikke umiddelbart beskrives af skiverepræsentationen, da skæringslinien mellem to sammenfaldende planer ikke er entydigt bestemt, idet enhver linie i den fælles plan kan opfattes som skæringslinie.

Skiverepræsentationen skal derfor i dette tilfælde suppleres med nogle oplysninger, som kan udpege hvilken eller hvilke af de uendelig mange skæringslinier, som skal anvendes.

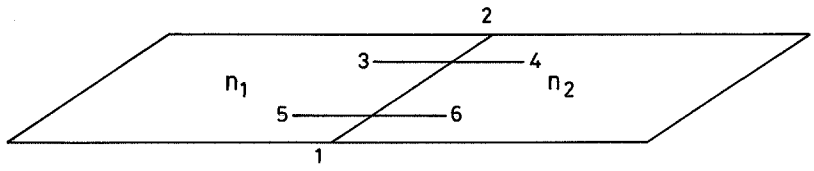
For at undgå, at udpegningen af de relevante skæringslinier mellem skiver i samme plan ændrer skiverepræsentationens udseende, defineres disse linier ved hjælp af hjælpeplaner og hjælpesamlinger, som vist på figur 16.



Figur 16. Samling mellem 2 elementer i samme plan.

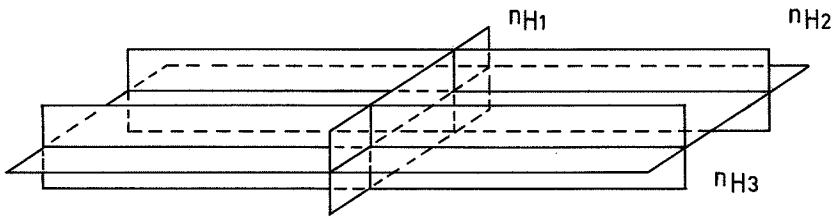
Man kan sige, at kraftoverføringen mellem skiveelementer, som ligger i forskellige planer, er geometrisk bestemt til at ligge i planernes skæringslinie, mens kraftoverføringen mellem skiveelementer i samme plan er geometrisk ubestemt og kan finde sted langs vilkårlige linier i den fælles plan. På figur 17 er vist, hvorledes man, uden at skiverepræsentationens udseende ændres, kan beskrive en kraftoverføring mellem 2 skiver i samme plan langs 3 linier.

Kraftoverføringen mellem n_1 og n_2 kan ske langs linierne 1 2, 3 4 og 5 6.



Hjælpeplaner : n_{H1}, n_{H2}, n_{H3}

Hjælpesamlinger: $(n_1,n_{H1}),(n_{H2},n_2),(n_1,n_{H2}),$
$(n_{H2},n_2),(n_1,n_{H3}),(n_{H3},n_2)$



Figur 17. Samlinger mellem skiver i samme plan, beskrevet ved hjælp af hjælpeplaner og hjælpesamlinger.

Under forudsætning af, at skivekonstruktioner med flere elementer i samme plan behandles, som beskrevet i det foregående, gælder det, at enhver skivekonstruktion har en skiverepræsentation.

Den omvendte formulering, at der til enhver skiverepræsentation svarer en skivekonstruktion, gælder kun under forudsætning af, at den topologiske del af skiverepræsentationen ikke indeholder samlinger mellem skiveelementer, som ligger i samme plan, ligesom den heller ikke må indeholde samlinger mellem elementer, som ligger i parallelle planer.

2.6 Stabile og ustabile beskrivelse af et polyeder.

Som afslutning på dette kapitel betragtes skive- og gitterrepræsentationen fra en rent geometrisk beskrivende synsvinkel, og for simpelheds skyld betragtes kun polyedre.

Det er klart, at enhvert polyeder enten kan beskrives ved koordinaterne til dets hjørnepunkter og forbindelseslinierne mellem disse (gitterbeskrivelse) eller ved ligningerne til dets flader og disses skæringslinier (skivebeskrivelse).

Betragtes den samlede mængde af polyedre under et, kan den ene beskrivelsesmåde være ligeså god, som den anden.

Betragter man et konkret polyeder, er der derimod ofte grund til at foretrække den ene frem for den anden.

Et tilfældigt hexaeder (det polyeder, hvis regulære variant er terningen) har en skivebeskrivelse, som består af ligningerne for 6 planer og 12 samlinger (parringer).

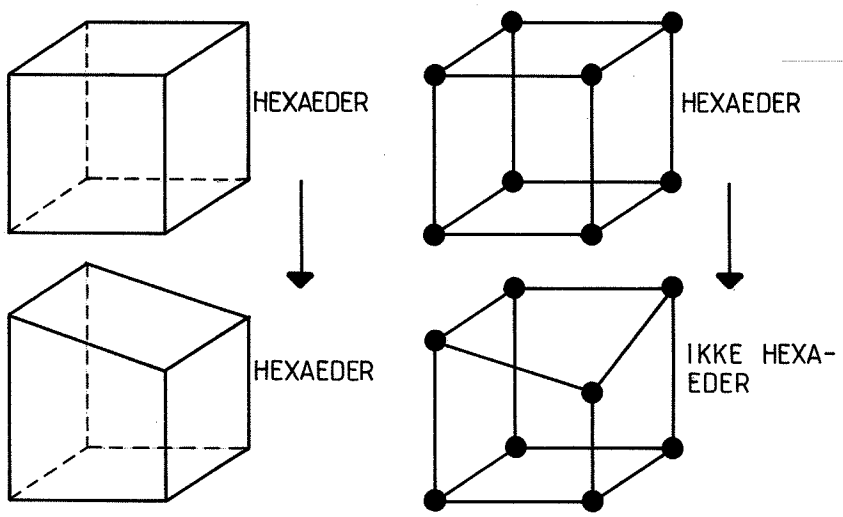
Forestiller man sig disse oplysninger repræsenteret i en datamat, vil den geometriske del blive repræsenteret af flydende tal med en for datamaten karakteristisk afrundingsfejl, mens den topologiske del kan repræsenteres eksakt af heltal.

Tages disse data helt bogstaveligt, kan de utvetydigt tolkes som et polyeder med 6 flader, altså et hexaeder, hvis dimensioner på nær datamatens afrundingsfejl ikke afviger fra det oprindelige hexaeder.

Anvendes gitterbeskrivelsen på det samme hexaeder, vil denne bestå af koordinaterne til 8 punkter og en angivelse af 12 forbindelseslinier mellem disse punkter. Skal disse data repræsenteres i en datamat, vil koordinaterne til punkterne blive repræsenteret af flydende tal, mens forbindelseslinierne kan repræsenteres eksakt af heltal.

En bogstavelig tolkning af disse data fører ikke til, at det drejer sig om et hexaeder, idet man på grund af afrundingsfejlene ikke 100% sikkert kan afgøre, om 4 punkter ligger i samme plan.

Man kan sige, at skivebeskrivelsen af hexaedret er stabil, idet beskrivelsen stadig beskriver et hexaeder ved små ændringer af planernes placering. Omvendt er gitterbeskrivelsen af hexaedret ustabil, idet selv en nok så lille ændring af koordinaterne til et af hjørnepunkterne bevirker, at en eller flere af fladerne bliver krumme. Se figur 18.



Figur 18. Stabil og ustabil beskrivelse af et hexaeder.

Betragtes i stedet oktaedret, giver lignende betragtninger, at dette polyeder har en stabil gitterbeskrivelse og en ustabil skivebeskrivelse.

Konklusionerne vedrørende hexaedret og oktaedret kan uden videre generaliseres til vilkårlige polyedre, idet der for et polyeder, hvor der til alle hjørner støder 3 og kun 3 flader, gælder, at dets skivebeskrivelse er stabil, mens dets gitterbeskrivelse er ustabil, mens der for et polyeder, hvor alle flader er trekantede, gælder, at dets skivebeskrivelse er ustabil, og dets gitterbeskrivelse er stabil.

Polyedre, som ikke kun indeholder trekantede flader eller kun trekantede hjørner, har hverken en stabil gitterbeskrivelse eller en stabil skivebeskrivelse.

Disse geometriske forhold afspejles direkte i polyedrenes konstruktionsmæssige egenskaber, idet der som påvist i [3] gælder, at opbygges et polyeder, som har en stabil skivebeskrivelse som en skivekonstruktion, er denne statisk stabil, mens den udført som gitterkonstruktion er ustabil. Omvendt gælder, at en polyeder, som har en stabil gitterbeskrivelse, er statisk stabil som gitterkonstruktion og statisk ustabil som skivekonstruktion.

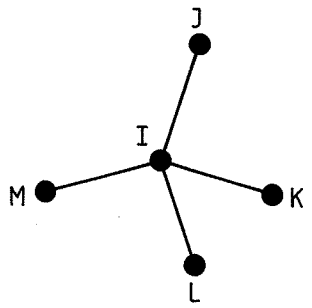
Polyedre, som hverken har en stabil skivebeskrivelse eller en stabil gitterbeskrivelse, er ustabile, hvad enten de realiseres som gitterkonstruktioner eller som skivekonstruktioner.

3. GENERERING AF REGULÆRE SKIVEKONSTRUKTIONER.

Som udgangspunkt for genereringen af regulære skivekonstruktioner betragtes basisudfoldningen af en skiverepræsentation, hvor alle samlingerne indgår i mindst én triplet. Som omtalt i forrige kapitel, fås basisudfoldningen ved for hver skiveplan at bestemme de punkter, hvor to andre skiveplaner skærer den pågældende plan, og derefter forbinde disse punkter i overensstemmelse med tripletterne. Det blev også omtalt, at de skiveelementer, som fremkommer af basisudfoldningen, kaldes skiverepræsentationens basiselementer. Den manglende præcision i denne formulering dækker over, at ikke alle basisudfoldninger fører til basiselementer, der kan karakteriseres som skivelementer, og der skal derfor først redegøres for, under hvilke omstændigheder en basisudfoldning fører til basisskiveelementer.

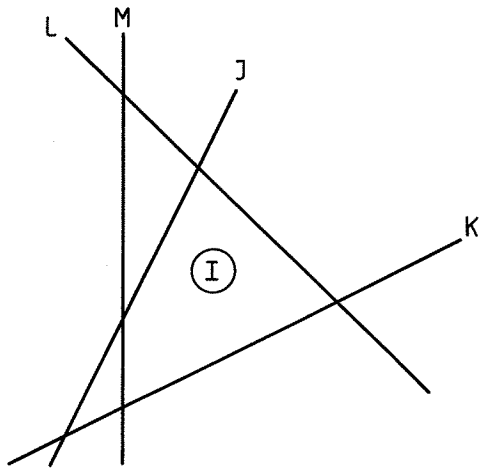
3.1 Basisskiveelementer.

Der betragtes en enkelt af skiverne i en skiverepræsentation, og for simpelheds skyld forudsættes den kun at være direkte samlet til 4 naboskiver. Den duale gitterrepræsentation til denne problemstilling er vist på figur 19.



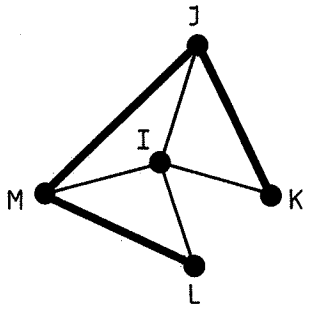
Figur 19. Det duale gitter til en skive samlet til 4 naboskiver.

Knude I er det duale knudepunkt til den betragtede skive, mens J, K, L, M er naboskivernes duale knuder. Naboskivernes skæringslinier med den betragtede skive er vist på figur 20.



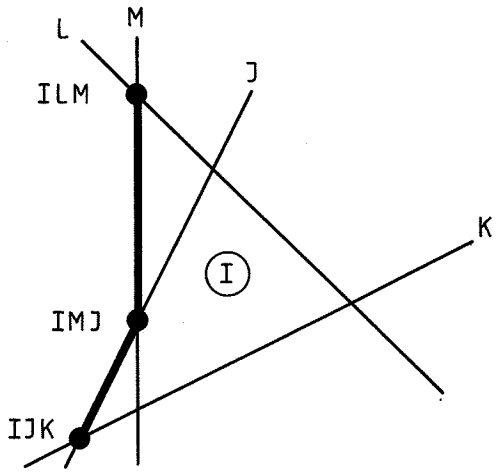
Figur 20. Udfoldning af skive I.

Det antages nu, at hver samling indgår i mindst en triplet, og der må derfor mellem naboskiverne til skive I være mindst 3 samlinger, f.eks. som vist på det duale gitter på figur 21.



Figur 21. Det duale gitter, hvor hver samling indgår i en triplet (trekant).

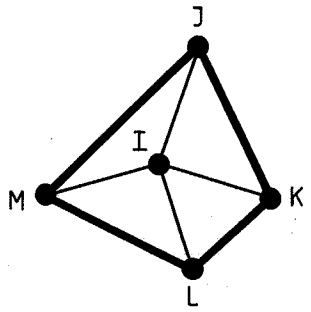
Tripletterne er ILM, IMJ, IJK, og basisudfoldningen kan nu findes, som vist på figur 22.



Figur 22. Basisudfoldningen.

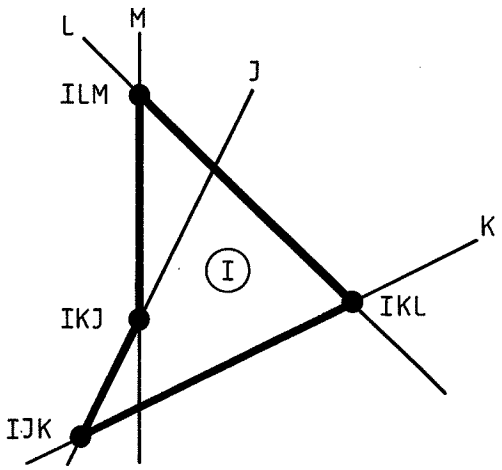
Det ses, at denne basisudfoldning ikke danner et skiveelement.

Tilføjes samlingen LK, bliver det duale gitter, som vist på figur 23.



Figur 23. Det duale gitter.

Tripletterne er nu ILM, IJK, IKL, og den tilhørende basisudfoldning er vist på figur 24.



Figur 24. Basisudfoldning svarende til firgur 23.

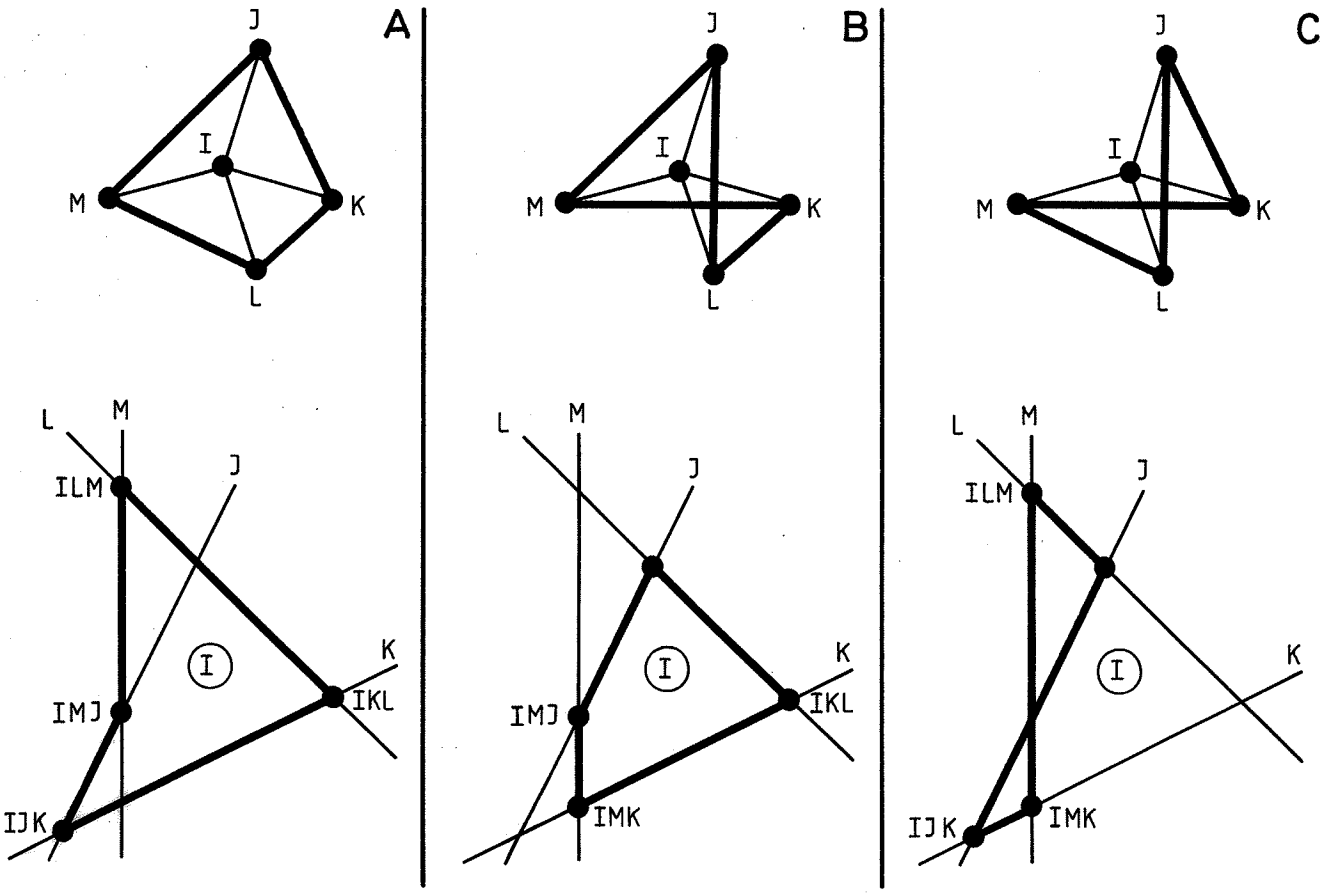
Skærer man langs forbindelseslinierne i denne basisudfoldning, fås et basisskiveelement.

Følgen af samlinger mellem naboknuderne i gitteret på figur 21 (LM, MJ, JK) kaldes for en gittervej (vej er en grafteoretisk betegnelse), og følgen af forbindelseslinier mellem tripletterne kaldes for en skivevej. På tilsvarende måde kaldes følgen af samlinger mellem naboknuder i gitteret på figur 23 for en gitterkreds (kreds er også en grafteoretisk betegnelse), mens følgen af forbindelseslinier mellem tripletterne i figur 24 kaldes en skivekreds.

I det givne eksempel har man altså, at en gittervej mellem naboknuderne til en given knude svarer til en skivevej i den duale skiveplan til den givne knude, som er en side kortere, og en gitterkreds svarer til en skivekreds med samme antal sider.

Dette udsagn gælder for vilkårlige veje og kredse og for tilfælde med et vilkårligt antal naboskiver (knuder).

En nødvendig betingelse, for at basisudfoldningen for en given skive fører til et basisskiveelement, er altså, at der findes en kreds af samlinger mellem naboskiverne til den givne skive. At denne betingelse ikke er tilstrækkelig, ses af figur 25, hvor basisudfoldningerne, svarende til samtlige 4-kredse i det duale gitter, er optegnet. En 4-kreds er en kreds indeholdende 4 sider.



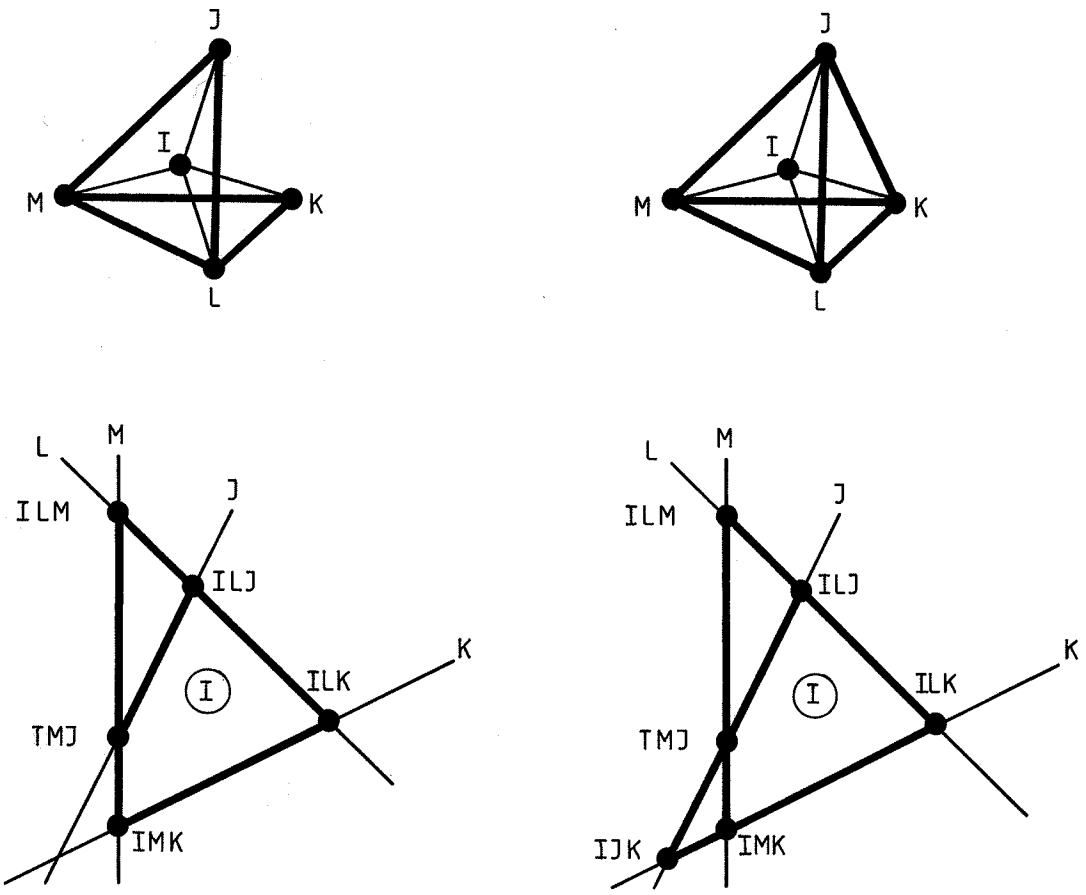
Figur 25. Basisudfoldningen svarende til 4-kredse.

Det ses, at kun basisudfoldningerne A og B fører til et skiveelement, mens en skæring langs forbindelseslinierne i tilfælde C fører til 2 elementer.

Meget tyder på, at det altid er muligt at finde en gitterkreds, omfattende samtlige naboknuder til en given knude, som fører til,at forbindelseslinierne i den duale skiveplan danner et basisskiveelement.

Et basisskiveelement, som svarer til en enkelt gitterkreds, er karakteriseret ved, at det kun er elementets rande, som indgår i parringer med andre elementer.

Tilføjes der stænger udover dem, som svarer til en gitterkreds, fås basisudfoldninger, som vist på figur 26.

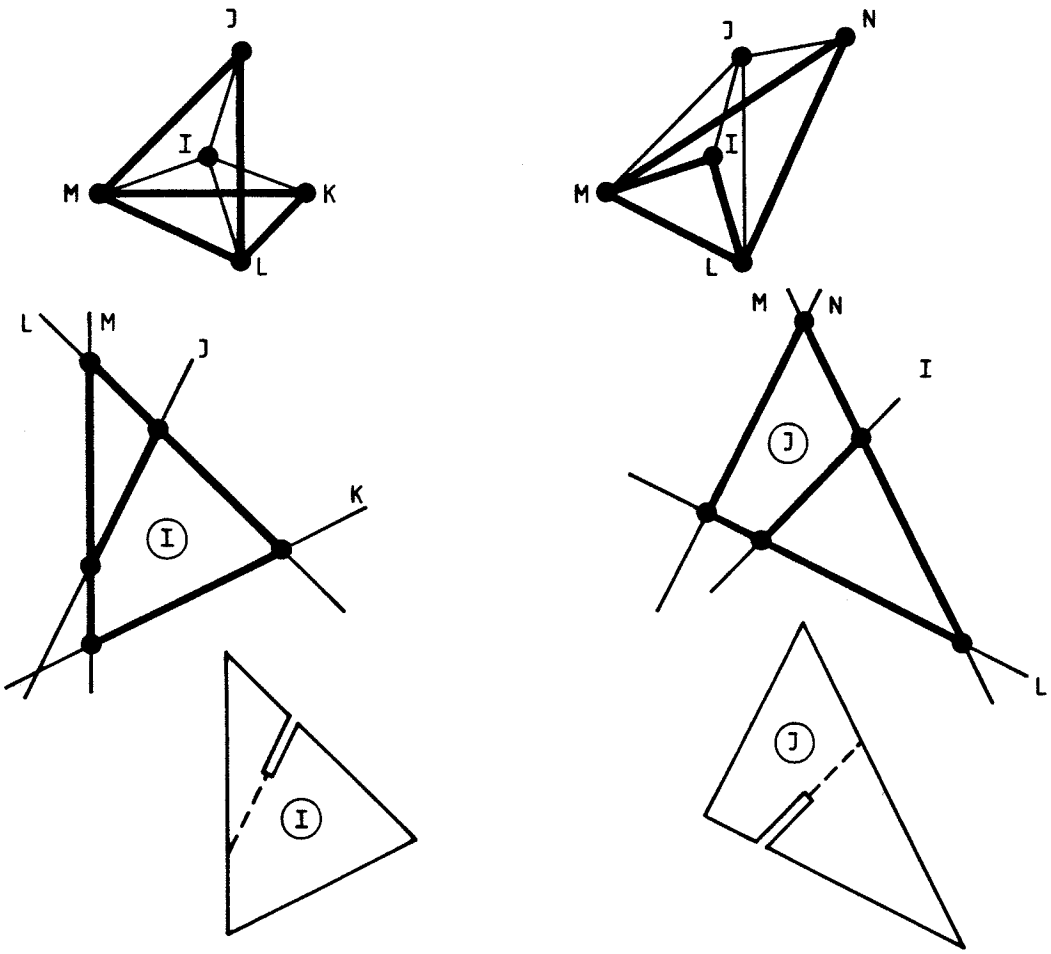


Figur 26. Basisudfoldninger svarende til flere gitterkredse.

Skæres der efter samtlige forbindelseslinier i disse udfoldninger, fås 2 og 3 elementer.

Basiselementet defineres derfor i dette tilfælde som det element, der fremkommer, når man kun skærer langs de ydre linier.

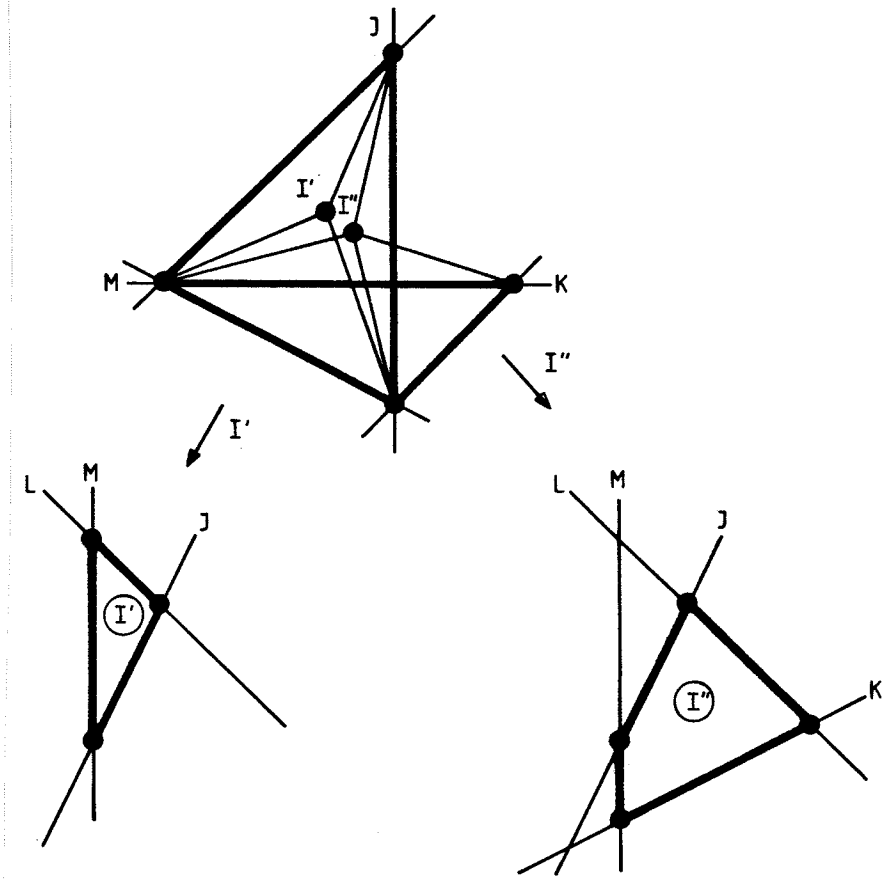
Det er klart, at basiselementer, defineret på denne måde, kun direkte kan indgå som skivelementer i en realiserbar skivekonstruktion, hvis de indre linier, som elementerne indeholder, skal parres med randlinier i andre elementer. Har man derfor et tilfælde, hvor 2 basiselementer skal parres langs en indre linie i begge elementer, må man forsyne hvert af dem med en slids, som vist på figur 27.



Figur 27. Basiselementer indeholdende en slids.

Placeringen af slidserne i de to elementer kan foretages på mange forskellige måder, blot de tillader parringen IJ,JI, og ikke snitter nogen af elementerne helt igennem.

Hvis f.eks. elementet i plan I snittes over langs linien J, fås 2 skiveelementer, og det duale gitter til dette tilfælde bliver, som vist på figur 28.



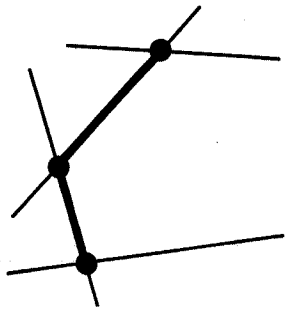
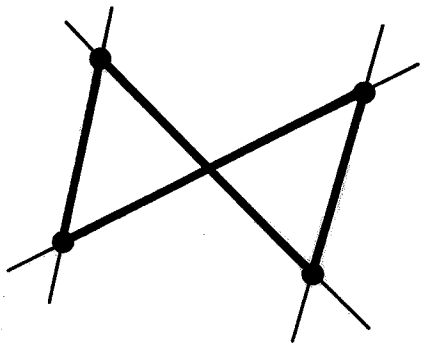
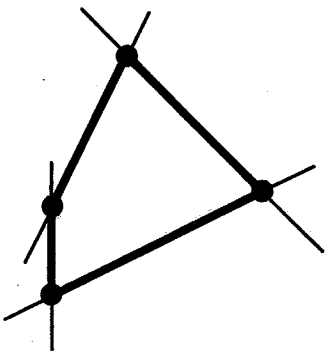
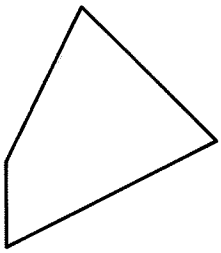
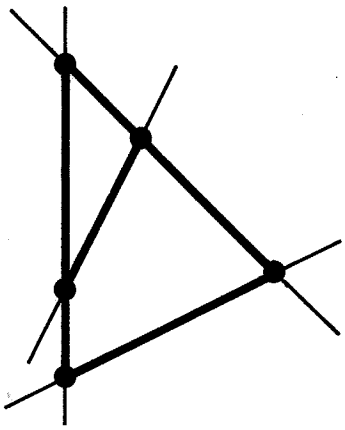
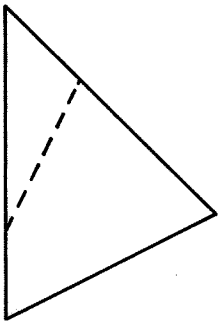
Figur 28. Gennemskæring af elementet i plan I.

Man har derfor, at den duale operation til en gennemskæring består i, at erstatte en enkeltknude med en dobbeltknude. Foretager man gennemskæringen af element I, behøver element J i figur 27 ikke at indeholde nogen slids.

På grundlag af denne gennemgang kan der nu gives en mere præcis definition på et basisskiveelement.

Et basisskiveelement er et plant element, hvis rand udgøres af forbindelseslinier i en basisudfoldning af en skiveplan, og hvis indre er markeret med basisudfoldningens resterende linier.

I tabellen på figur 29 er vist hovedtilfældene.

Basisudfoldning	Basisskiveelement	Bemærkninger
		
		En skivekreds som skærer sig selv. Kan omdannes til et basisskiveelement ved stangombytning, se afsnit 3.3.4.
		Elementudformningen er geometrisk bestemt uafhængig af de øvrige elementers udformning.
		Elementudformningen er geometrisk ubestemt, idet placeringen og længden af en evt. slids langs den stiplede linie afhænger af naboelementernes udformning.

Figur 29. Fra basisudfoldning til basiselement.

Der findes altså 2 hovedtyper af basisskiveelementer - en med og en uden indre linier.

I det følgende betragtes 2 specielle klasser af skivekonstruktioner. Den ene klasse af skivekonstruktioner er opbygget af elementer uden indre linier. Denne klasse er karakterisert ved, at alle samlingerne er af typen rand-rand.

Den anden klasse er karakteriseret ved, at alle samlinger er af typen rand-indre linie. Elementerne i denne klasse må indeholde indre linier, men der kan også indgå enkelte rene randelementer.

Den første klasse af skivekonstruktioner kan geometrisk klassificeres som facetterede flader, der kan være lukkede som f.eks. en kugle og en torus, eller åbne som f.eks. en hyperbolsk parabolide og en cylinderflade (halvåben). Topologisk kan de karakteriseres som encellede.

Den anden klasse af skivekonstruktioner fører til strukturer, som kan karakteriseres som flercellede, idet kravet om, at alle samlinger skal være af typen rand-indre linie, fører til, at der hele tiden dannes lukkede rum.

Først behandles de flercellede skivekonstruktioner.

3.2 Flercellede skivekonstruktioner.

Kravet om, at alle samlinger i denne klasse skal være af typen rand-indre linie bevirker, at konstruktionerne i deres rene form må være uendelige. Dette betyder, at fysiske modeller af denne klasse af skivekonstruktioner enten må afsluttes med nogle samlinger af typen rand-rand, eller at nogle af yderelementernes linier må være uparrede.

Behandlingen af flercellede skivekonstruktioner vil her blive begrænset til kun at omfatte de periodiske, dvs. de, som kan beskrives ved et motiv, som gentages i forskellige retninger i rummet.

Begrænsningen til de periodiske bevirker, at samtlige elementer i konstruktionen må være beliggende i planer, som indgår i 3 eller flere parallelbundter af ækvidistante planer.

Som en yderligere begrænsning vil kun tilfældet 3 hinanden skærende parallelbundter af ækvidistante planer blive behandlet.

Der er flere forhold, som bevirker, at disse begrænsninger ikke er så indsnævrende, som man umiddelbart kunne tro.

Begrænsningen til de periodiske er i teorien ikke en indskrænkning, idet enhver fysisk realisabel skivekonstruktion kan indgå som en del af en periodisk skivekonstruktion.

Begrænsningen til kun at behandle tilfældet 3 parallelbundter af planer, er der flere årsager til.

Hovedårsagen er, at den geometriske figur, som dannes, når man skærer 3 parallelbundter af ækvidistante planer med hinanden, altid er periodisk med et parallellepipidum som motiv.

Tilfældene 4 eller flere parallelbundter danner kun periodiske figurer, når afstandene mellem planerne i de enkelte parallelbundter er relateret til vinklerne mellem normalerne til de enkelte bundter på ganske bestemte måder. Dette emne er velbehandlet inden for krystallografien, og kaldes loven om rationale indices, se [10], og ud fra den kan man på simpel vis finde periodiske figurer, dannet af et vilkårligt antal af parallelbundter af ækvidistante planer. En undersøgelse af tilfældene 4 eller flere parallelbundter af planer kan derfor behandles som tilfældet 3 parallelbundter af planer, gennemskåret af 1 eller flere andre parallelbundter af planer.

Der betragtes nu 3 på hinanden vinkelrette parallelbundter af ækvidistante planer. Det generelle tilfælde, hvor planerne ikke står vinkelret på hinanden, fås ved en affinitetstransformation. De grundliggende metoder for behandlingen af denne problemstilling er beskrevet i [2] "Rumlige periodiske strukturer opbygget af plane elementer".

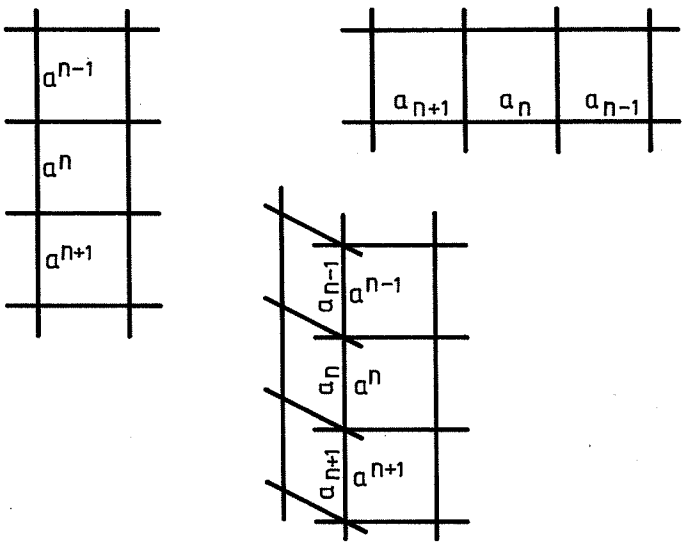
Fremstillingen i [2] er baseret på et nummereringssystem for snitmønstre i en plan. Man kan imidlertid også behandle problemstillingen uden brug af dette nummereringssystem på en måde, som mere logisk hænger sammen med udledelsen af tripletten i kapitel 2.

Planerne i 3 parallelbundter af ækvidistante planer, som står vinkelret på hinanden, danner ved deres skæring et kvadratnet i hvert plan.

Gives hver kvadratnetside i alle planerne et navn, kan planernes skæringer med hinanden beskrives ved et uendeligt sæt af navneparringer.

De plane elementer, ud fra hvilke en flercelles skivekonstruktion kan opbygges, udskæres fra planer, indeholdende lignende navngivne kvadratnet, langs siderne i nettene. En samling af sådanne markerede elementer kan samles til en flercellet skivekonstruktion ved at parre de navngivne kvadratnetsider korrekt, hvis udskæringen af elementerne har fulgt visse regler.

Tildelingen af navne til kvadratnetsiderne foretages efter følgende konvention:
Hver linie i et kvadratnet gives et indiceret navn, hvor index angiver den enkelte kvadratnetside på linien. Hvis 2 sider i forskellige planer skal parres, gives de samme navn og samme index, hvor index placeres foroven og forneden for at skelne mellem de to planer, som vist på figur 30.



Figur 30. Tildeling af navne til 2 linier, som skal parres.

Parringen af de 2 linier i figur 30 medfører følgende uendelige sæt af kvadratnetsideparringer

$$(a_{n-1},a^{n-1}),\ (a_n,a^n),\ (a_{n+1},a^{n+1}), \qquad (9)$$

Da en parring af 2 kvadratnetsider medfører, at alle siderne på de 2 linier er parrede, kan (9) også skrives som

$$(a_i,a^i) \qquad (10)$$

Det følger, at hvis alle linierne i alle kvadratnettene er tildelt indicerede navne, må dette sæt af navne have den egenskab, at de kan ordnes i par, hvis deres parring skal svare til skæringen af alle planerne i 3 bundter af planer. Parringen af linierne skrives som

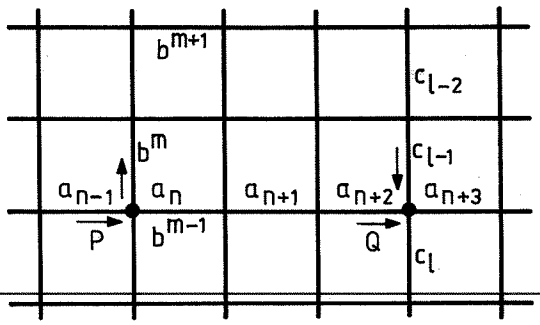
$$(a_i,a^i),\ (b_i,b^i),\ \ldots\ldots\ (x_i,x^i), \qquad (11)$$

hvor x_i og x^i er navne tildelt linier i planer fra forskellige bundter.

Betingelsen for, at sættet af indicerede navne kan ordnes i par svarende til (11), udgør kun en nødvendig betingelse for, at parringen af navnene kan svare til skæringerne mellem 3 bundter af parallelle planer. En tilstrækkelig betingelse fås ved, at man betragter punkter, hvor 3 planer skærer hinanden.

Et punkt i et kvadratnet kan karakteriseres ved navnene på 2 kvadratnetsider vinkelret på hinanden og skærende hinanden i punktet. Punkterne P og Q i figur 31 karakteriseres ved navnene

$$a_n b^m\ (P) \quad \text{og} \quad a_{n+3} c^l\ (Q)$$



Figur 31. To punkter karakteriseret ved navne på kvadratnetsider

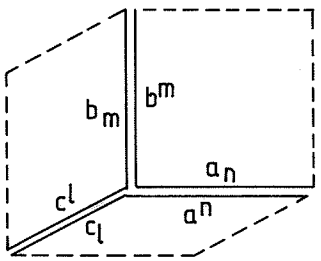
P: $a_n b^m$

Q: $a_{n+3} c_l$

Da der støder 4 kvadratnetsider op til hvert punkt, kan de to kvadratnetsider, som karakteriserer punktet, vælges på flere måder. Ved hvert af punkterne P og Q på figur 31 er der vist 2 pile, som peger i retning af voksende index, og valget af navne er her og i det følgende bestemt af disse piles positive retning.

Det skal også bemærkes, at f.eks. punktet P kunne defineres ved de to navne a og b uden index. Karakteriseringen af punktet v.h.a. 2 indicerede navne bevirker, at denne også indeholder information om, hvordan de 2 linier er indiceret i forhold til deres fælles skæringspunkt, og dette udnyttes i det følgende.

Skæringen mellem 3 planer i et punkt er vist på figur 32.



Figur 32. Skæring mellem 3 planer.

Informationen, indeholdt i figur 32, kan typografisk skrives som

$$c_l a^n, a_n b^m, b_m c^l \qquad (12)$$

og kaldes en mønstertriplet, for at skelne den fra den i kapitel 2 udledte triplet.

I princippet udtrykker mønstertripletten og tripletten, udledt i kapitel 2 det samme, nemlig skæringen mellem 3 planer i et punkt. Forskellen mellem dem ligger i, hvorledes planerne og deres skæring beskrives (navngives).

I mønstertripletten er de enkelte planer ikke navngivne, men de er karakteriseret ved det navngivne kvadratnet, de indeholder. I modsætning hertil angiver tripletten i kapitel 2 skæringen mellem 3 navngivne planer.

I mønstertripletten angiver 2 navne uden skilletegn et punkt i et kvadratnet, mens 2 navne, adskilt af et komma, angiver en parring mellem 2 kvadratnetsider. Hvis alle punkterne i et givent sæt af navngivne kvadratnet kan indordnes i et sæt af mønstertripletter, således at alle punkter tilhører én og kun én mønstertriplet, og mønstertripletterne kun indeholder punkter fra sættet af kvadratnet, så vil

parringen af linierne fra de forskellige kvadratnet svare til skæringen mellem 3 parallelbundter af planer.

Hvis disse planer er materielle, er skæringerne kun mulige, hvis planerne indeholder snit mindst langs halvdelen af kvadratnetsiderne. Dette opnås, hvis man for hver parring mellem kvadratnetsider a_n, a^n snitter langs en af siderne.

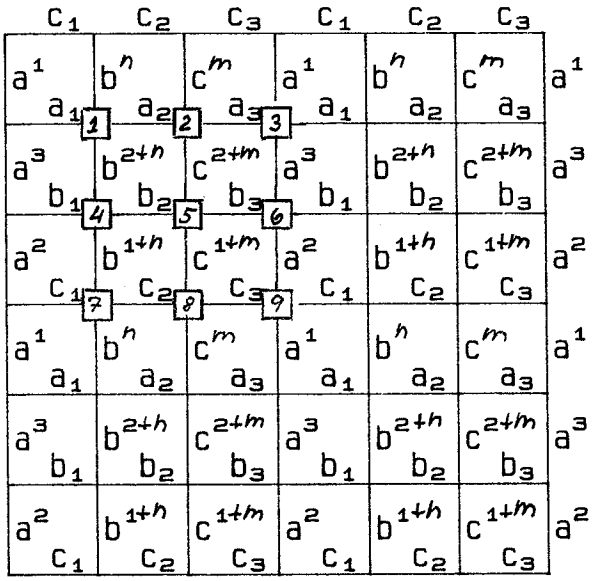
Det skal herefter vises, hvorledes man v.h.a. mønstertripletten kan bestemme et sæt af navngivne kvadratnet, fra hvilke plane elementer kan udskæres, så de kan samles til en flercellet skivekonstruktion.

3.2.1 Bestemmelse af navngivne kvadratnet.

Som omtalt i indledningen, omhandler dette kapitel kun periodiske flercellede skivekonstruktioner, og derfor har kun de kvadratnet, hvor navnene er tildelt på en systematisk måde, interesse.

Som udgangspunkt betragtes det tilfælde, hvor alle kvadratnet er tildelt de samme navne. Endvidere forudsættes det, at navnene på kvadratnetsiderne danner et periodisk mønster.

På figur 33 er perioden 3 i kvadratnettets to retninger.



Figur 33. Kvadratnet med navne, som danner et periodisk mønster med perioden 3 i begge retninger.

Periodiciteten medfører, at mønsteret kan repræsenteres af de 9 markerede punkter på figuren.

Mønsteret af navne i figur 33 er først endeligt fastlagt, når værdierne af indexparametrene n og m er bestemt.

For at undersøge om et sæt af planer, alle indeholdende det på figur 33 viste mønster, kan parres i overensstemmelse med navnene, er det tilstrækkeligt kun at betragte de 9 markerede punkter og efterprøve, om de kan indordnes i et sæt af mønstertripletter.

Punkt 1 er karakteriseret ved de to navne $a_2\ b^n$. En mønstertriplet indeholdende disse 2 navne kan konstrueres som

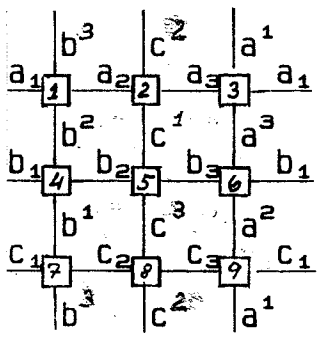
$$,a_2b^n, \Rightarrow a^2,a_2b^n,b_n \Rightarrow c_1a^2,a_2b^n,b_nc^1$$

Første skridt fås ved, at a_2 skal parres med a^2 og b^n med b_n. Andet skridt bestemmes af, at c_1a^2 er det eneste punkt i mønsteret, som indeholder a^2, og at c_1 skal parres med c^1.

Hvis punktet b_nc^1 skal tilhøre mønsteret, så skal

$$b_nc^1 = b_3c^{m+2} \Rightarrow n = 3 \text{ og } m = -1$$

Mønsteret er nu fuldstændigt fastlagt, som vist på figur 34.



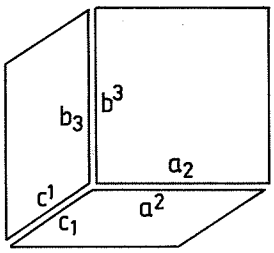
Figur 34. Kvadratnet med fastlagte navne og indicies.

Det sæt af tripletter, som på denne måde kan konstrueres, er:

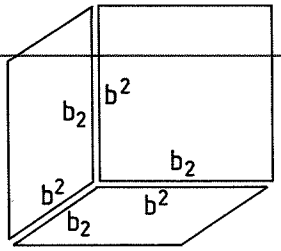
$c_1\ a^2,\ a_2\ b^3,\ b_3\ c^1;$	9	1	5	Numre på skærings-punkter, som indgår i mønster-tripletterne
$b_2\ b^2,\ b_2\ b^2,\ b_2\ b^2;$	4	4	4	
$a_3\ c^2,\ c_2\ b^1,\ b_1\ a^3:$	2	7	6	
$c_3\ c^3,\ c_3\ c^3,\ c_3\ c^3;$	8	8	8	
$a_1\ a^1,\ a_1\ a^1,\ a_1\ a^1;$	3	3	3	

Det ses, at hvert punkt i kvadratnettet indgår i kun én mønstertriplet, og at alle punkter, som indgår i mønstertripletterne, også er punkterne i kvadratnettet. Dette betyder, at et sæt af planer, som alle indeholder mønsteret fra figur 34, kan parres således, at de indgår i 3 parallelbundter af planer.

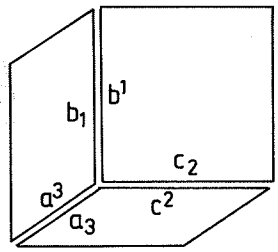
Mønstertripletterne er her givet på typografisk form. På figur 35 er vist, hvorledes kvadratnettene skærer hinanden, svarende til hvert af de 5 mønstertripletter.



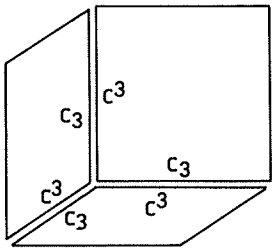
$\Leftrightarrow c_1 a^2 , a_2 b^3 , b_3 c^1$



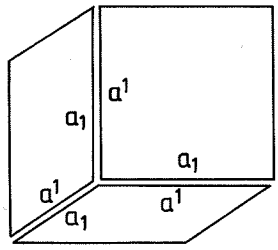
$\Leftrightarrow b_2 b^2 , b_2 b^2 , b_2 b^2$



$\Leftrightarrow a_3 c^2 , c_2 b^1 , b_1 a^3$



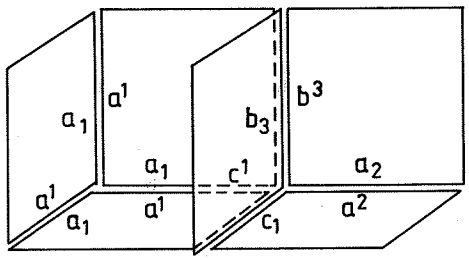
$\Leftrightarrow c_3 c^3 , c_3 c^3 , c_3 c^3$



$\Leftrightarrow a_1 a^1 , a_1 a^1 , a_1 a^1$

Figur 35. Mønstertripletter vist geometrisk og typografisk.

Udfra figur 35 kan man finde, hvorledes de 5 mønstertripletter er placeret i forhold til hinanden i rummet. På figur 36 er vist den indbyrdes placering af 1. og 5. mønstertriplet.

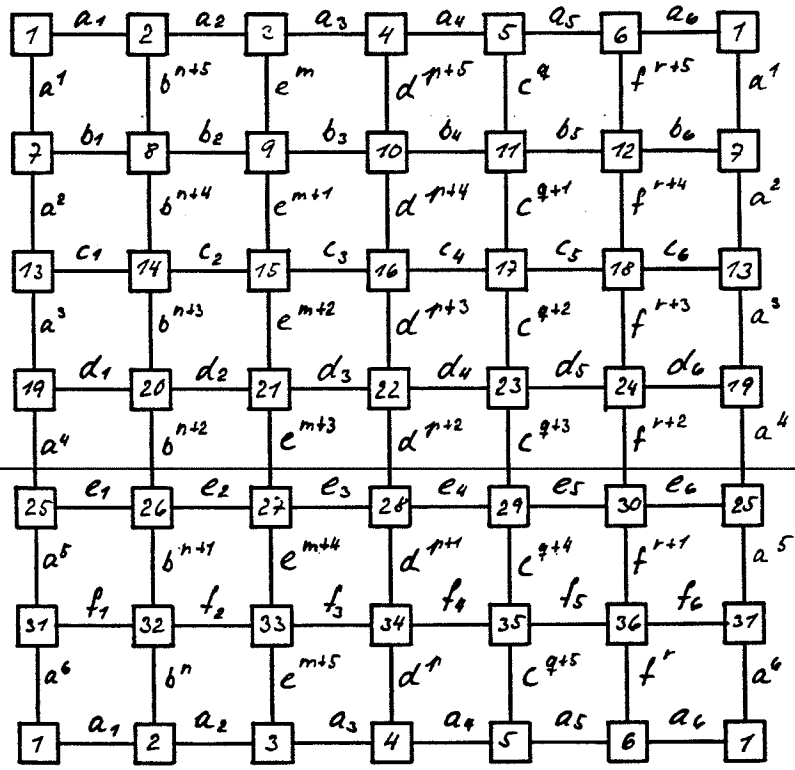


Figur 36. Den indbyrdes placering af 1. og 5. triplet.

Metoden til bestemmelse af liniernes navne og deres indicies i kvadratnettet på figur 34 indeholder 2 faser. Første fase består i at fastlægge navnene på linierne og vælge, hvorledes nogle af navnene skal indiceres. I anden fase undersøges det, om disse navne og de valgte indicies kan indgå i lovlige mønstertripletter. Hvis anden fase giver et positivt resultat, får man samtidigt fastlagt, hvorledes de navne, hvor indicies ikke er valg, skal indiceres.

Til yderligere belysning af metoden skal der bestemmes navne og indices på et kvadratnet med perioden 6.

På figur 37 er vist et kvadratnet, hvor alle liniers navne er fastlagt, og hvor indices er bestemt for alle vandrette linier og en af de lodrette. De variable indices, tildelt de resterende navne, medfører, at nummereringsretningen for indices til disse navne også er fastlagt. Kvadratnettets periode er 6.



Figur 37. Kvadratnet med variabel indeks langs 5 lodrette linier. Perioden er 6.

Det skal nu undersøges, om de 36 forskellige punkter i kvadratnettet kan indgå i et sæt af lovlige mønstertripletter.

Punkt 1:

$$, a_1a^1, \Rightarrow a^1, a_1a^1, a_1 \Rightarrow a_1a^1, a_1a^1, a_1a^1$$

Punkt 7:

$$, b_1a^2, \Rightarrow b^1, b_1a^2, a_2 \Rightarrow b_nb^1, b_1a^2\ a_2b^n$$

hvis denne mønstertriplet skal være lovlig må

$$b_nb^1 = b_2b^{n+5} \Rightarrow n = 2$$

og mønstertripletten bliver

$$b_2b^1, b_1a^2, a_2b^2$$

Punkt 13:

$$, c_1a^3, \Rightarrow c^1, c_1a^3, a_3 \Rightarrow e_mc^1, c_1a^3, a_3e^m$$

man får

$$e_mc^1 = e_5c^{q+4} \Rightarrow m = 5 \text{ og } q = 3$$

og mønstertripletten bliver

$$e_5c^1, c_1a^3, a_3e^5 .$$

Punkt 19:

$$d^1, d_1a^4, a_4 \Rightarrow d_pd^1, d_1a^4, a_4d^p$$

man får

$$d_pd^1 = d_4d^{p+3} \Rightarrow p = 4$$

og mønstertripletten bliver

$$d_4d^1, d_1a^4, a_4d^4 .$$

Punkt 31:

$$f^1, f_1a^6, a_6 \Rightarrow f_rf^1, f_1a^6, a_6f^r$$

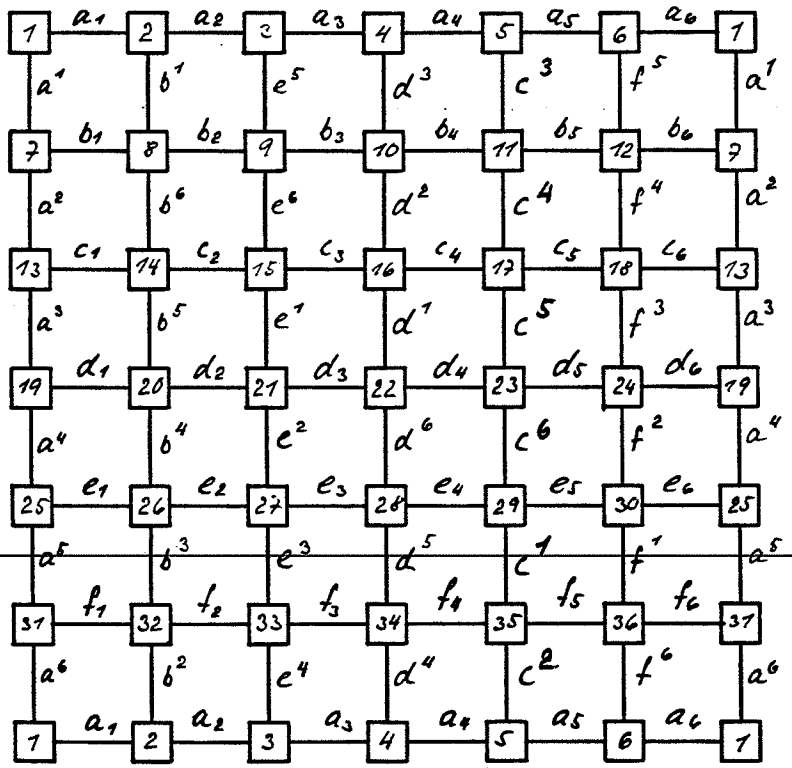
man får

$$f_rf^1 = f_6f^{r+1} \Rightarrow r = 6 ;$$

og mønstertripletten bliver

$$f_6f^1, f_1a^6, a_6f^6 .$$

Samtlige variable indeks er nu bestemt, og kvadratnettet bliver, som vist på figur 38.



Figur 38. Kvadratnet med fastlagte indicerede navne.

Sættet af tripletter som kan konstrueres er:

a_1a^1, a_1a^1, a_1a^1 ;	1	1	1
b_2b^1, b_1a^2, a_2b^2 ;	8	7	2
e_5c^1, c_1a^3, a_3e^5 ;	29	13	3
d_4d^1, d_1a^4, a_4d^4 ;	22	19	4
f_6f^1, f_1a^6, a_6f^6 ;	36	31	6
e_1a^5, a_5c^3, c_3e^1 ;	25	5	15
f_2b^3, b_3e^6, e_6f^2 ;	32	9	30
e_2b^4, b_4d^3, d_3e^2 ;	26	10	21
d_2d^5, b_5c^4, c_4d^2 ;	20	11	16
c_2b^6, b_6f^5, f_5c^2 ;	14	12	35
c_5c^5, c_5c^5, c_5c^5 ;	17	17	17
d_5c^6, c_6f^4, f_4d^5 ;	23	18	34
e_4d^6, d_6f^3, f_3e^4 ;	28	24	33
e_3e^3, e_3e^3, e_3e^3 ;	27	27	27

Numre på skæringspunkter, som indgår i mønstertripletterne.

Det ses, at hvert punkt i kvadratnettet indgår i kun én mønstertriplet, og at alle punkter, som indgår i mønstertripletterne, også er punkter i kvadratnettet.

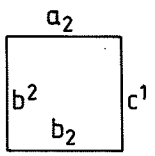
I appendix 1 er der angivet flere navngivne kvadratnet med forskellige perioder.

3.2.2 Generering af plane elementer.

Det skal nu beskrives, hvordan man kan udskære skiveelementer fra et sæt af materielle planer, indeholdende navngivne kvadratnet.

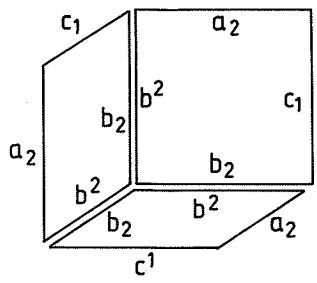
Når planerne er materielle, er parringer langs de forskellige linier i kvadratnettene kun mulige, hvis disse linier indeholder snit, som tillader planerne at skære hinanden. Det forudsættes i det følgende, at snittene placeres således, at kvadratnettenes periodiske egenskaber ikke ændres. Dette opnår man, hvis alle kvadratnetsider med samme navn snittes ens. Endvidere forudsættes det, at snittene fører til, at der dannes endelige elementer, dvs. snittene skal danne lukkede kredse.

Først betragtes den enkleste lukkede kreds, som man kan udskære - et kvadrat. Fra kvadratnettet i figur 34 kan man f.eks. udskære det på figur 39 viste kvadrat.



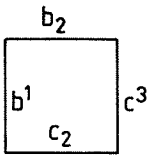
Figur 39. Kvadrat udskåret af kvadratnettet på figur 34.

Af markeringen kan man direkte aflæse, at siderne markeret med a_2 og c^1 vil være uparrede, mens de to sider, markeret b_2 og b^2, skal parres, og elementet fører til den på figur 40 viste opbygning.



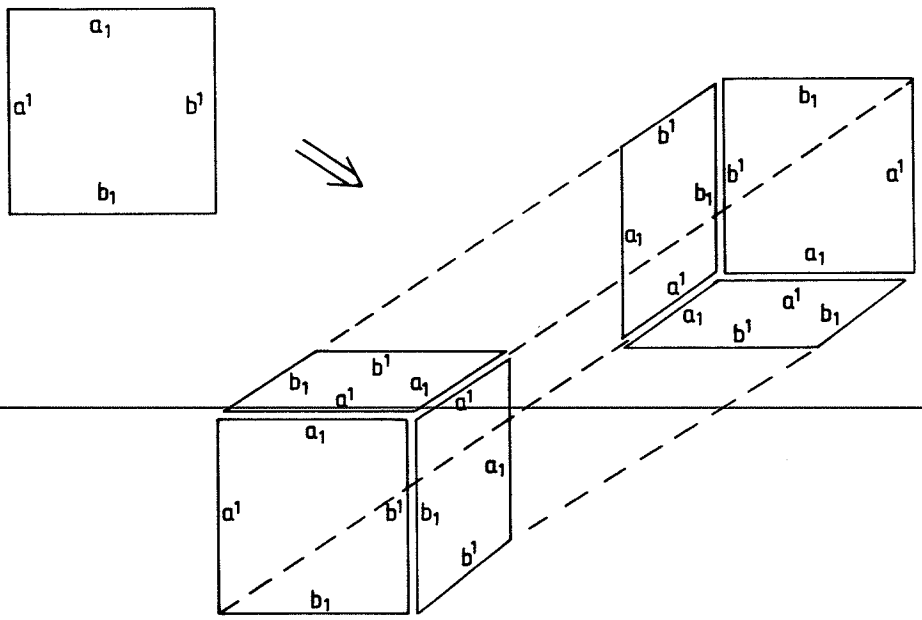
Figur 40. Opbygning bestående af 3 kvadrater.

Udskæres istedet det på figur 41 viste kvadrat, ses det, at alle siderne vil være uparrede, og elementet giver ikke anledning til nogen opbygning.



Figur 41. Kvadrat, som ikke fører til en opbygning.

Af figur 34 ses det, at det ikke er muligt fra dette kvadratnet at udskære et kvadrat uden uparrede sider. Betragter man derimod kvadratnettet på figur 38, findes der her et kvadrat uden uparrede sider, og dette kvadrat fører til en terning, som vist på figur 42.



Figur 42. Element, som fører til en terning. (Terningens 2 halvdele er for overskuelighedens skyld vist adskilte).

Udskærer man et enkelt kvadrat fra et kvadratnet, er der altså 3 tilfælde. Enten fører kvadratet ikke til nogen opbygning, eller også fører det til en opbygning, bestående af 3 elementer, eller det fører til en terning.

Når man udskærer elementer, som er mere komplicerede end et enkeltkvadrat, er tilfældene ikke så enkle at overskue.

3.2.2.1 Minimum- og maximum snitprocesser.

For at få et overblik over, hvilke elementer med tilhørende rumlige opbygning, man kan aflede af givne kvadratnet, betragtes 2 forskellige snitprocesser.

Den første går ud på følgende:
Der søges lagt snit, som danner en lukket kreds, idet der ikke må snittes langs siden med navnet $x^n(x_n)$, hvis der er snittet langs siden med navnet $x_n(x^n)$. Processen er afsluttet, når snittene er bestemt langs samtlige kvadratnetsidepar x_n, n^n.

Denne snitproces kan karakteriseres som en minimum snitproces, idet den fører til, at der netop snittes så meget, at de enkelte planer kan skære hinanden. Alle samlinger mellem elementer, fundet ved denne proces, er af typer rand-indre linie, og den fører derfor normalt til flercellede konstruktioner, som kan udbygges i det uendelige i alle retninger.

Den anden snitproces går ud på følgende:
Der søges lagt snit, som danner en lukket kreds, idet der skal snittes langs siden med navnet $x_n(x^n)$, hvis der er snittet langs siden med navnet $x^n(x^n)$. Processen er afsluttet, når der er dannet en lukket kreds.

Denne snitproces kan karakteriseres som en maximum snitproces. Alle samlinger mellem elementer, fundet ved denne proces, er af typen rand-rand, og den fører derfor til éncellede konstruktioner.

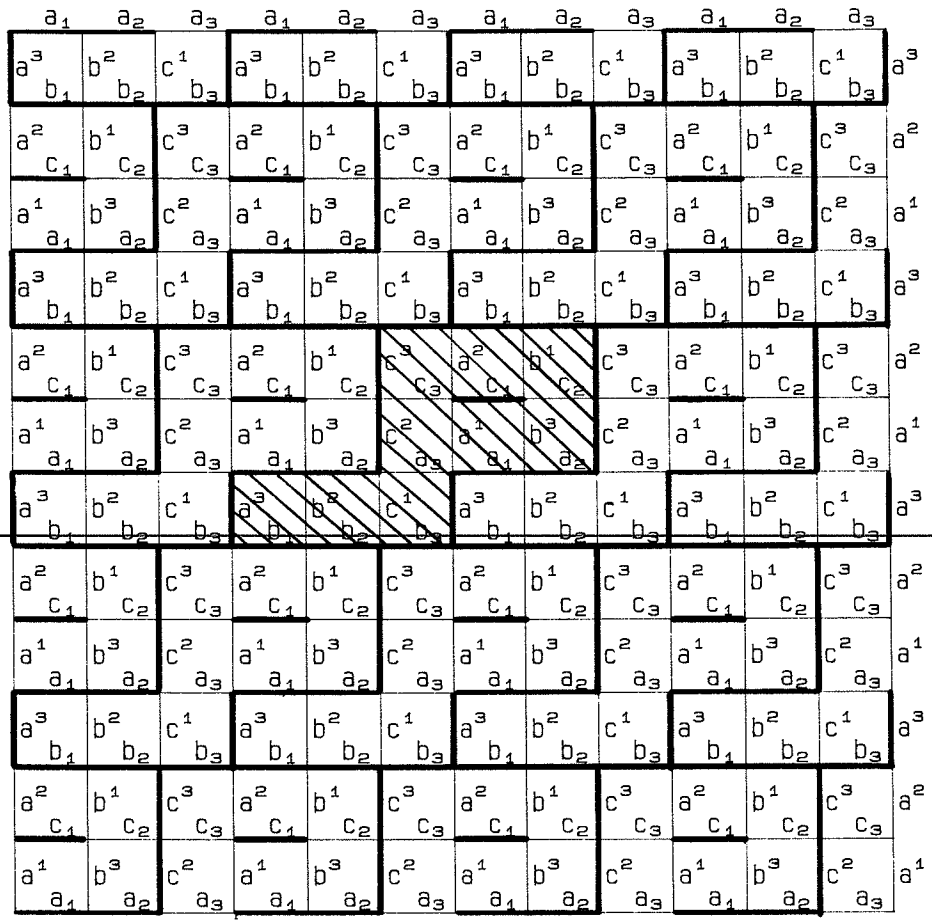
Betragtes de 3 forskellige enkeltkvadrater i forhold til disse 2 snitprocesser, er snitprocessen, som fører til elementet på figur 41, i overensstemmelse med reglerne for minimumssnitprocessen, men da det ikke fører til nogen opbygning, er det i denne sammenhæng uinteressant.

Snitprocessen, som fører til elementet på figur 42, er i overensstemmelse med reglerne for maximumsnitprocessen, og samlingerne mellem disse elementer er da også af typen rand-rand, og terningen er éncellet konstruktion.

Snitprocessen, som fører til elementet i figur 39, er hverken i overensstemmelse med reglerne for minimumsnitprocessen eller maximumsnitprocessen.

I det følgende vil der blive givet eksempler på elementer, udledt ved hjælp af disse 2 snitprocedurer.

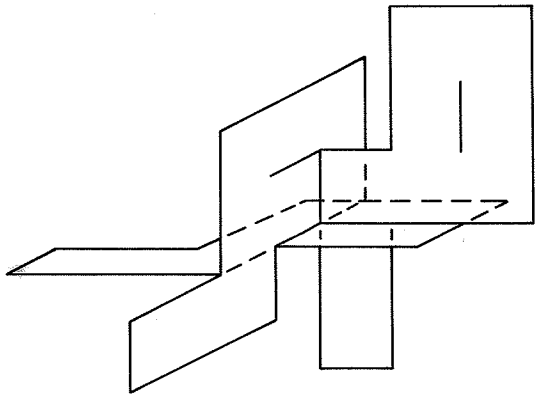
På figur 43 er minimumssnitprocessen anvendt på kvadratnettet fra figur 34.



Figur 43. Minimumsnitproces i kvadratnet.

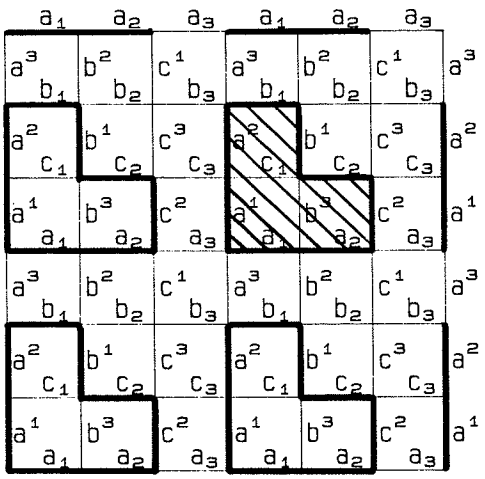
Det er relativt let at vælge snittene i minimumsnitprocessen, således at man får hele planen opdelt i lukkede kredse. I dette tilfælde bliver alle de lukkede kredse, som vist skraveret på figuren.

Med en samling af disse elementer vil en korrekt parring af navnene føre til en rumlig flercellet konstruktion, som kan udbygges i det uendelige i alle retninger. På figur 44 er vist sammenbygningen af 3 elementer.



Figur 44. Sammenbygning af 3 elementer.

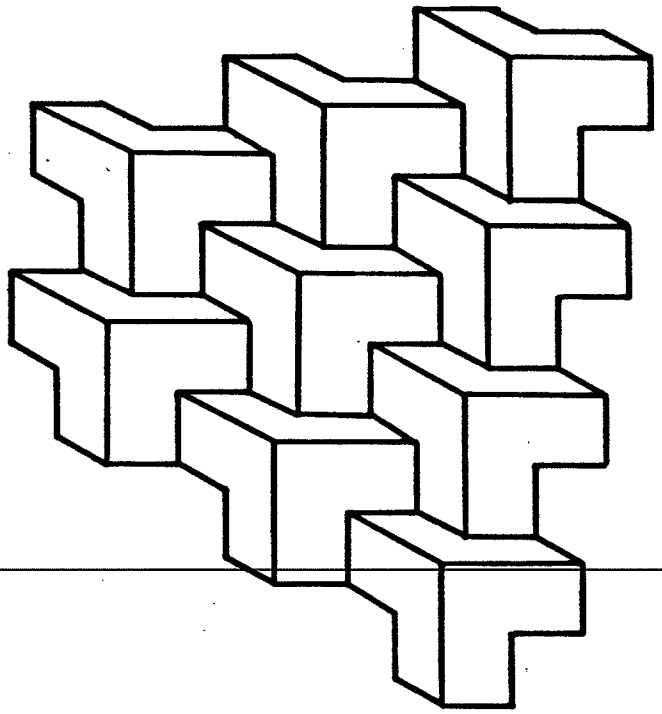
En anvendelse af maximumsnitprocessen på det samme kvadrat kan give det på figur 45 viste resultat.



Figur 45. Maximumsnitproces i kvadratnet.

Af figuren ses det, at hvert element (bestående af 3 kvadrater) indeholder 2 indre navne c_1 og b^3. Da disse navne skal parres med navne, som ligger udenfor elementerne, vil disse være inaktive, når man samler elementerne.

En sammenbygning af elementer af denne type fører til en facetteret plan, som vist på figur 46.



Figur 46. Facetteret plan, opbygget af elementer, fundet ved hjælp af maksimumsnitprocessen.

3.2.2.2 Samlingstyper.

De to elementtyper, som er udledt, er typiske for maximum og minimumsnitprocesserne.

Betragter man den ved hjælp af minimumsnitprocessen udledte elementtype, kan samlingerne mellem disse elementer opdeles i 2 typer.

Den ene fremkommer, når man parrer den indre linie c^1 med slidsen c_1 (randen). Se figur 43. Alle øvrige samlinger er parringer mellem en indre linie og en elementrand, som ikke er en slids. Se figur 47. Figur 47 viser også den samlingstype, som elementer udledt v.h.a. maximumsnitprocessen fører til.



slids-indre linie
x_1-samling



indre linie-rand,
rand-indre linie
x_2-samling

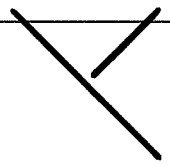


rand-rand
v-samling

Figur 47. Samlinger mellem elementer bestemt ved minimumsnitprocessen (x_1 og x_2) og maximunsnitprocessen (v).

Man kan let styre minimumsnitprocessen, således at man kun får x_2-samlinger (ingen slidser i elementerne), mens det ikke er muligt kun at få x_1-samlinger, uden at de enkelte elementer bliver uendelige (alle rande bliver slidser).

Når man betragter skæringen mellem 2 planer, repræsenteret ved elementer, findes der imidlertid endnu en samlingstype, som vist på figur 48.



rand-indre linie
T-samling

Figur 48. T-samling.

T-samlingen kan ikke forekomme mellem elementer fremkommet af minimumsnitprocessen, eller mellem elementer fremkommet af maksimumsnitprocessen.

Betragter man de 4 samlingstyper i forhold til de beskrevne snitprocesser, kan dette fremstilles skematisk, som vist på figur 49.

SNIT-PROCES	X_1	X_2	V	T
MINIMUM			+	
MAKSIMUM 1	+	+		
MAKSIMUM 2		+		
MIDDEL 1			+	+

Figur 49. Sammenhæng mellem snitproces og samlingstype.

På figuren betegner maximum1 den normale maximumsnitproces, mens maximum2 er maximumprocessen modificeret således, at slidser undgås.

Der kan imidlertid opstilles andre regler for snitprocessen, således at der fremkommer andre kombinationer af samlingstyper.

Snitprocessen med navnet middel1 på figur 49, som fører til V- og T-samlinger, er et eksempel på en sådan proces, og omtales i det følgende.

3.2.2.3 Middelsnitprocesser.

Det blev i indledningen omtalt, at flercellede konstruktioner, hvor alle samlinger er af typen rand-indre linie (x_1- og x_2-samlinger), er uendelige i alle rummets retninger, og at fysiske modeller af dem derfor må afsluttes enten med nogle rand-rand samlinger, eller ved at nogle at yderelementernes sider er uparrede.

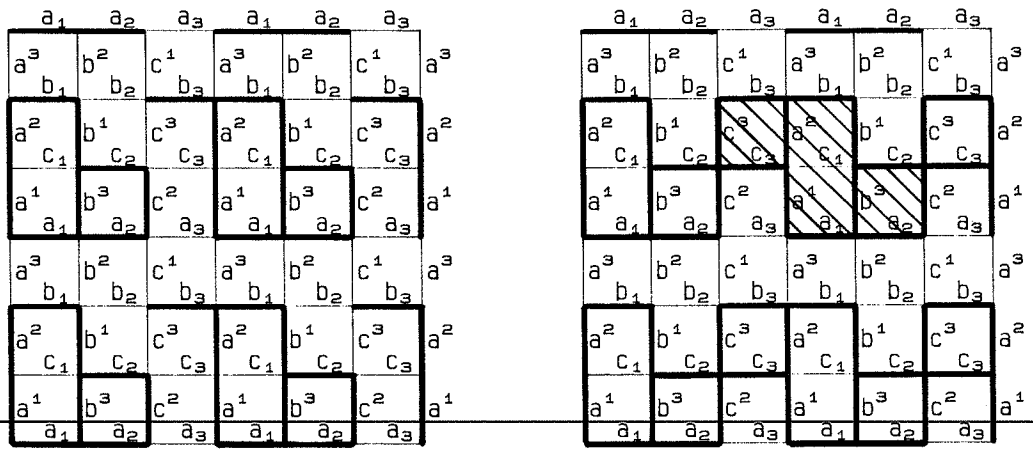
Den, på figur 49 omtalte snitproces med navnet middel1, kan opfattes som en metode til på systematisk vis at afgrænse en flercellet konstruktions udstrækning i en af rummets retninger, således at der fremkommer en i hovedsagen 2-dimensionel, flercellet konstruktion.

Reglerne for snitprocessen middel1 kan ikke formuleres så eksplicit, som reglerne for maximum- og minimumsnitprocesserne, og den vil derfor kun blive belyst v.h.a. et eksempel.

Da snitprocessen skal føre til elementer, som kan samles via V- og T-samlinger, tages der udgangspunkt i et element, hvor samlingerne alle er V-samlinger (et element fundet v.h.a. maximumsnitprocessen).

Der betragtes det på figur 45 viste resultat af en maximumsnitproces, og det undersøges, hvilke snit der skal tilføjes, hvis en af de to uparrede kvadratnetsider c_1 og b^3 skal ændres til at være indre linier.

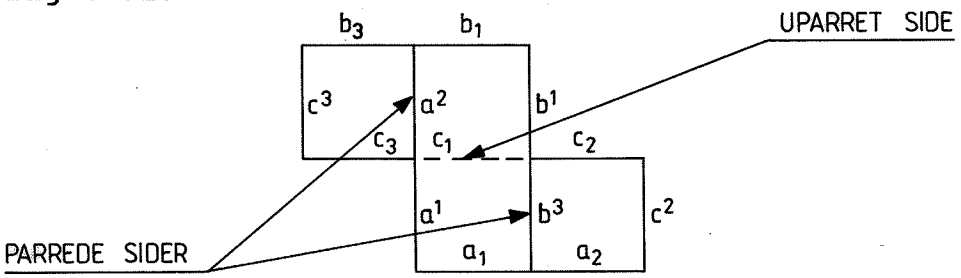
På figur 50 til venstre er indtegnet det ekstra snit, som kvadratnettet må indeholde, hvis f.eks. b^3 skal være en indre linie.



Figur 50. Tilføjelse af ekstrasnit til maximumsnit-processen.

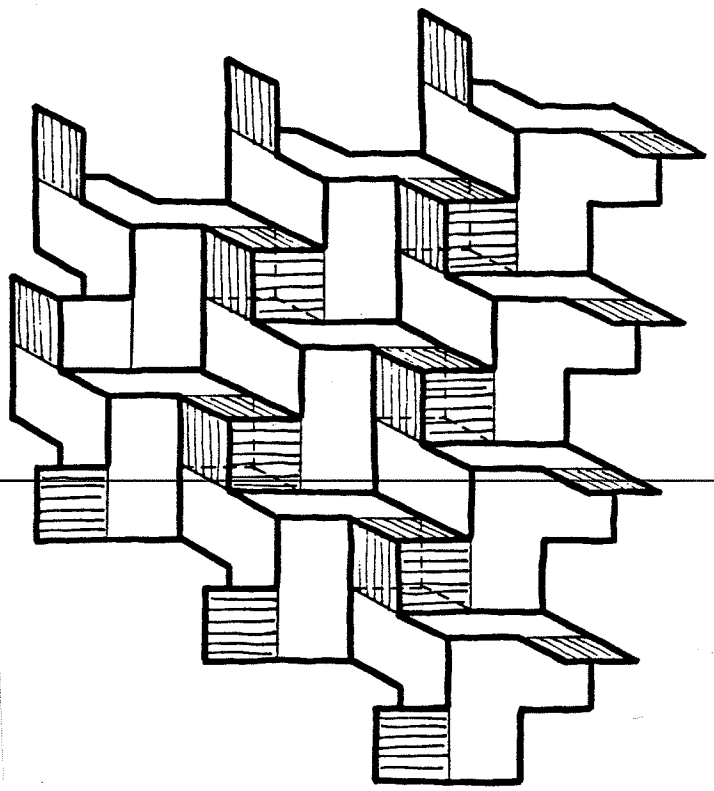
På figur 50 tilhøjre er vist de yderligere snit, man må tilføje, hvis der skal dannes lukkede kredse.

Betragter man nu det således fremkomne element. bestående af 4 kvadrater, indeholder det 1 uparret indre side c_1 og 2 parrede indre sider a^2 og b^3. Se figur 51.



Figur 51. Element med en uparret indre side og 2 parrede.

Da elementerne, som det fremgår af figur 50, ikke i planen har fælles sider, må de to indre linier, som indgår i parringer, føre til T-samlinger; og da de resterende sider alle indgår i rand-rand samlinger er elementet i overensstemmelse med kravene til middel1-snitprocessen. På figur 52 er vist den rumlige opbygning, som elementet fører til.



Figur 52. Flercellet konstruktion, som kun indeholder V- og T-samlinger. De lukkede cellers synlige overflade er vist skraveret.

Snittene i middelsnitprocessen kan både være maximumsnit (x_n og x^n) og minimumsnit (x_n og ikke x^n). Snittene kontrolleres ved, at de resulterende lukkede kredse ikke må have fælles sider, og at elementerne ikke må indeholde slidsen.

Middel1-snitprocessen er som ettallet i navnet antyder kun én blandt flere middelsnitprocesser, som alle er karakteriseret ved, både at indeholde maximumsnit og minimumsnit og den kombination af samlingstyper, de resulterende elementer fører til.

Med disse snitprocesser og de udledte kvadratnet (inclusiv de i appendix 1 givne), kan man udlede et overordentligt stort antal forskellige elementtyper, som hver fører til sin karakteristiske rumlige opbygning.

3.2.2.4 Plane elementers overordnede statiske egenskaber.

Som afslutning på dette afsnit skal det vises, hvordan man kan bestemme nogle af den rumlige opbygnings statiske egenskaber, ud fra det markerede element.

Der betragtes elementet, fundet v.h.a. middel1-snitprocessen på figur 51.

Elementet indeholder 12 kvadratnetsider (c_1 er inaktiv), som skal parres med 12 kvadratnetsider fra andre elementer. Disse 12 kvadratnetsider svarer imidlertid ikke til 12 andre elementer, men kun til 8, da siderne b_1 og b_3, b^1 og b^3, a_1 og 2_2 og a^1 og a^2 ligger på samme linie. Hvert element er derfor direkte samlet til 8 naboelementer. Da hver samling er en samling mellem 2 elementer, svarer hvert element derfor for 4 samlinger.

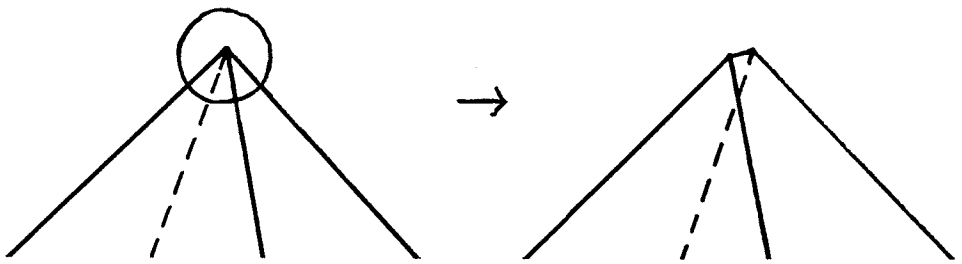
Betragtes den rumlige opbygning som en skivekonstruktion, og lægger man snit i alle samlinger, er antallet af snit 4 gange antallet af elementer. og da man for hvert element kan opstille 3 ligevægtsligninger, er antallet af overtallige snitkræfter lig antallet af elementer. Man har altså, at en skivekonstruktion, opbygget af elementer som på figur 51, er lige så mange gange statisk ubestemt som antallet af elementer, når man ser bort fra randeffekter såsom uparrede sider og eventuelle understøtninger.

3.3 Skivefacetterede flader.

Ved skivefacetterede flader forstås, som omtalt i indledningen til dette kapitel, flader, opbygget af basisskivelementer, hvor alle samlingerne er af typen rand-rand.

Kravet om, at elementerne skal være basisskiveelementer, medfører, at alle hjørner i en skivefacetteret flade må være 3-grenede svarende til, at den duale gitterkonstruktion er trianguleret.

Hjørner, som indeholder mere end 3 grene, kan betragtes som specialtilfælde. Et 4-grenet hjørne kan betragtes som to 3-grenede hjørner, liggende uendelig tæt ved hinanden, som vist på figur 53.



Figur 53. Et 4-grenet hjørne opfattet som 2 uendelig tæt ved hinanden liggende 3-grenede hjørner.

På tilsvarende måde kan n-grenede hjørner betragtes som (n-2) 3-grenede hjørner, liggende uendelig tæt.

Når alle hjørner er 3-grenede, betyder det, at antallet af kanter i facetterne er maksimeret, hvilket igen betyder, at en skivefacetteret flade, betragtet som skivekonstruktion, får den maksimale grad af statisk ubestemthed eller den minimale grad af bevægelighed analogt til, at en triangulering giver de bedste statiske egenskaber, når en flade realiseres som en gitterkonstruktion.

3.3.1 Skivefacetterede fladers krumningsmål.

Som udgangspunkt for behandlingen af skivefacetterede flader betragtes deres krumningsmål (Gauss-krumning).

Som bekendt defineres krumningsmålet i et punkt af en flade som produktet af hovedkrumningerne (største og mindste) i punktet. Se f.eks. [4].

Integreres krumningsmålet over en lukket flade, afhænger resultatet kun af fladens topologiske egenskaber. For enkeltsammenhængende flader som f.eks. en kugleflade bliver resultatet af denne integration 4π, mens for flader med H huller giver integrationen (1-H) 4π. En torus med et hul, f.eks. overfladen af en kop med en hank, har derfor en total krumning på (1-1) $4\pi = 0$.

Overfladen af en skivefacetteret flade består af plane facetter, retlinede kanter og 3-grenede hjørner. Integrerer man over sådan en flade, er det kun de 3-grenede hjørner, som giver bidrag, mens de plane facetter (begge hovedkrumninger er 0) og de retlinede kanter (en hovedkrumning er 0) ikke bidrager til den totale krumning.

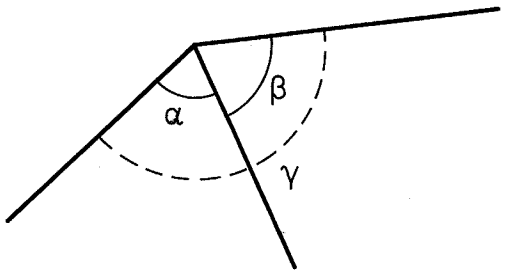
3.3.1.1 Positivt og negativt krummede hjørner.

Et 3-grenet hjørnes bidrag til en flades krumningsmål kan findes af formel (13). Se f.eks. [3]

$$\Delta k_{3\text{-grenet}} = 2\pi - (\alpha+\beta+\gamma) \qquad (13)$$

hvor α,β og γ er vinklerne mellem kanterne, som støder op til hjørnet.

Hvis alle vinklerne mellem kanterne, som støder op til hjørnet, er mindre end π, er hjørnet positivt krummet. Se figur 54.



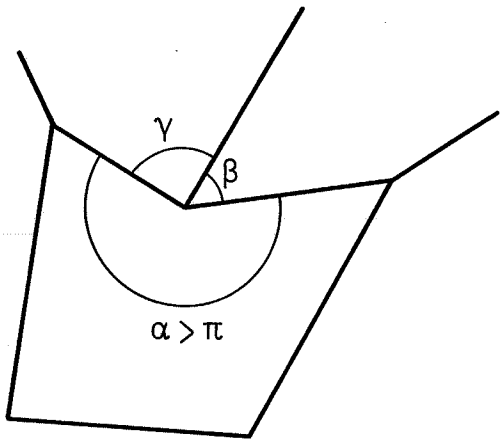
Figur 54. Positivt krummet hjørne.

Eksistensen af dette hjørne kræver, at følgende er opfyldt

$$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi \qquad (14)$$

og hver af vinklerne skal være mindre end summen og større end differensen af de 2 andre.

Hvis en af vinklerne mellem kanterne, som støder op til hjørnet, er større end π, er hjørnet negativt krummet. Se figur 55.



Figur 55. Negativt krummet hjørne.

Eksistensen af dette hjørne kræver, at følgende er opfyldt

$$\alpha + \beta + \gamma > 2\pi \qquad \text{og} \tag{15}$$

$$\alpha > \beta + \gamma \text{ og } |\beta - \gamma| < 2\pi - \alpha \tag{16}$$

Hvis 2 af vinklerne er større end π, kan hjørnet ikke eksistere.

3.3.1.2 En facets bidrag til krumningsmålet.

V.h.a. (13) og kravet om, at alle hjørner skal være 3-grenede, kan man direkte af antallet af kanter i en facet afgøre, hvilket bidrag facetten giver til den totale krumning.

Summen af vinklerne i en polygon med n kanter, i det følgende kaldet en n-kant, er

$$\sum_{i}^{n} \alpha_i = \pi \ (n-2) \qquad (17)$$

En n-kant kan i gennemsnit indgå i $^{n}/_{3}$ 3-grenede hjørner, og man får derfor dens bidrag til den totale krumning som

$$\Delta K_{n\text{-kant}} = {}^{n}/_{3} \cdot 2\pi - (\pi(n-2))$$

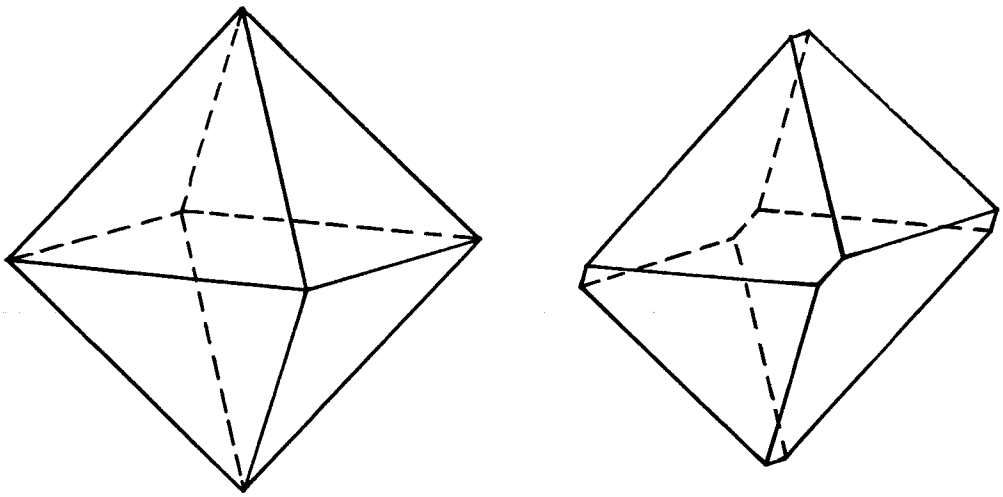
$$\Delta K_{n\text{-kant}} = \frac{\pi}{3} \ (6-n) \qquad (18)$$

Af (18) ses, at en sekskant er krumningsmæssig neutral, mens n-kanter med færre end 6 kanter giver et positivt bidrag, og n-kanter med flere end 6 kanter giver et negativt bidrag til den totale krumning.

For en trekant fås:

$$\Delta K_{trekant} = \pi = \frac{1}{4} \ (4\pi)$$

og da en flade højst kan have en total krumning på 4π, kan en skivefacetteret flade, hvori der kun indgår trekanter, højst have 4 facetter, svarende til et tetraeder. Det skal her understreges, at dette kun gælder for skivefacetterede flader. F.eks. er et oktaeder en facetteret flade, opbygget af 8 trekanter, men facetterne er kun trekanter i geometrisk henseende, idet oktaederet, opfattet som en skivefacetteret flade, kan betragtes som opbygget af 6 firkanter og 2 sekskanter, hvor 3 af kanterne i sekskanterne og 1 af kanterne i firkanterne er uendelig korte, som illustreret på figur 56.



Figur 56. Oktaeder opfattet som skivefacetteret flade.

For en firkant fås

$$\Delta K_{firkant} = \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6}\ (4\pi)$$

og en skivefacetteret flade, hvori der kun indgår firkanter, kan derfor højst have 6 facetter, svarende til en hexaeder.

For en femkant fås

$$\Delta K_{femkant} = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{12}\ (4\pi)$$

og det maksimale antal femkantede skivefacetter er derfor 12, svarende til et dodekaeder.

For n-kanter, hvor $n \geq 6$ gælder

$$\Delta K_{n\text{-kant}} \leq 0$$

og da udtrykket for en flades totale krumning

$$K_T = (1-H)\ 4\pi$$

kan give vilkårligt store negative totalkrumninger, er der ikke de samme antalsmæssige restriktioner på denne type skivefacetter.

3.3.2 Flader med en totalkrumning på 0.

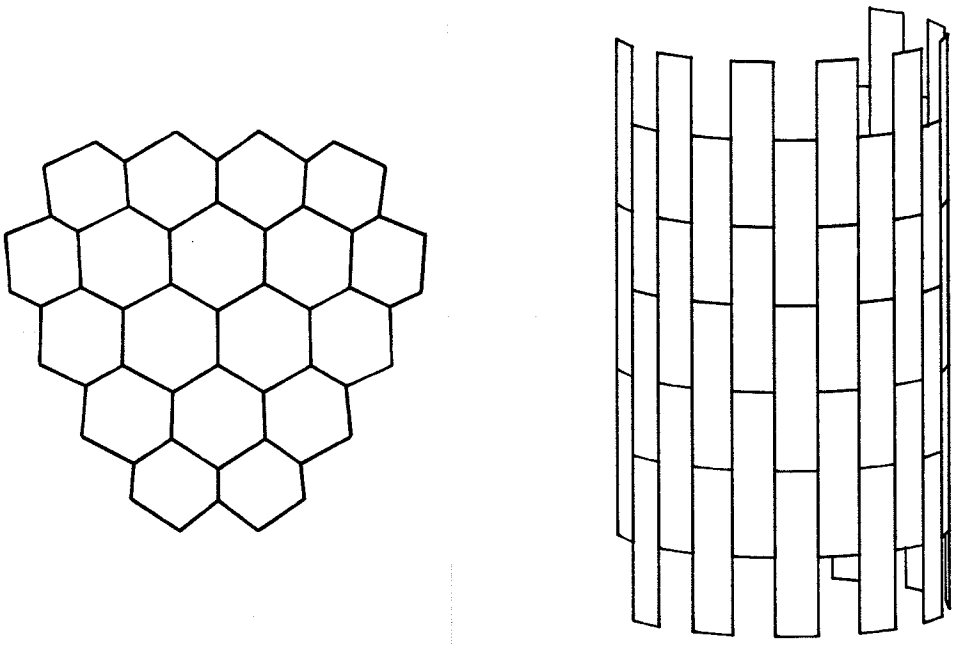
Først betragtes skivefacetterede flader udelukkende indeholdende sekskantede skivefacetter. Da sekskanten er krumningsmæssig neutral, må de flader, man søger at skivefacettere med sekskanter, have en totalkrumning på 0.

Udover den lukkede torus, er de flader, som har totalkrumning 0, de såkaldte tangentflader, se f.eks. [4].

Af disse skal kun her betragtes planen og de cirkulære cylinder- og kegleflader, som umiddelbart ses at have totalkrumningen 0, da de alle har mindst en hovedkrumning, som er 0 i alle punkter.

Planen og den cirkulære cylinderflade er karakteristiske ved, at de i alle punkter har samme krumningsforhold, og det skulle derfor være muligt at facettere dem således, at alle facetter er ens.

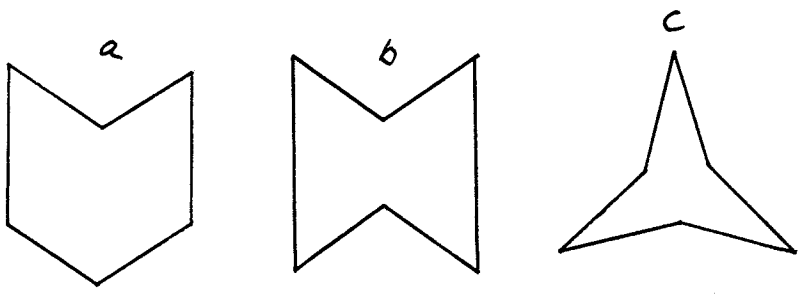
Hvis facetterne er konvekse, kan der ikke dannes 3-grenede hjørner med negativ krumning, hvilket medfører, at alle 3-grenede hjørner må have krumningen 0, svarende til de på figur 57 viste plane facetteringer af planen og cylinderfladen.



Figur 57. Plan facettering af planen og cylinderfladen med sekskanter.

Hvis planen og cylinderfladen skal rumligt facetteres, må de både indeholde 3-grenede hjørner med positiv og negativ krumning, og dette medfører, at nogle af hjørnerne i sekskanterne må være indadgående.

Der findes 3 sekskanttyper med indadgående hjørner, som vist på figur 58.



Figur 58. Sekskanter med indadgående hjørner.

Ingen skivefacetteret flade kan opbygges udelukkende af type c elementer, da et 3-grenet hjørne højst kan indeholde et indadgående hjørne. Forholdet mellem antallet af indadgående og udadgående hjørner kan derfor højst være 1:2.

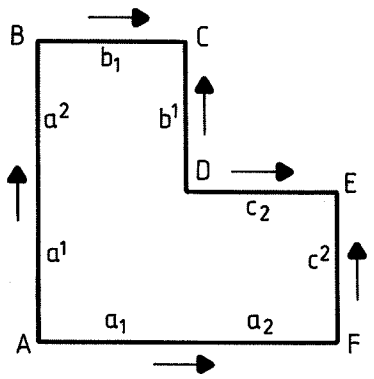
Dette forhold er netop opfyldt for elementtype b. Alle 3-grenede hjørner i en skivefacetteret flade, opbygget med dette element, må indeholde et indadgående hjørne, hvilket medfører, at alle hjørner er negativt krummet, og elementet kan derfor heller ikke anvendes til at facettere en flade med total krumning 0.

Element a indeholder derimod den rette kombination af indad- og udadgående hjørner til, at man både kan danne 3-grenede hjørner med positiv krumning og med negativ krumning.

Det i forrige afsnit udledte element, som kunne samles til en rumlig skivefacetteret plan, er da også et type a element, da det netop indeholder et indadgående hjørne.

Med dette element som udgangspunkt kan man ved modifikationer og ændringer af elementgeometrien finde frem til en række andre 6-kant-elementer, som også fører til skivefacetterede flader.

Den rumlige opbygning med dette element kan aflæses af dets markering, som vist på figur 59.



Figur 59. Type a element med markeringer.

Elementets hjørner (A,B,C,D,E,F) indgår i følgende 4 tripletter:

$$a_1a^1,\ a_1a^1,\ a_1a^1 \sim AAA$$
$$c_2b^1,\ b_1a^3,\ a_3c^2 \sim DBF$$
$$b_2b^2,\ b_2b^2,\ b_2b^2 \sim CCC$$
$$c_3c^3,\ c_3c^3,\ c_3c^3 \sim EEE$$

Hyppigheden af de forskellige tripletters forekomst i den facetterede flade, udtrykt ved hjørnenavnene, kan udtrykkes ved følgende "kemiske" formel

$$(AAA),\ 3(DBF),\ (CCC),\ (EEE) \qquad (20)$$

Krumningsbidraget fra tripletterne bliver

$$\Delta K_{AAA} = 2\pi - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta K_{DBF} = 2\pi - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta K_{CCC} = 2\pi - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta K_{EEE} = 2\pi - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Summeres krumningsbidragene i overensstemmelse med formel (20), fås

$$\Delta K = \frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \qquad (20)$$

i overensstemmelse med, at fladens totalkrumning er 0.

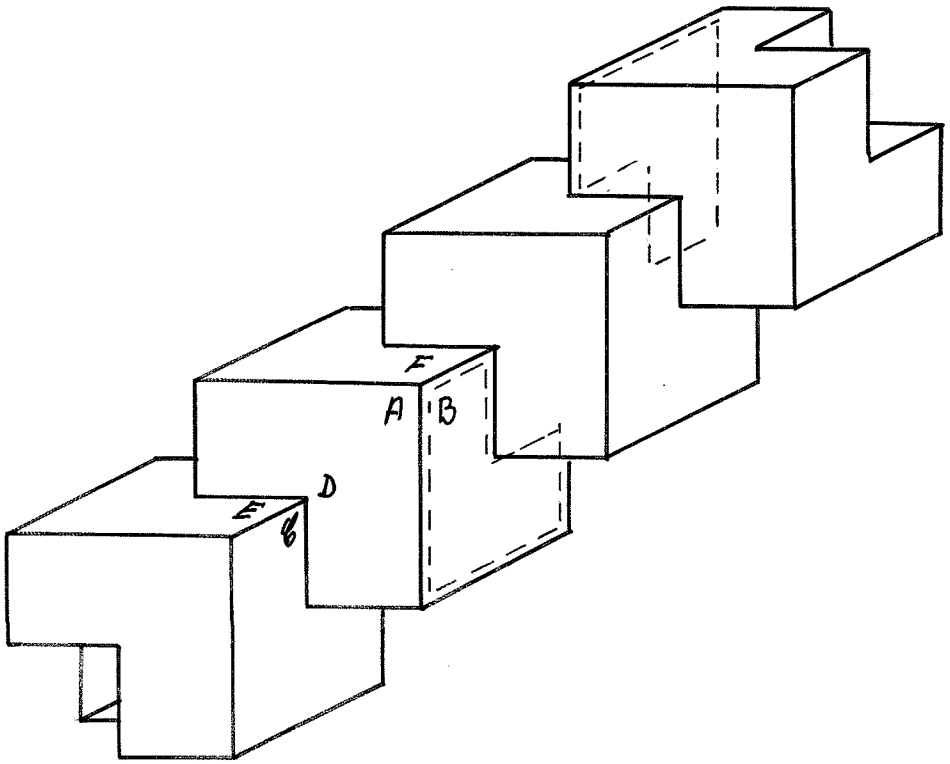
Betragter man elementet på figur 59 på formelniveau, dvs. kun med navngivne hjørner, giver følgende "kemiske" formel

$$(ABF),\ (DCE) \qquad (21)$$

også en vinkelmæssig korrekt sammensætning af ind- og udadgående hjørner i elementerne. Summeres der efter denne formel, fås

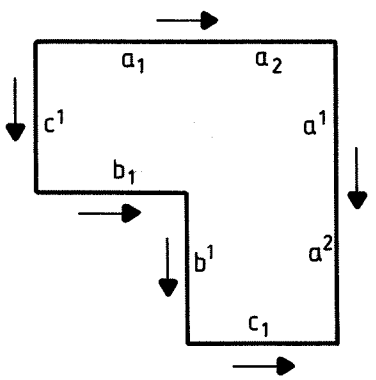
$$\Delta K \quad = \frac{\pi}{2} + \left[- \frac{\pi}{2} \right] = 0 \ .$$

Formlen fører til en rumlig opbygning, som vist på figur 60.



Figur 60. Konstruktion opbygget i overensstemmelse med formel (21).

Ud fra opbygningen af konstruktionen på figur 60 kan man bestemme en markering af elementet, som vist på figur 61.



Figur 61. Markering af element, som fører til konstruktionen på figur 60.

3.3.2.1 Ændringer af elementers geometri.

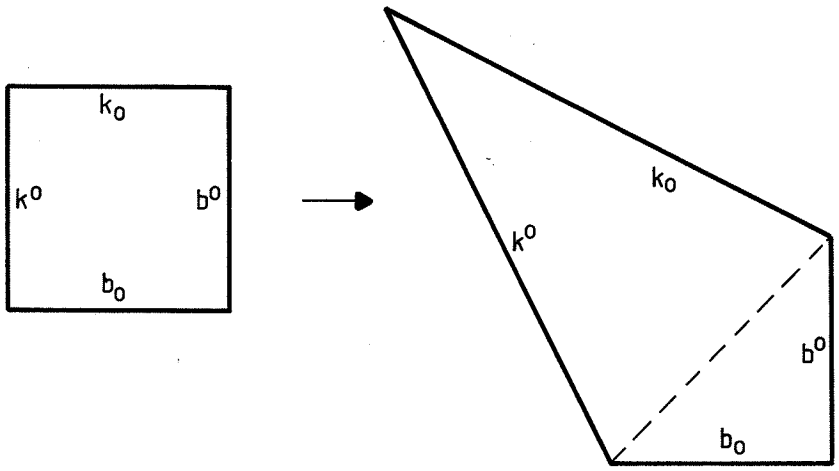
Det skal nu undersøges, hvorledes man kan ændre på allerede fundne elementers geometri, uden at deres evne til at kunne sammenbygges til en skivefacetteret flade mistes.

Man kan umiddelbart opskrive følgende sæt af nødvendige betingelser, som en ændring af elementgeometrien må opfylde, for at sammenbygningensevnen bevares.

1. Sider, som skal parres, må ikke få forskellig længde.

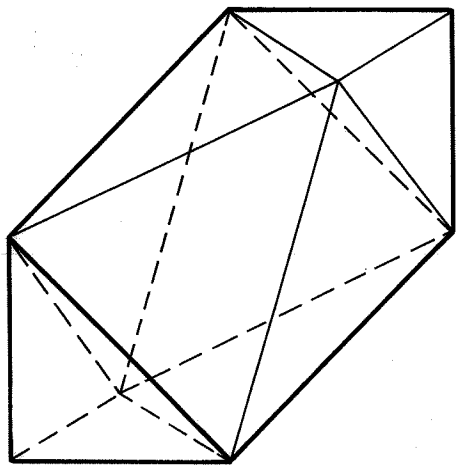
2. Betingelserne for, at de positivt og negativt krummede hjørner kan eksistere, skal stadigt være opfyldte.

At disse 2 betingelser ikke er tilstrækkelige ses, hvis man betragter den markerede firkant, som fører til en terning.



Figur 62. Markeret firkant og "lovlig" ændring.

Den på figur 62 viste ændring af elementgeometrien, tilfredsstiller de to betingelser, men de kan kun sammenbygges til en facetteret flade, hvis de bukkes langs den stiplede linie, som vist på figur 63.

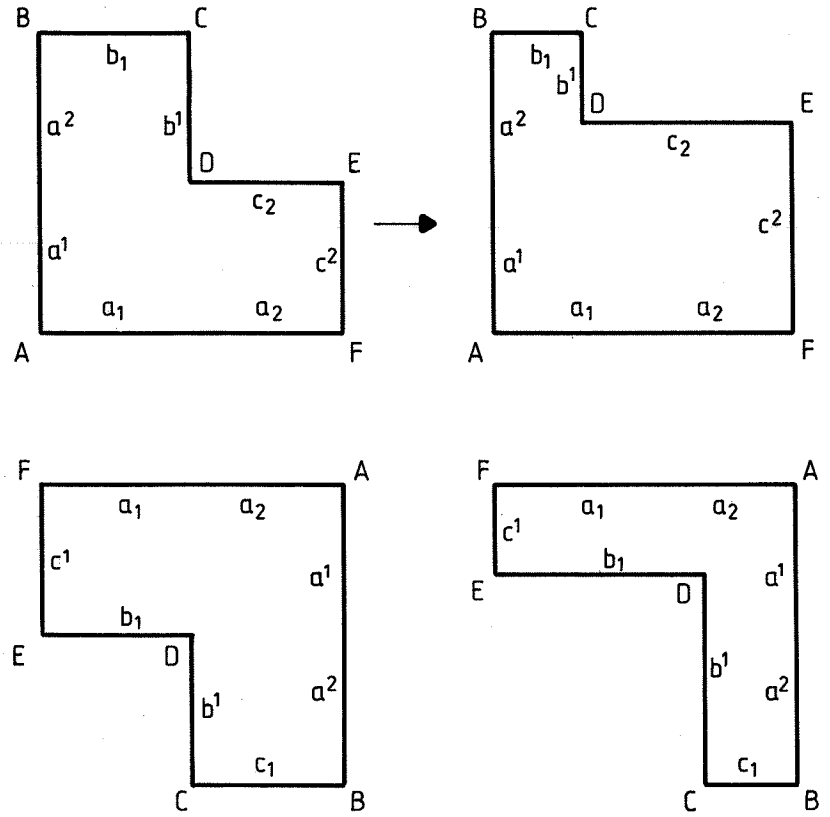


Figur 63. Facetteret flade, opbygget af ændrede firkantelementer.

Da hjørnerne er 5-grenede, er fladen ikke skivefacetteret.

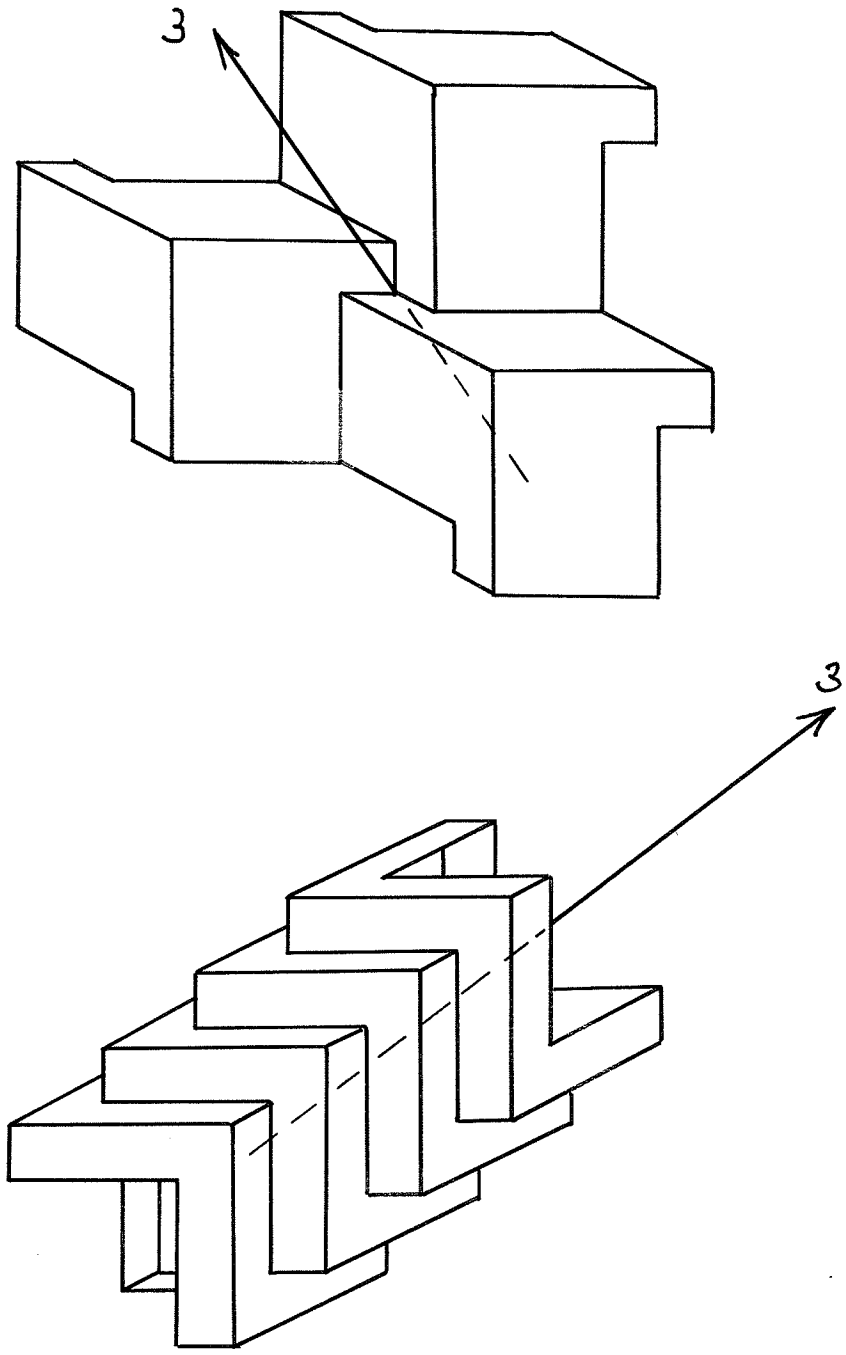
I almindelighed vil en ændring af en elementgeometri føre til, at opbygningen med de ændrede elementer kræver, at disse bukkes om en eller flere af de linier, som kan tegnes mellem elementets hjørner.

Der findes imidlertid en bestemt type af ændringer, hvor de to betingelser er tilstrækkelige, og det er ændringer, som bevarer alle vinkler mellem elementernes sider. På figur 64 er vist, hvorledes elementerne, svarende til den rumligt facetterede cylinderflade og den rumligt facetterede plan, kan ændres.



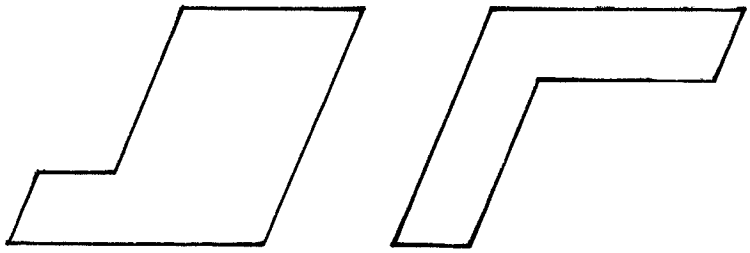
Figur 64. Ændringer, som bevarer vinklerne mellem elementets sider.

Det ses, at denne type ændringer helt styres af elementernes markering. På figur 65 er vist de tilsvarende rumlige opbygninger.



Figur 65. Opbygninger med elementer, hvor sidelængderne er ændret.

De med 3 markerede akser på figur 65 er 3-fold rotationsakser for fladerne. Beskrives fladerne i koordinatsystemer, hvor 3-fold rotationsaksen er en af akserne, kan koordinaterne, svarende til denne akse, multipliceres med et vilkårligt tal forskelligt fra 0, uden at fladerne ændrer karakter. En sådan multiplikation svarer til elementer, som vist på figur 66.

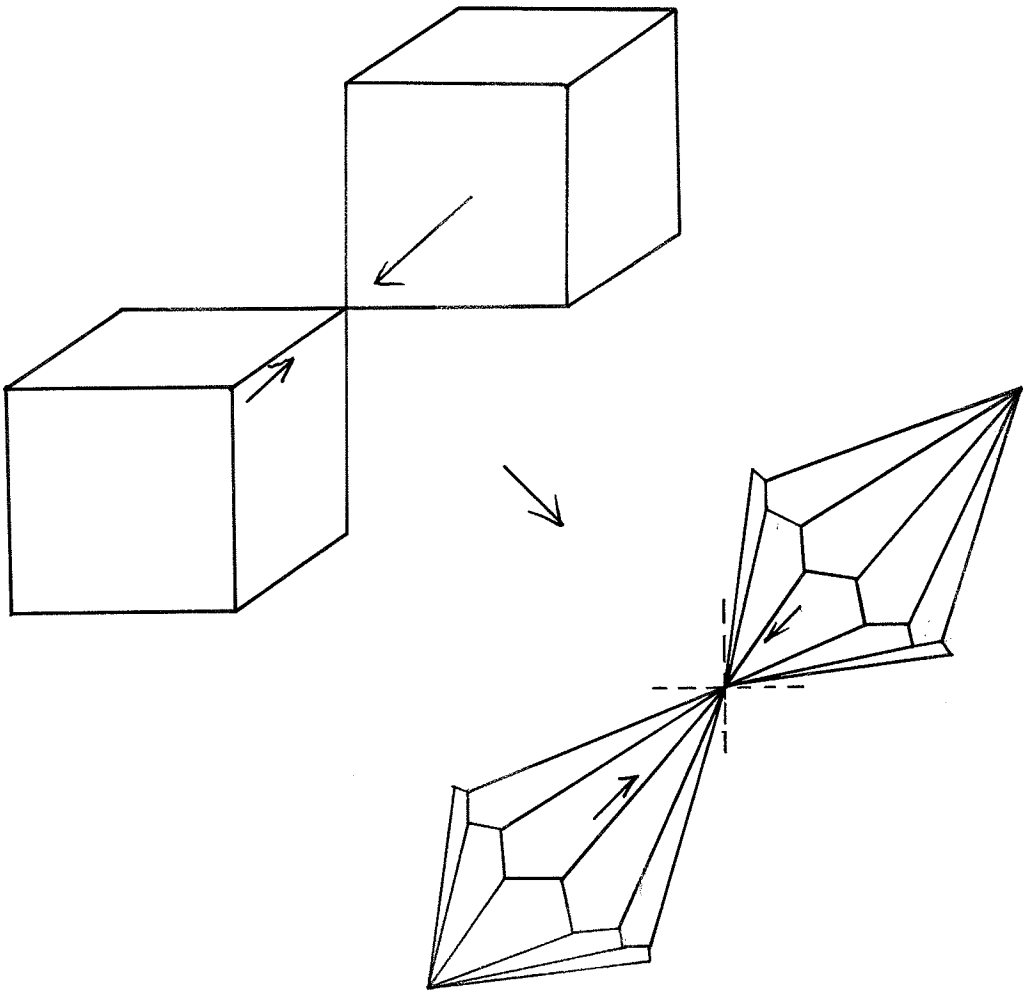


Figur 66. Elementer med ændrede vinkler.

Det viser sig, at de vinkelbevarende ændringer og denne multiplikation langs 3-fold symmetriaksen er de eneste lovlige ændringer for elementet, som fører til den rumligt skivefacetterede plan.

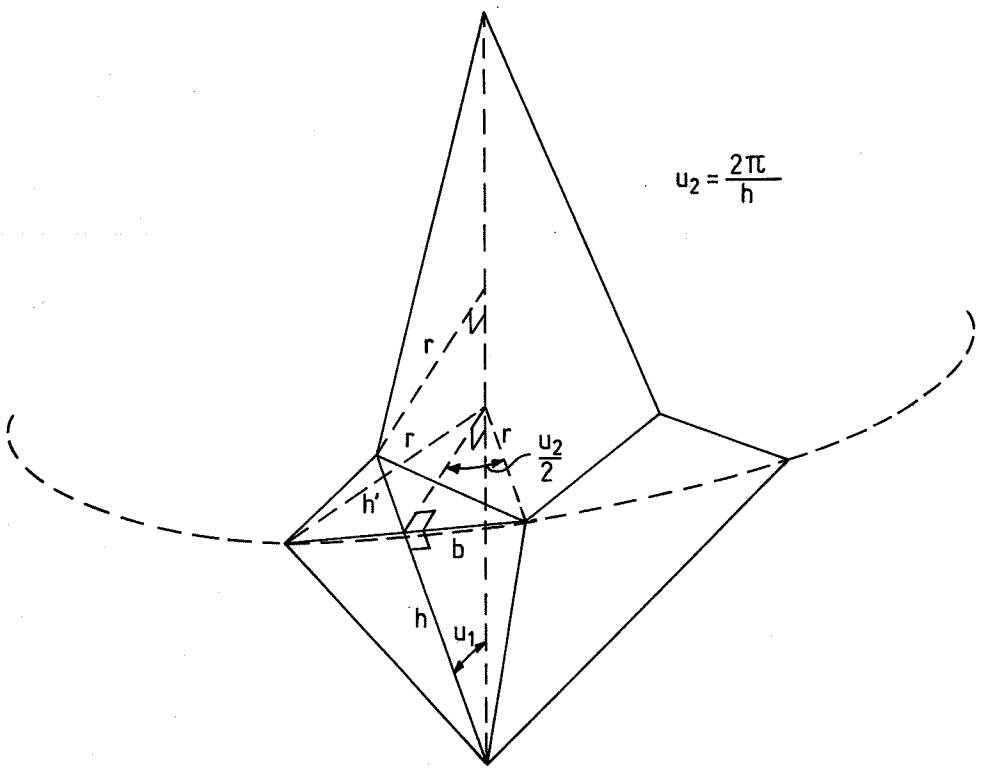
Elementet, som fører til den rumligt skivefacetterede cylinderflade, kan derimod ændres på flere andre måder, uden at fladen ændrer karakter.

Betragter man dets opbygning på figur 65, kan denne opfattes som en række terninger, placeret langs en fælles rumdiagonal og skærende ind i hinanden. Man får en analog flade, hvis man erstatter terningerne med dobbelt pyramider, som skitseret på figur 67.



Figur 67. Terninger erstattet af dobbeltpyramider.

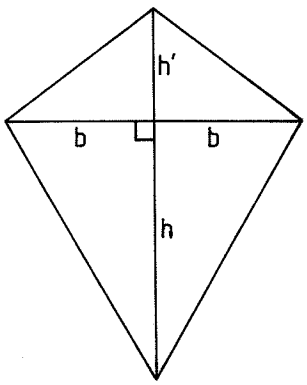
Betegnes vinklen mellem pyramidens flader og rumdiagonalen for u_1, og har dobbeltpyramiden ialt 2 n flader, bliver sammenhængen mellem disse 2 størrelser og fladernes geometri, som vist på figur 68.



$$b = r \sin \frac{u_2}{2};$$

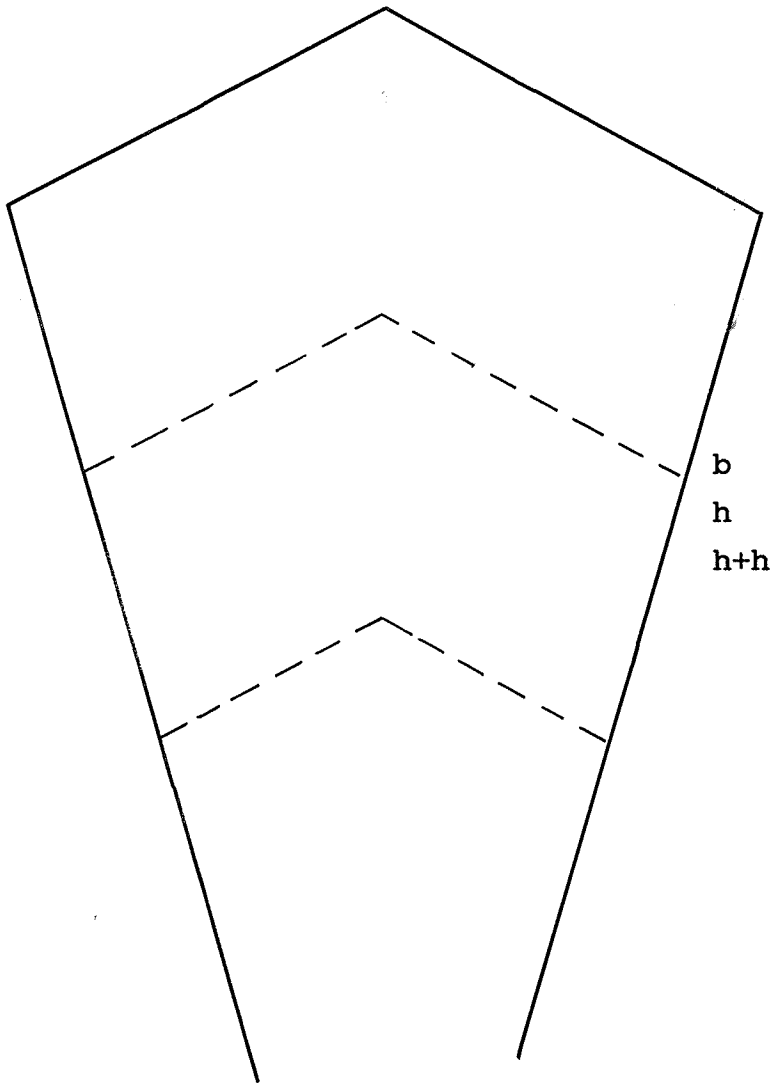
$$h = \frac{r \cos \frac{u_2}{2}}{\sin u_1};$$

$$h+h' = \frac{r}{\sin u_1};$$



Figur 68. Bestemmelse af dobbeltpyramidens flader.

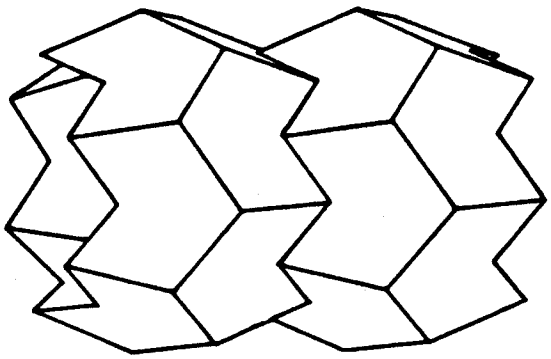
Haves f.eks. $u_2 = 60^o$, $u_1 = 30^o$ og $r = 10$ cm, fås det på figur 69 viste element.



Figur 69. Element svarende til $u_2 = 60^o$, $u_1 = 30^o$ og r = 10 cm.

Hvor meget dobbeltpyramiderne skærer ind i hinanden, afhænger af hvilket sæt af stiplede linier, parallelle med elementets øverste sider, man vælger at skære efter.

På figur 70 er vist en rumlig opbygning med dette element.



Figur 70. Rumlig opbygning med elementet fra figur 114.

Det her omtalte elements markeringer blev afledt af en rumlig opbygning, bestemt af en såkaldt kemisk formel. Denne rumlige opbygning kan imidlertid også findes v.h.a. et navngivent kvadratnet, vist på figur 71, som også viser den snitproces, som fører til elementer, som kan sammenbygges til den rumligt skivefacetterede cylinderflade. Kvadratnettet er taget fra appendix 1.

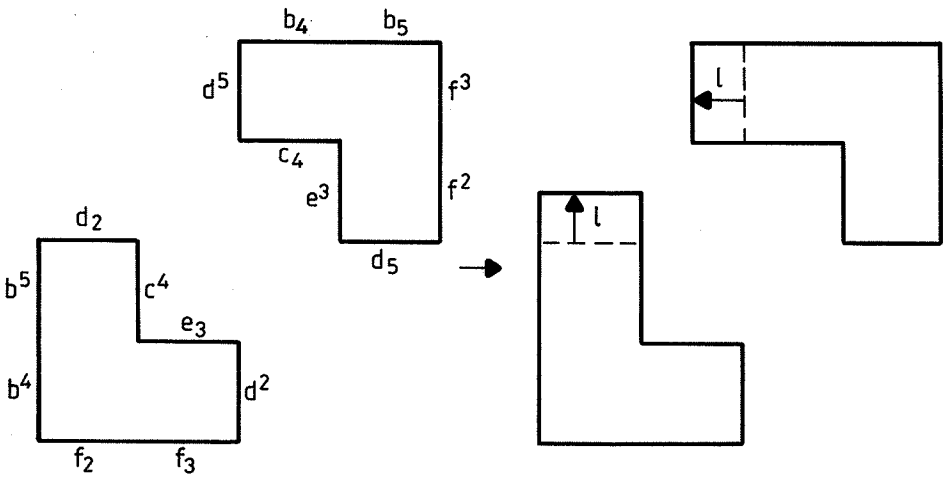
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	
$a^3\ b_1$	$b^2\ b_2$	$c^1\ b_3$	$d^6\ b_4$	$e^5\ b_5$	$f^4\ b_6$	$a^3\ b_1$	b^2
$a^2\ c_1$	$b^1\ c_2$	$c^6\ c_3$	$d^5\ c_4$	$e^4\ c_5$	$f^3\ c_6$	$a^2\ c_1$	b^1
$a^1\ d_1$	$b^6\ d_2$	$c^5\ d_3$	$d^4\ d_4$	$e^3\ d_5$	$f^2\ d_6$	$a^1\ d_1$	b^6
$a^6\ e_1$	$b^5\ e_2$	$c^4\ e_3$	$d^3\ e_4$	$e^2\ e_5$	$f^1\ e_6$	$a^6\ e_1$	b^5
$a^5\ f_1$	$b^4\ f_2$	$c^3\ f_3$	$d^2\ f_4$	$e^1\ f_5$	$f^6\ f_6$	$a^5\ f_1$	b^4
$a^4\ a_1$	$b^3\ a_2$	$c^2\ a_3$	$d^1\ a_4$	$e^6\ a_5$	$f^5\ a_6$	$a^4\ a_1$	b^3
$a^3\ b_1$	$b^2\ b_2$	$c^1\ b_3$	$d^6\ b_4$	$e^5\ b_5$	$f^4\ b_6$	$a^3\ b_1$	b^2

Figur 71. Navngivent kvadratnet med snitproces.

Det ses, at snitprocessen giver et dobbeltelement, bestående af 2 ens sekskanter med forskellig markering.

Denne markering ville man i øvrigt også kunne aflæse af den oprindelige rumlige opbygning på figur 60, hvis man her havde betragtet elementer, der ligger i samme plan som et dobbeltelement.

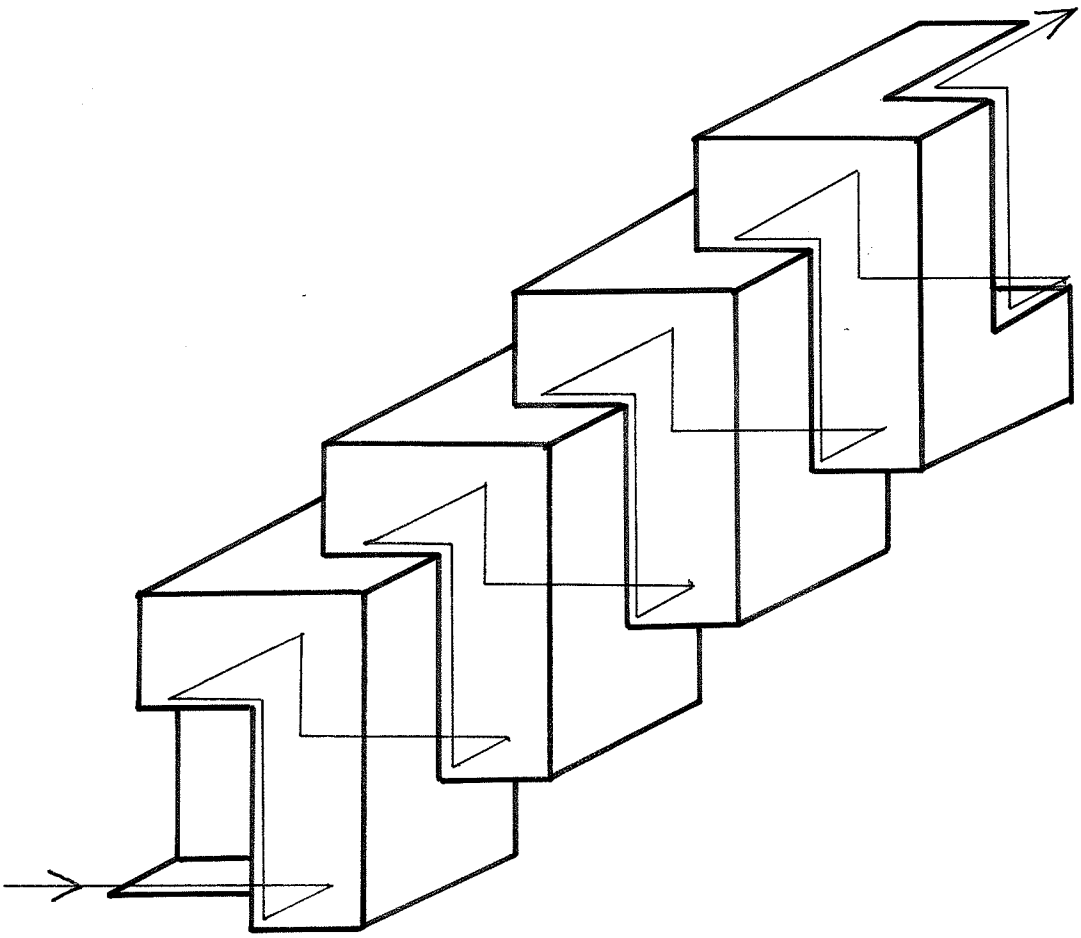
Undersøger man de vinkelbevarende ændringer, som denne nye markering tillader, er de på figur 72 viste ændringer tilladelige, hvad de ikke er ifølge den gamle markering.



Figur 72. Vinkelbevarende ændringer af dobbeltelement.

Det, som denne ændring medfører, afhænger af, om l, som er forlængelsen af elementets ene ben, kan udtrykkes som et helt multiplum af længden af kvadratnetsiden eller ikke.

Hvis ℓ er n gange kvadratnetsidens længde, fås en lukket cylinderflade, hvor cylinderens centerlinier er en n-dobbelt 3-fold skruerotationsakse. Figur 73 viser fladen for n = 1.

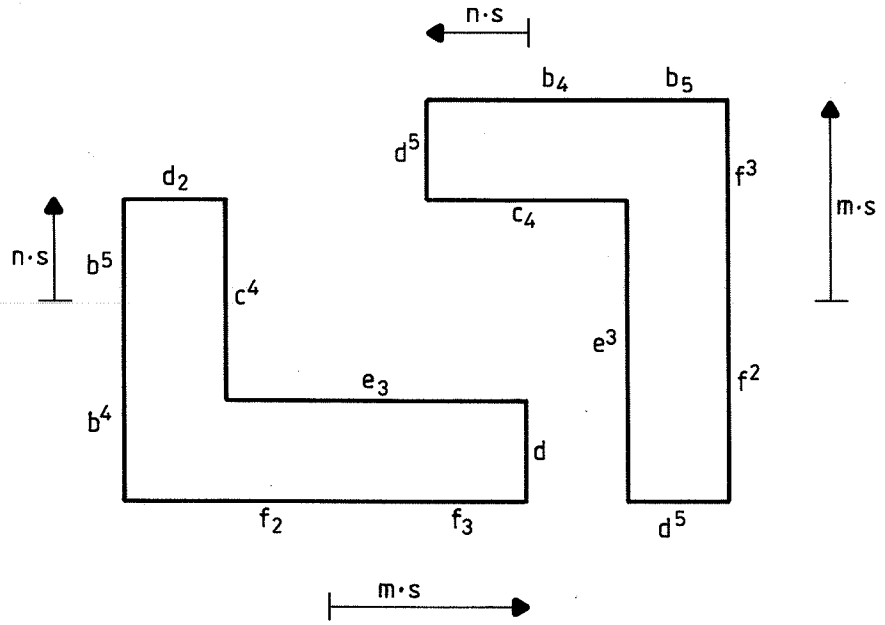


Figur 73. Cylinderflade med 3-fold skruerotationsakse.

Den med pil markerede knæklinie følger fladens indadgående kanter og danner en skruelinie.

Hvis ℓ ikke er et helt multiplum af kvadratnetsidens længde, fås en åben cylinderflade.

Generelt har man de på figur 74 viste elementtyper, som fører til lukkede cylinderflader.

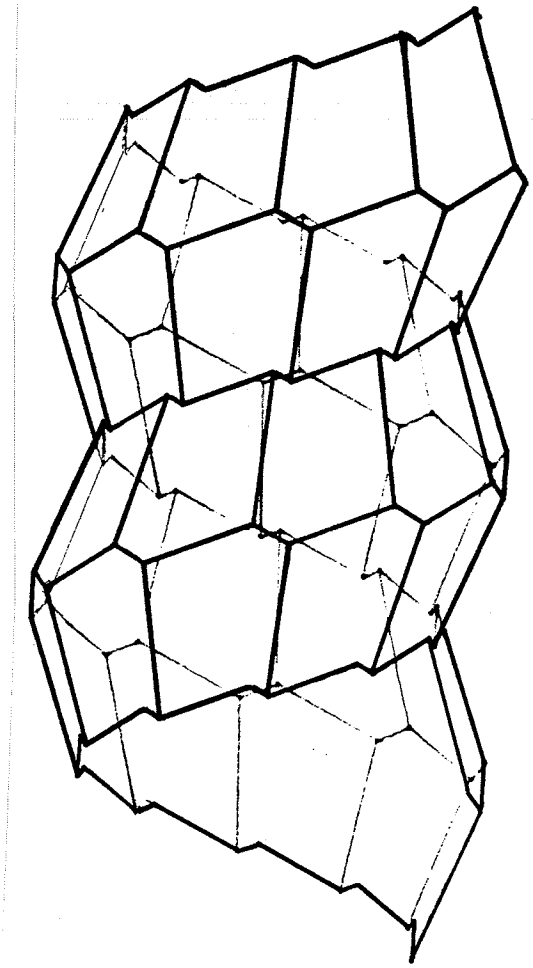


Figur 74. Elementer afledt af det på figur 70 viste markerede element.

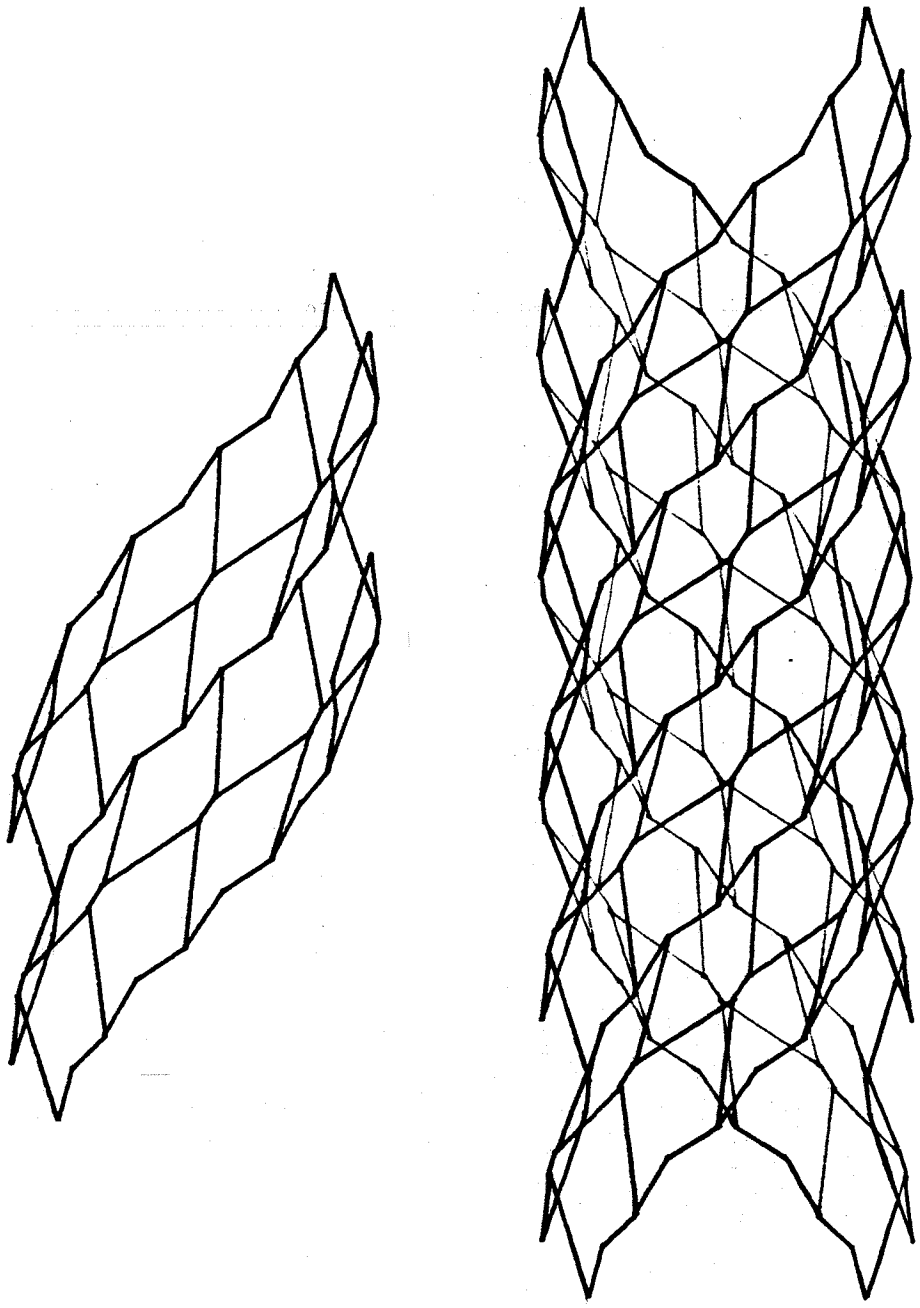
s er sidelængden i kvadratnettet. For n=m fås en flade med rotationsakse. For n≠m fås en flade med |n-m|-dobbelt skruerotationsakse.

Elementerne, som fører til cylinderflader med 3-fold skruerotationssymmetri, kan også ændres således, at 3-fold skrueaksen ændres til en p-fold skrueakse. Der er ikke opstillet analytiske udtryk, hvormed geometrien for denne type elementer kan findes. I stedet er der udarbejdet et edb-program, der ud fra en skiverepræsentation for en skivekonstruktion, dels kan bestemme de enkelte elementers geometri, og dels kan udtegne konstruktionen. De enkelte elementers geometri kan enten fås som koordinaterne til deres hjørnepunkter eller som et plot af deres udfoldning i en plan. Konstruktionen kan udtegnes enten som projiceret på en vilkårlig plan eller ved en perspektivisk afbildning. Programmet indeholder ordrer, hvormed man kan translatere og dreje planer eller grupper af planer, og det er derfor ret enkelt af generere et sæt af planer, der er placeret skruesymmetrisk om en given akse.

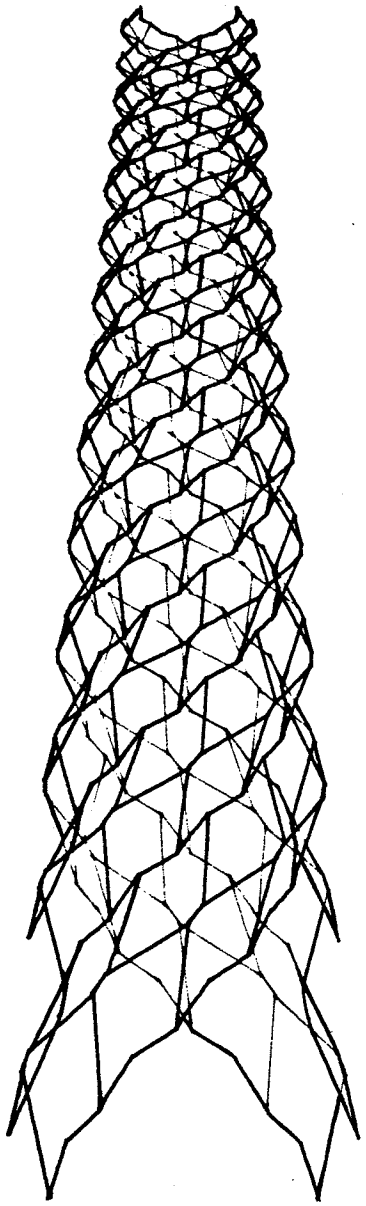
På figurerne 75-77 er vist nogle resultater fra kørslen med dette program.



Figur 75. Rumligt facetteret cylinderflade med en skrueakse.



Figur 76. Rumlig facetteret cylinderflade med en 4-dobbelt skrueakse.



Figur 77. Rumligt facetteret kegleflade, fremkommet ved dualtranslation af fladen i figur 76.

Figur 77 viser en rumligt skivefacetteret kegleflade. Denne flade er fremkommet af den rumligt skivefacetterede cylinderflade ved følgende simple transformation.

Er ligningerne for planerne, som danner den rumligt skivefacetterede cylinderflade, givet på formen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 1 \qquad (22)$$

og er en vektor med samme retning som cylinderens symmetriakse givet ved

$$\bar{V} = (v_1 , v_2 , v_3) \qquad (23)$$

består transformationen simpelthen i at erstatte ligningerne (22) med

$$(a_{i1}+ v_1)\ x_1+ (a_{i2}+ v_2)\ x_2 + (a_{i3}+ v_3)\ x_3 = 1 \qquad (24)$$

Denne transformation kaldes en dualtranslation, idet koordinaterne til de duale knudepunkter til skiverne i cylinderfladen er

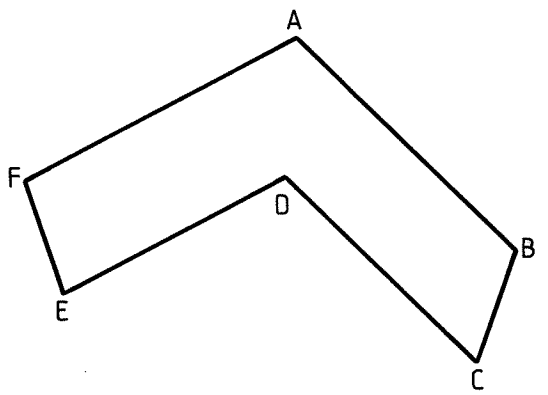
$$\bar{Z}_i^c = \frac{1}{2}\ (a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3})$$

og koordinaterne til de duale knudepunkter til skiverne i keglefladen er

$$\bar{Z}_i^k = \frac{1}{2}((a_{i1}+ v_1),\ (a_{i2}+ v_2),\ (a_{i3}+ v_3)) = \bar{Z}_i^c + \frac{1}{2}\bar{V};$$

og en dualtranslation af en skivekonstruktion er derfor identisk med en almindelig translation af den duale gitterkonstruktion.

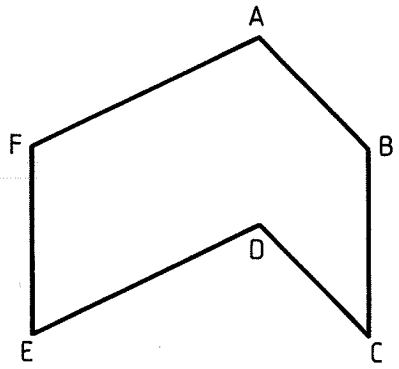
Alle de hidtil udledte sekskanter er rent geometrisk, karakteriseret ved, at linierne AF og AC er parallelle med linierne ED og DC, og at liniestykkerne EF og BC har samme længde. Se figur 78.



AF ≠ ED
AB ≠ DC
BC ≠ FE

Figur 78. Geometri for hidtil udledte elementer.

Kræver man nu yderligere, at siderne FE og BC skal være parallelle, får man et element, som vist på figur 79.



$AF \neq ED$
$AB \neq DC$
$FE \neq BC$ og
$FE = BC$

Figur 79. Geometri for element med 3 par af parallelle linier.

Den tidligere benyttede "kemiske" formel

$$(ABF),(DCE) \qquad (24)$$

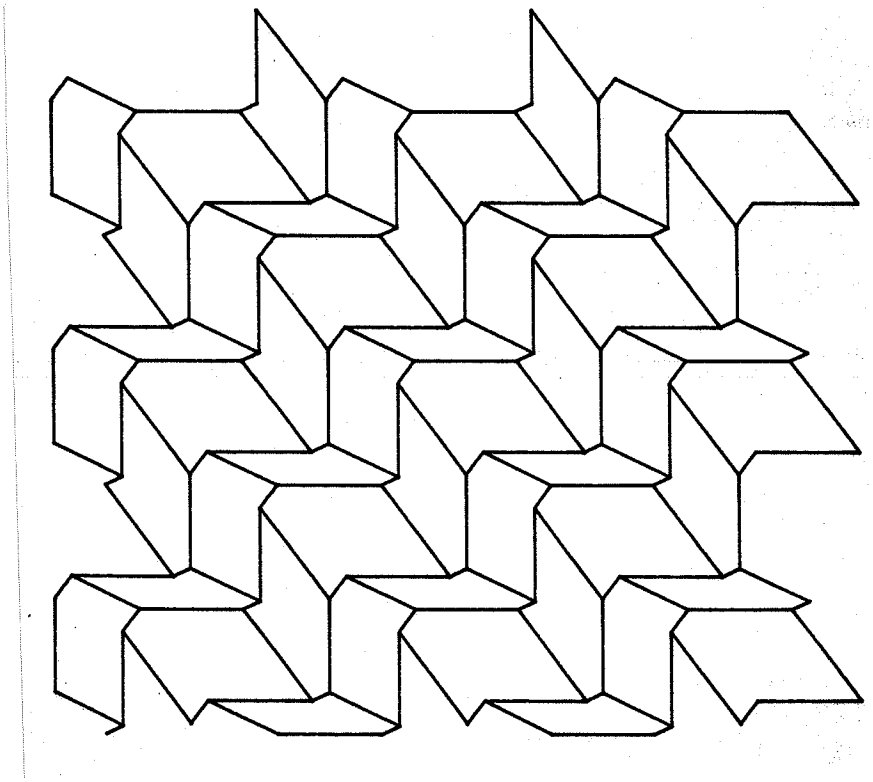
giver for dette element en plan facettering af planen, da

$$\Delta K_{ABF} = 2\pi - (A+B+F) = 0$$
$$\Delta K_{DCF} = 2\pi - (D+C+F) = 0$$

Anvendes istedet følgende "kemiske" formel

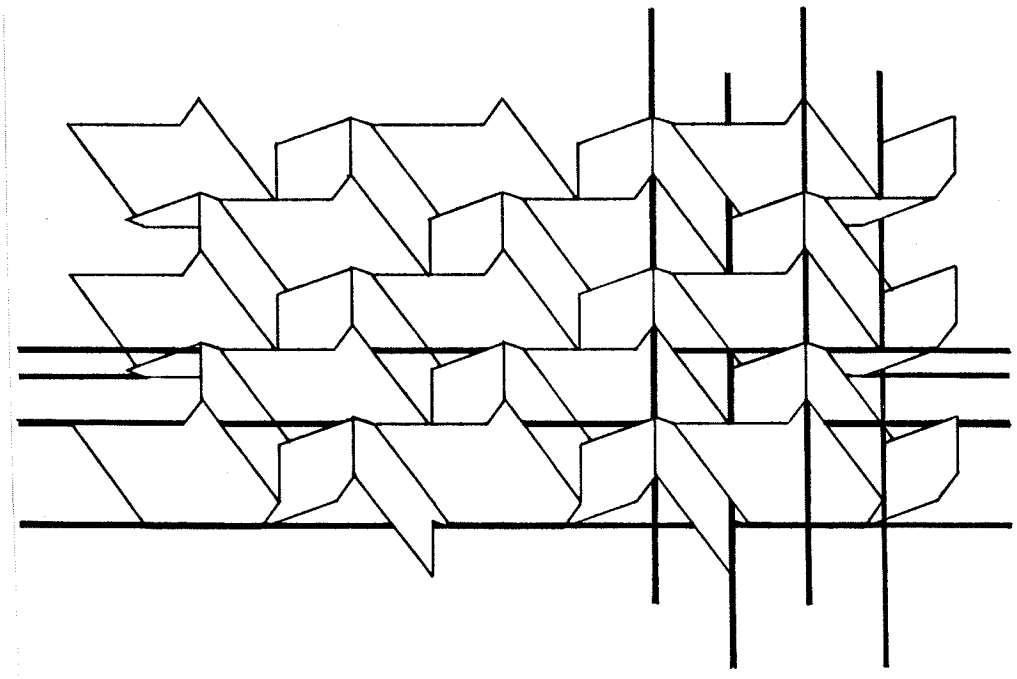
$$(AFC),(DEB) \qquad (25)$$

fås en rumligt skivefacetteret plan, som vist på figur 80.



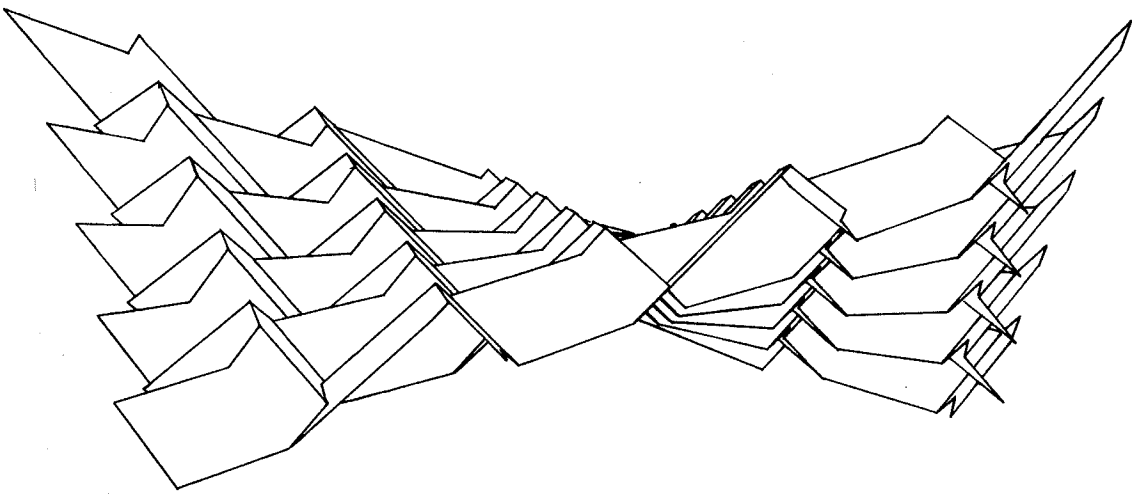
Figur 80. Rumligt skivefacetteret plan.

Betragtes konstruktionen på figur 80, ses det, at nogle af samlingerne ligger i forlængelse af hinanden, og det medfører, at konstruktionen kan indeholde stringere, som vist på figur 81.



Figur 81. Stringere indbygget i rumligt skivefacetteret plan.

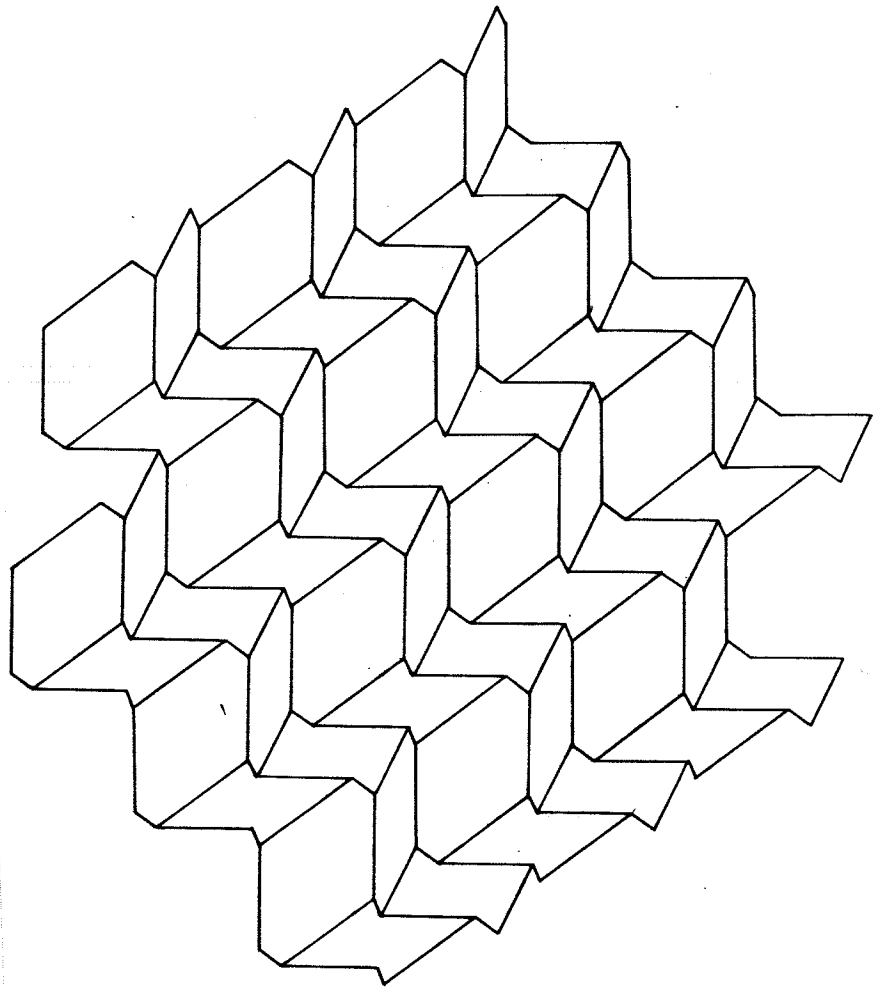
Skiverne i denne konstruktion ligger i 4 parallelbundter af planer, og inddeler man skiverne i 4 grupper, afhængigt af hvilket parallelbundt, de ligger i, kan man dualtranslatere disse 4 grupper af skiver efter 4 forskellige retninger. Disse dualtranslationer bevarer egenskaben - samling ligger i forlængelse af samling, og stringerne kan derfor fortsat være retlinede. Selve den rumligt skivefacetterede plan transformeres derimod til en rumligt skivefacetteret hyperbolsk paraboloide, og stringerne bliver nogle af de rette linier, som en sådan flade indeholder. Se figur 82.



Figur 82. Rumligt skivefacetteret hyperbolsk paraboloide, som kan indeholde retlinede stringere.

Disse 2 dualtranslationer medfører, at alle skivelementer bliver forskellige, men v.h.a. det før beskrevne edb-program, kan man bestemme deres form afhængig af størrelsen og retningen af de 4 dualtranslationer.

Man kan naturligvis også rumligt skivefacettere med elementer, som ikke alle er ens. På figur 83 er vist en rumligt skivefacetteret plan, hvor der indgår 2 forskellige elementtyper.



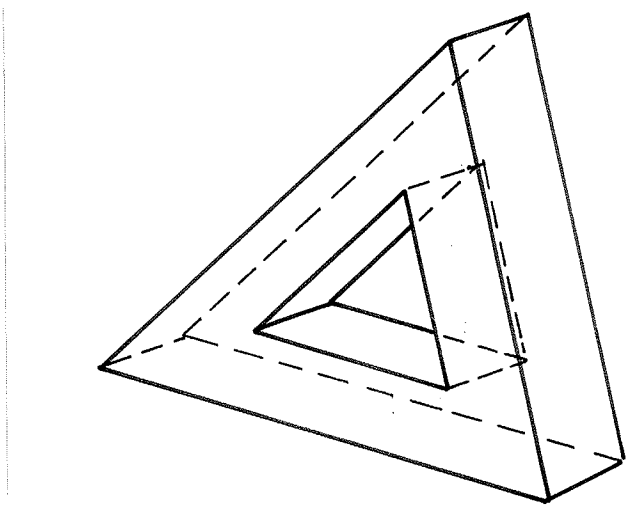
Figur 83. Rumligt skivefacetteret plan, indeholdende 2 forskellige elementer.

Det ene af elementerne er en konveks sekskant, mens det andet element er en sekskant med 2 indadgående hjørner, og disse 2 elementer tilsammen indeholder netop det samme forhold mellem indadgående og udadgående hjørner (1:5), som elementet med 1 indadgående hjørne.

3.3.2.2 Skivefacettering af torus.

Som afslutning på behandlingen af de flader, som kan skivefacetteres med sekskanter, betragtes en torus med 1 hul, der som tidligere omtalt, også har en total krumning på 0.

På figur 84 er vist en simpel måde, hvorpå man kan facettere en torus.



Figur 84. Facetteret torus.

Facetterne udgøres af 6 firkanter og 2 sekskanter, hvor sekskanterne har 3 ydre kanter og 3 indre kanter. Denne type sekskanter adskiller sig fra normale sekskanter, ved at summen af vinklerne er 6π, hvor en normal sekskant har vinkelsummen 4π. Dette betyder, at disse sekskanter ikke er krumningsmæssig neutrale, men giver bidraget

$$\Delta K = {}^{6}/_{3} \cdot 2\pi - 6\pi = -2\pi$$

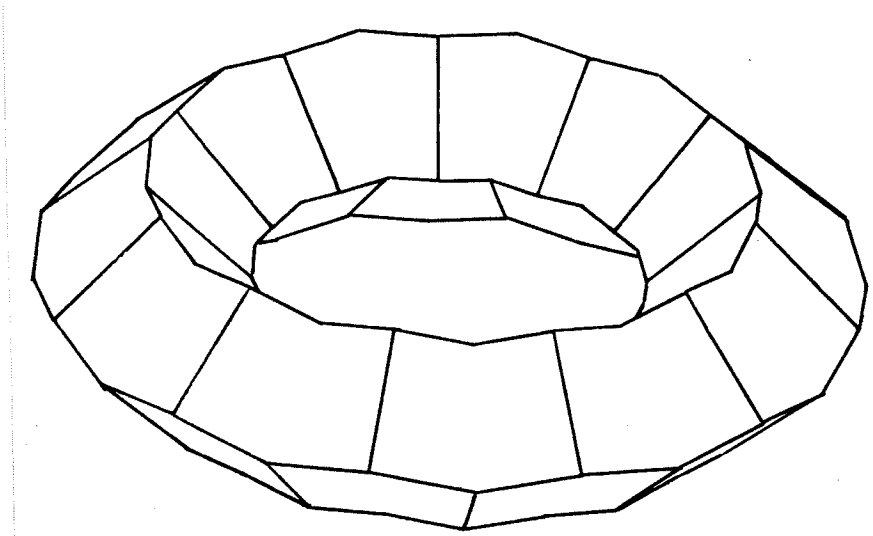
til den totale krumning, og dette er grunden til, at facetteringen på figur 84, udover de 2 sekskanter, indeholder 6 firkanter.

Betragter man denne torus fra et statisk synspunkt, haves, at de 2 sekskanter er statisk neutrale, mens de 6 firkanter hver bidrager med -1 overtallige snitkræfter ialt -6, og den nødvendige betingelse for, at konstruktionen er statisk bestemt, er derfor opfyldt.

Af figur 84 kan man imidlertid se, at hvis f.eks. de 3 indre firkanter var understøttede, ville en påvirkning på en af de ydre firkanter vinkelret på 6-kanterne, kun kunne overføres ved pladevirkning i 6-kanterne, og konstruktionen er derfor ustabil som skivekonstruktion.

Facetteringen er ikke en skivefacettering, da naboskiverne til sekskanterne ikke danner 1 men 2 skivekredse.

Man kan imidlertid ret let v.h.a. det tidligere omtalte edb-program finde en skivefacettering af torusen, hvor alle facetter er normale sekskanter, som vist på figur 85.



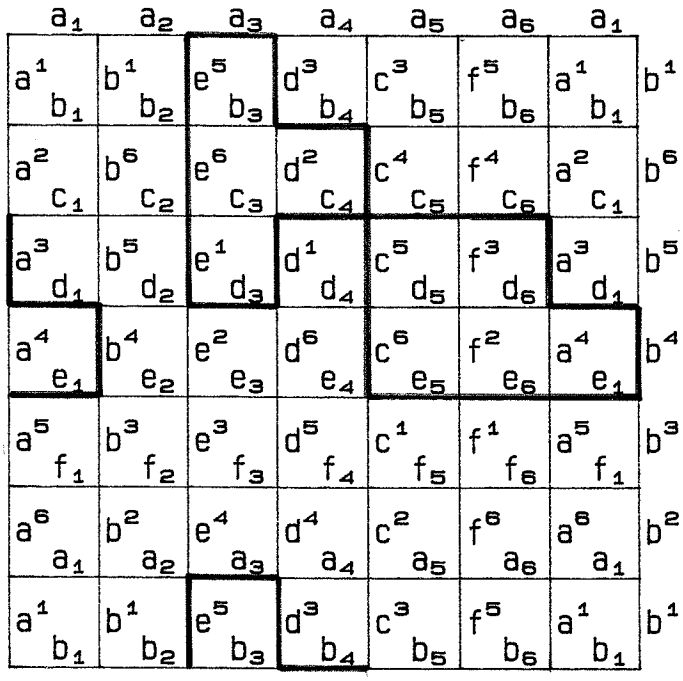
Figur 85. Skivefacettering af torus.

Denne skivefacettering fører til en rumlig stabil 6 gange statisk ubestemt konstruktion.

3.3.3 Flader med negativ totalkrumning.

Der skal herefter betragtes n-kanter, hvor n er større end 6. Som omtalt må en opbygning med sådanne elementer føre til flader med negativ totalkrumning, hvor den numeriske værdi af totalkrumningen går mod uendeligt, når antallet af elementer i opbygningen går mod uendeligt. Fra topologien haves, at den eneste flade, som kan opnå vilkårlig stor negativ totalkrumning, og som uden at skære sig selv kan realiseres i det normale 3-dimensionelle rum, er en flerhuls torus. Som praktiske eksempler på sådanne flader kan nævnes lukkede rørsystemer og den indre overflade i et tunnelsystem. Overfladen af en gitterkonstruktion er også en flerhuls torus, og man kan derfor skivefacettere en gitterkonstruktion.

Først betragtes snitprocesser i navngivne kvadratnet. På figur 86 er vist en snitproces i det navngivne kvadratnet fra figur 38.



Figur 86. Snitproces som fører til et dobbeltelement.

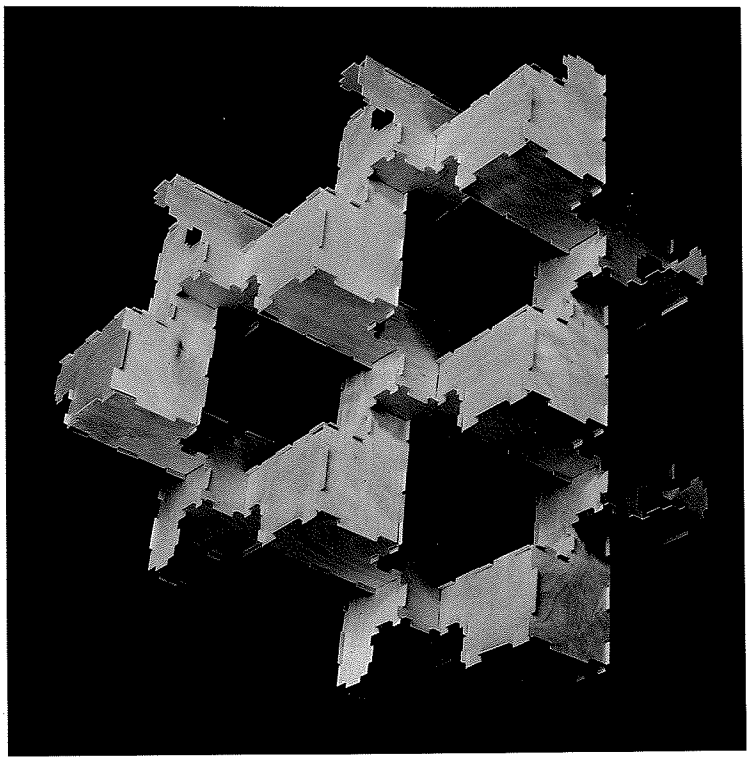
Af figur 86 ses, at alle rande på dobbeltelementet indgår i en rand-rand samling, og at alle indre linier skal parres med linier uden for dobbeltelementet. Dobbeltelementet består af en sekskant og et ottekant, og dets bidrag til totalkrumningen er derfor det samme som for en ottekant alene. Bidraget bliver

$$\Delta K_D = \frac{\pi}{3} (6 - 8) = - \frac{2\pi}{3}$$

Da hvert hul i en flerhuls torus bidrager med -4π til totalkrumningen, giver en opbygning med n dobbeltelementer i gennemsnit

$$\frac{n \cdot \frac{2\pi}{3}}{4\pi} = \frac{n}{6} \text{ huller.}$$

På figur 87 er vist en rumlig opbygning med dobbeltelementet.



Figur 87. Rumlig opbygning med dobbeltelement bestående af en sekskant og en ottekant.

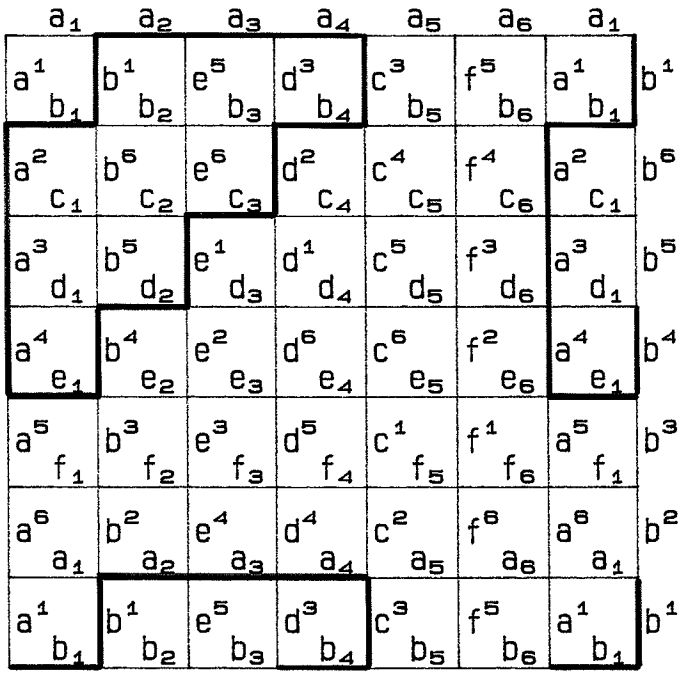
Opbygningen kan topologisk karakteriseres som et sekskantnet, hvor en knude i dette net består af en terning med 3 ben. Da hver terning er opbygget af 3 dobbeltelementer, og da hver terning støder op til 3-huller, fås, at

3 dobbeltelementer ~ $^{3}/_{6}$ huller ⇒

1 dobbeltelement ~ $^{1}/_{6}$ hul

hvilket krumningsbetragtningen også giver.

Også mere komplicerede netværk kan skivefacetteres med ens elementer. På figur 86 er vist et element, som er fremkommet af en anden snitproces, i det på figur 86 viste navngivne kvadratnet.

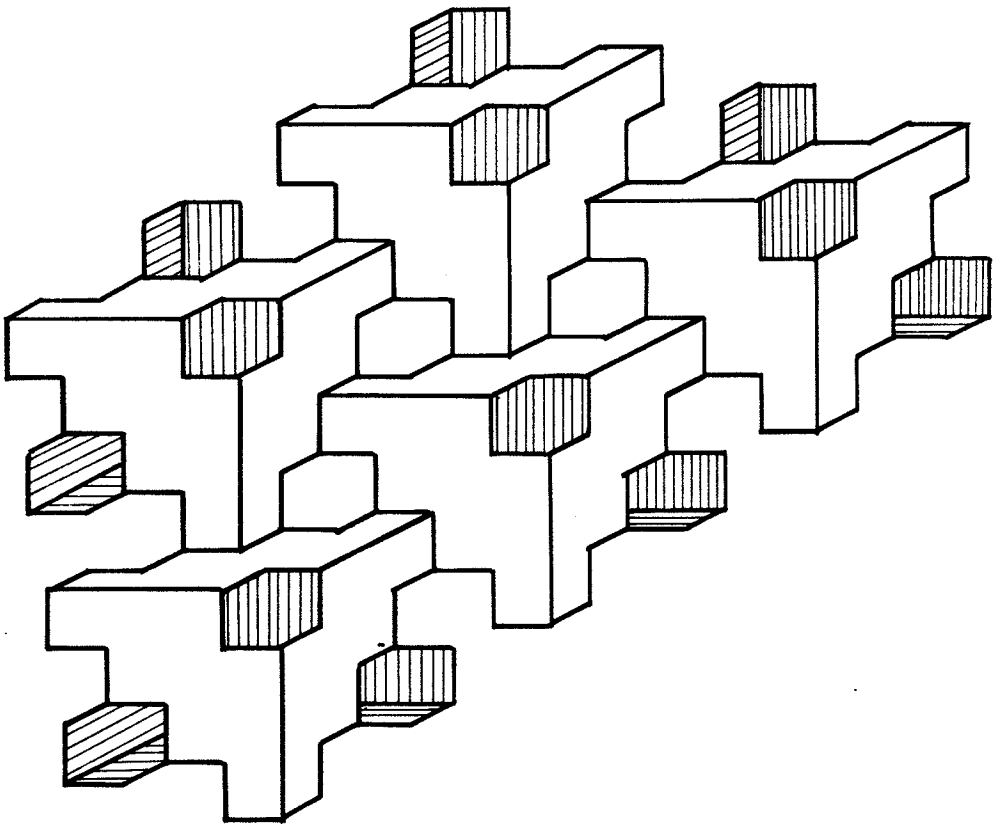


Figur 88. 12-kantet element fremkommet ved snitproces.

Hvert elements bidrag til totalkrumningen er:

$$\Delta K_{12\text{-kant}} = \frac{\pi}{3}\,(6 - 12) = -\,2\pi$$

På figur 89 er vist en rumlig opbygning med dette element.



Figur 89. Rumlig opbygning med 12.kant-element.

På figuren er kun vist et lag af opbygningen. Topologisk kan opbygningen karakteriseres som trekantnet, hvor knuderne i nettet er terninger med 8 ben. 6 af benene indgår i et trekantnet, mens de 2 resterende forbinder dette net med et overliggende og et underliggende net.

3.3.4 Facettering af vilkårlig flade.

Som afslutning på dette afsnit skal der opstilles en metode til, hvordan man kan skivefacettere en vilkårlig flade, således at skivefacetterne ligger i plan med udvalgte tangentplader til fladen.

Denne problemstilling kan formuleres på følgende måde:
Givet den geometriske del af en skiverepræsentation. (Ligningerne til tangentplanerne i udvalgte punkter).

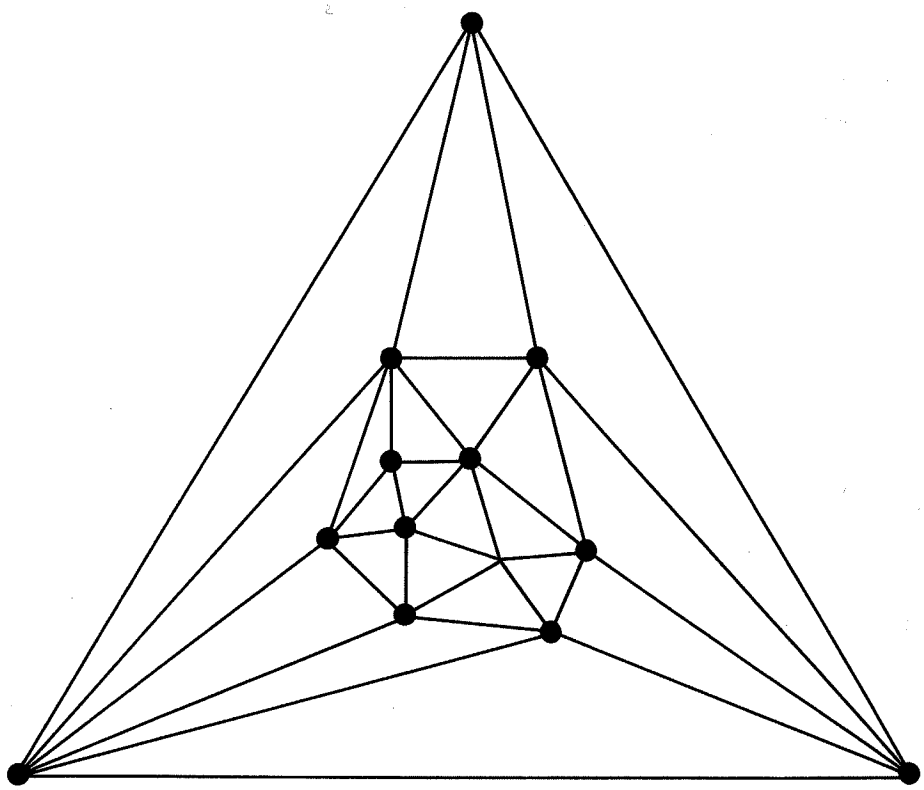
Find den topologiske del, således at basisudfoldningen giver enkeltsammenhængende elementer uden indre linier.

Som omtalt i indledningen til dette kapitel, medfører kravet om, at alle elementer skal være enkeltsammenhængende uden indre linier, at det duale gitter må have den egenskab, at forbindelseslinierne mellem naboknuderne til en vilkårlig knude danner én og kun én gitterkreds, hvori alle naboknuderne indgår.

I det følgende forudsættes det, at den flade, som skal facetteres, er enkeltsammenhængende, hvilket medfører, at en flerhulstorus kun kan behandles, hvis den opdeles i enkeltsammenhængende sektioner.

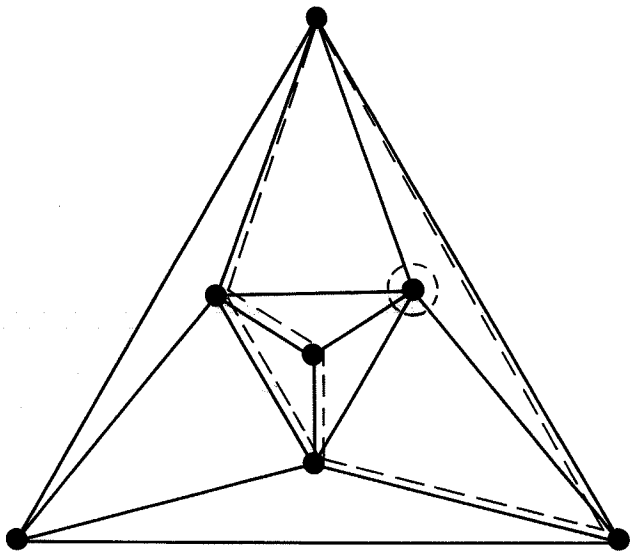
3.3.4.1 Det duale gitters topologi.

Hvis den flade, som skal skivefacetteres, er enkeltsammenhængende og lukket, kan den duale gitterkonstruktions topologi tegnes i en plan, således at gitterstængerne kun skærer hinanden i knuderne. På figur 90 er vist det principielle udseende af et sådant gitter, tegnet i et plan.



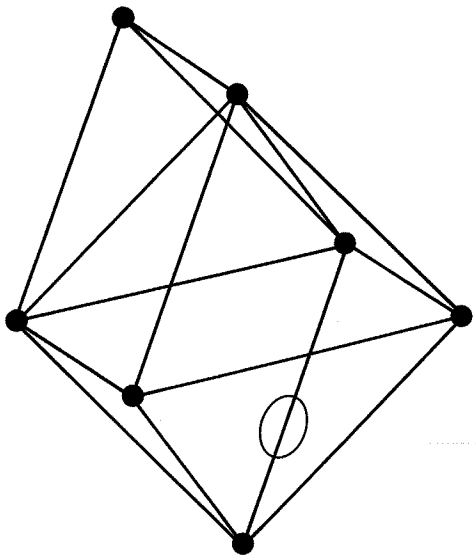
Figur 90. Dualt gitter til en skivefacetteret enkeltsammenhængende lukket flade.

Gitteret på figur 90 kan karakteriseres som en triangulering af det indre af en trekant. Det ses, at trianguleringen af trekanten på figur 90 har egenskaben, at forbindelseslinierne mellem naboknuderne til en vilkårlig knude danner en gitterkreds, hvori alle naboknuderne indgår. Betingelsen for, at en vilkårlig triangulering af det indre af en trekant har den omtalte egenskab, er, at ingen knude må ligge inden i en trekant bortset fra inden i den ydre trekant. På figur 91 er vist en triangulering af en trekant, som ikke opfylder denne betingelse.



Figur 91. Triangulering af en trekant, som ikke er dual til en skivefacetteret flade.

Gitteret på figur 91 er i rumlig udgave et oktaeder og et tetraeder med en fælles trekant, som vist på figur 92, og fremkommer af dette, når det betragtes gennem den på figuren med bolle markerede trekant.



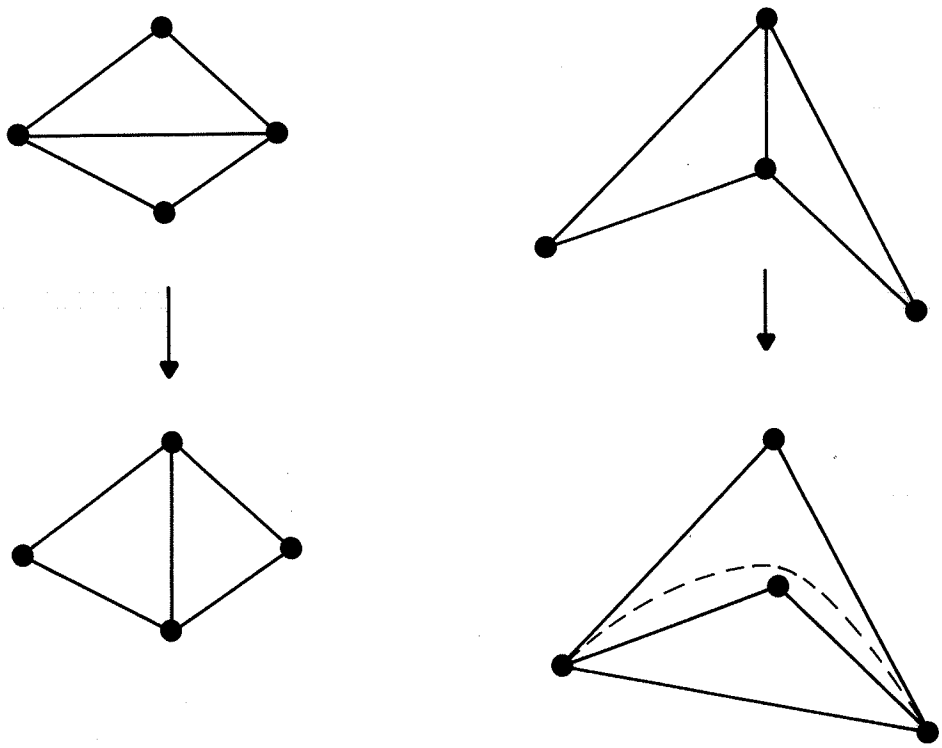
Figur 92. Et oktaeder og et tetraeder med en fælles flade.

Et gitter, som indeholder knuder, som er indre knuder i andre end den ydre trekant, er derfor dualt til en flercellet konstruktion.

Trianguleringen af det indre af en trekant, hvor ingen knuder er indre knuder i andre trekanter end den ydre, har nogle egenskaber, som her skal beskrives.

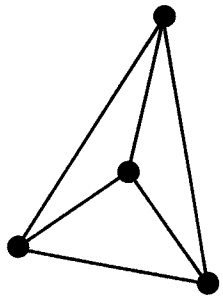
Det er klart, at man hverken kan tilføje en stang eller fjerne en stang. Derimod kan man flytte en stang. Alle stænger indgår i 2 trekanter, og den firkant, sådanne 2 trekanter danner, kan derfor trianguleres på 2 forskellige måder, og det betyder, at trianguleringen bevares, hvis man flytter en stang fra den ene diagonal til den anden i en vilkårlig firkant. Bevarelsen af egenskaben, at alle knuder kun er indre knuder i den omsluttende trekant, kan man sikre ved kun at flytte stænger, der støder op til knuder, hvis valens er større end eller lig med 5, hvor valensen af en knude defineres som antallet af stænger, som støder op til den.

For at eftervise rigtigheden af dette udsagn, betragtes først selve flytningen af en stang fra en diagonal i en firkant til en anden uafhængigt af knudernes valenser. Umiddelbart kunne man tro, at der var to tilfælde afhængigt af, om den betragtede firkant er konveks eller ikke konveks, som vist på figur 93.



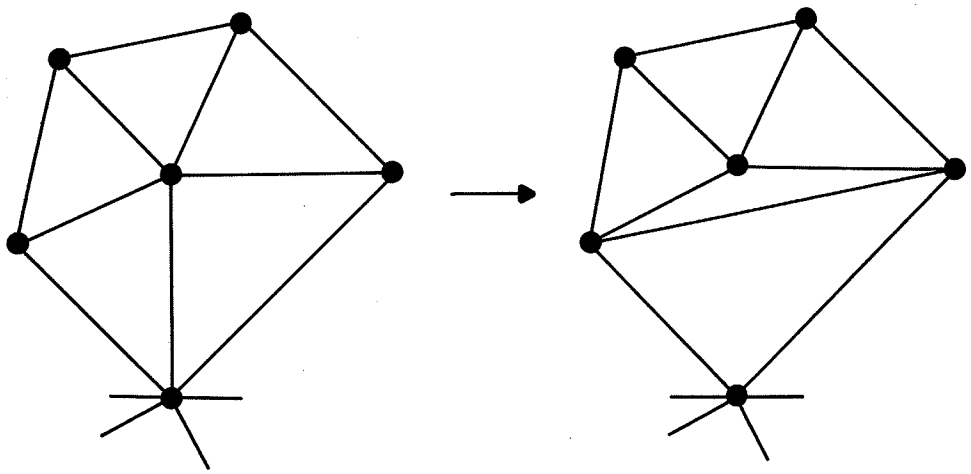
Figur 93. Ombytning af diagonalerne i konveks og ikke konveks firkant.

Ved flytning af diagonalen i den ikke-konvekse firkant er der tilsyneladende blevet dannet en knude, som ligger inden i en trekant. I topologisk forstand er denne knude ikke en indre knude, idet den triangulerede trekant kan tegnes, således at en vilkårlig firkant bliver konveks uden at den topologi, som den repræsenterer, ændres. Man kan også sige, at stængerne ikke behøver at være rette, som vist med stiplet linie på figuren. Det er klart, at man ikke kan flytte en stang, som støder op til en knude med valensen 3, idet valensen 2 ikke kan forekomme i en triangulering. Flytter man en stang fra en knude, som har valensen 4, får man en knude med valensen 3, og en sådan vil altid være en indre knude i en trekant, som vist på figur 94.



Figur 94. En knude, men valensen 3 er altid en indre knude i en triangulering.

Flytter man en stang fra en knude med valensen 5, fås en knude med valensen 4. Af figur 95 ses, at denne flytning aldrig kan føre til, at knuden bliver en indre knude.



Figur 95. Flytning af en stang fra en knude med valensen 5.

Lignende gælder ved flytning fra knuder med valenser større end 5.

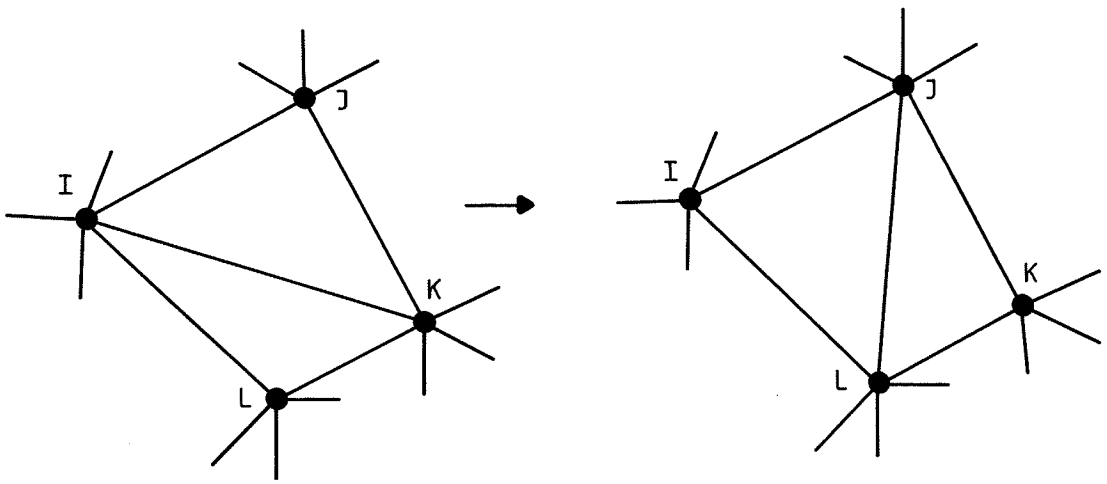
3.3.4.2 Bestemmlse af facetteringen v.h.a. stangflytninger i det duale gitter.

Når man skal skivefacettere en enkeltsammenhængende lukket flade efter udvalgte eller givne tangentplaner til fladen, kan problemstillingen beskrives ved en skiverepræsentation, hvor den geometriske del er ligningerne til tangentplanerne, og den topologiske del er topologien af en trianguleret trekant, hvor antallet af knuder er det samme som antallet af tangentplaner til fladen.

Løsningen på problemet vil være at finde det sæt af lovlige stangflytninger i den triangulerede trekant, som bevirker, at alle facetter bliver enkeltsammenhængende.

Det viser sig nu, at denne løsning kan findes rent geometrisk af en basisudfoldning af skiverepræsentationen uden andre krav til topologien af den triangulerede trekant, end at forbindelseslinierne mellem naboknuderne til en vilkårlig knude skal danne en gitterkreds, omfattende alle naboknuderne.

Der betragtes en vilkårlig firkant i den triangulerede trekant, som vist på figur 96.

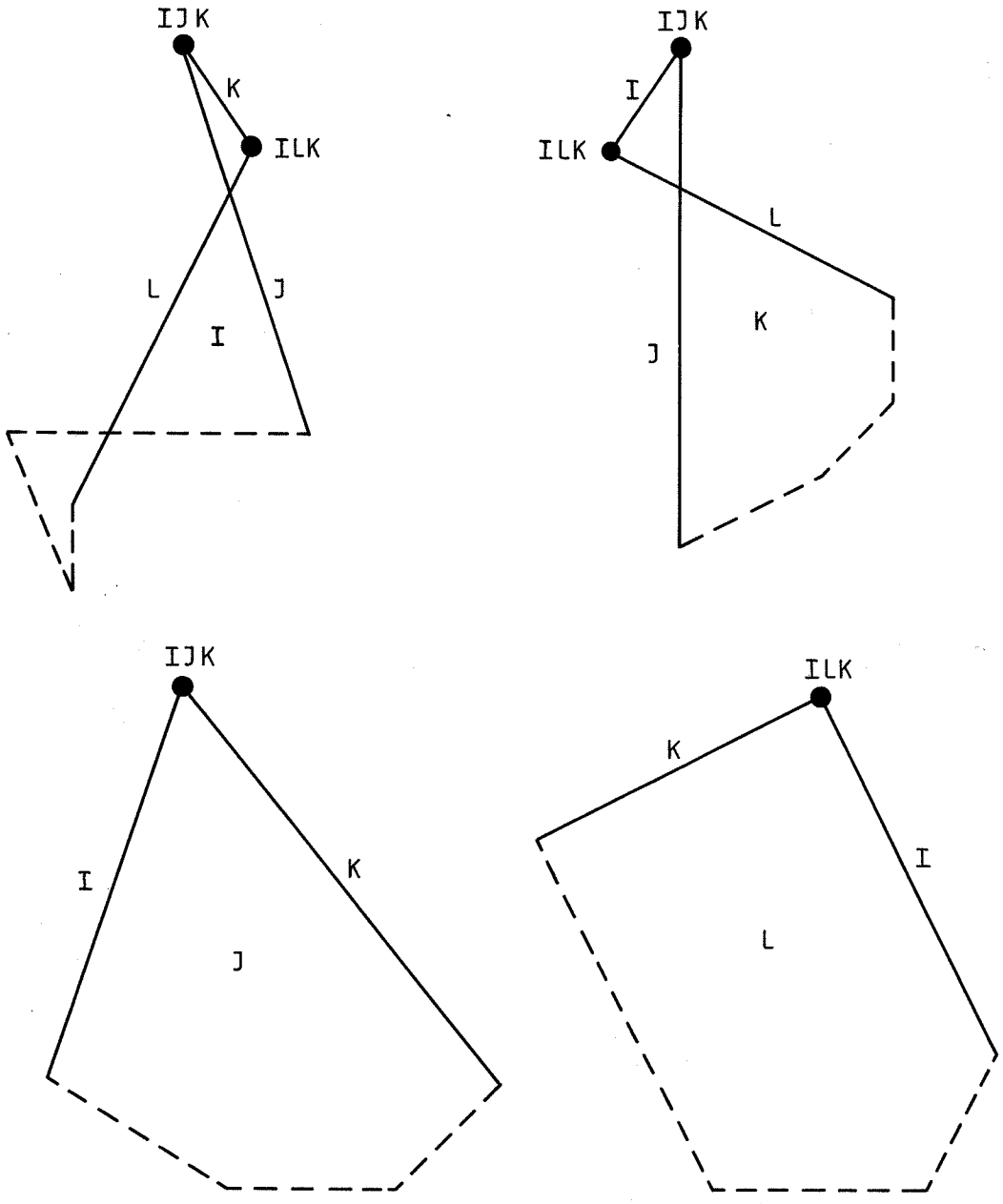


Figur 96. Firkant, som indgår i en trianguleret trekant.

Det, som skal findes, er den virkning, en udskiftning af stang IK med stang JL har på basisudfoldningen.

Det er klart, at denne udskiftning kun bevirker ændringer i basisudfoldningen for skiverne I, J, K og L, mens alle andre skivers basisudfoldning vil være uforandret.

Basisudfoldningen for skiverne I, J, K og L er vist på figur 97.

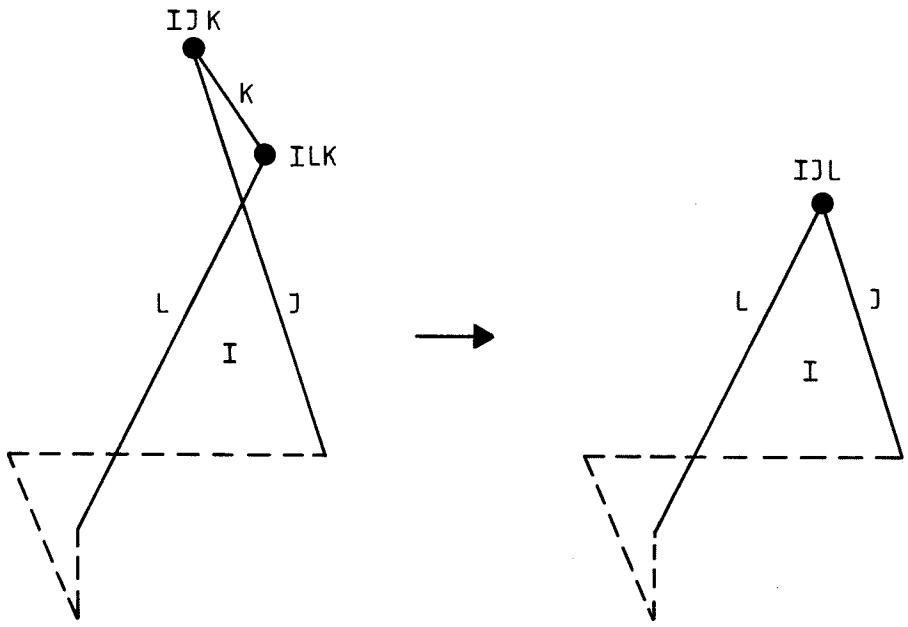


Figur 97. Basisudfoldning af 4 skiver.

Tripletterne IJK og IKL, som er vist på udfoldningerne, svarer til de 2 trekanter IJK og IKL på figur 96. Af topologien i figur 96 følger, at følgende liniestykke i basisudfoldningen skal være lige store.

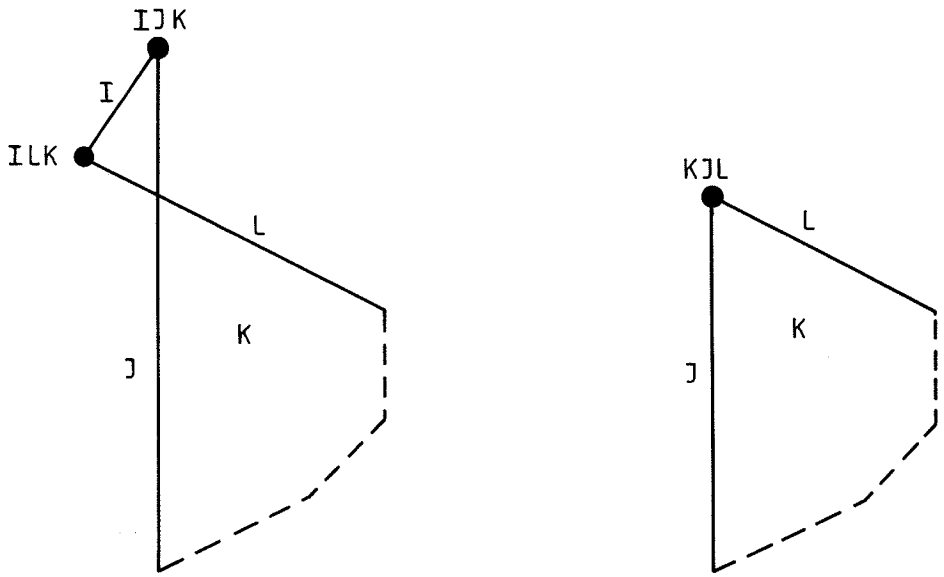
L	i	skive	I	=	I	i skive	L	(IL = LI)
J	"	"	I	=	I	" "	J	(IJ = JI)
K	"	"	I	=	I	" "	K	(IK = KI)
J	"	"	K	=	K	" "	J	(KJ = JK)
L	"	"	K	=	K	" "	L	(KL = LK)

Ved flytningen af stangen forsvinder tripletterne IJK og ILK, og erstattes med tripletterne IJL og KJL. Basisudfoldningen for skive I ændres, som vist på figur 98.



Figur 98. Ændringen af basisudfoldningen for skive I.

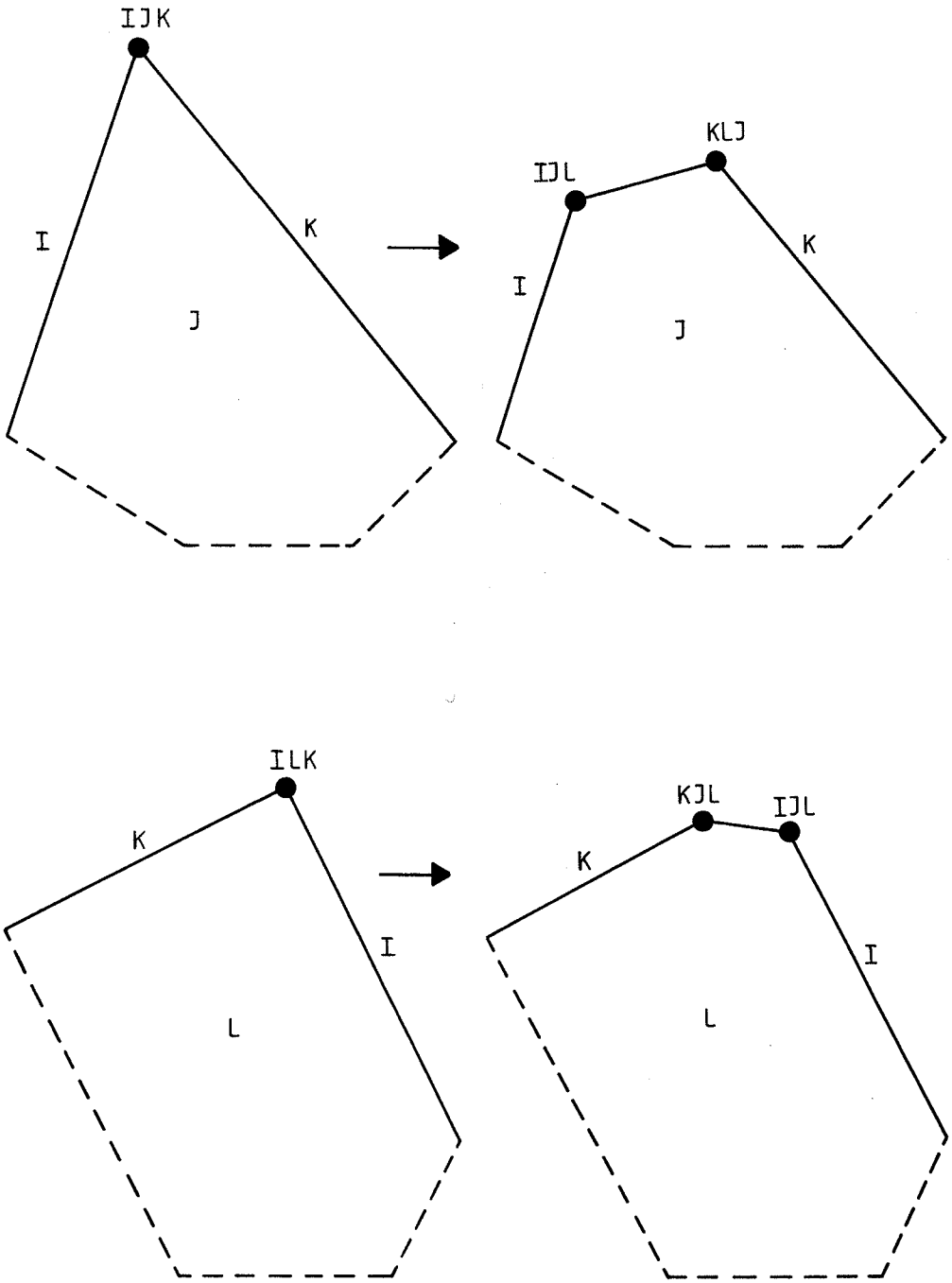
Basisudfoldningen for skive K ændres tilsvarende, som vist på figur 99.



Figur 99. Ændringen af basisudfoldningen for skive K.

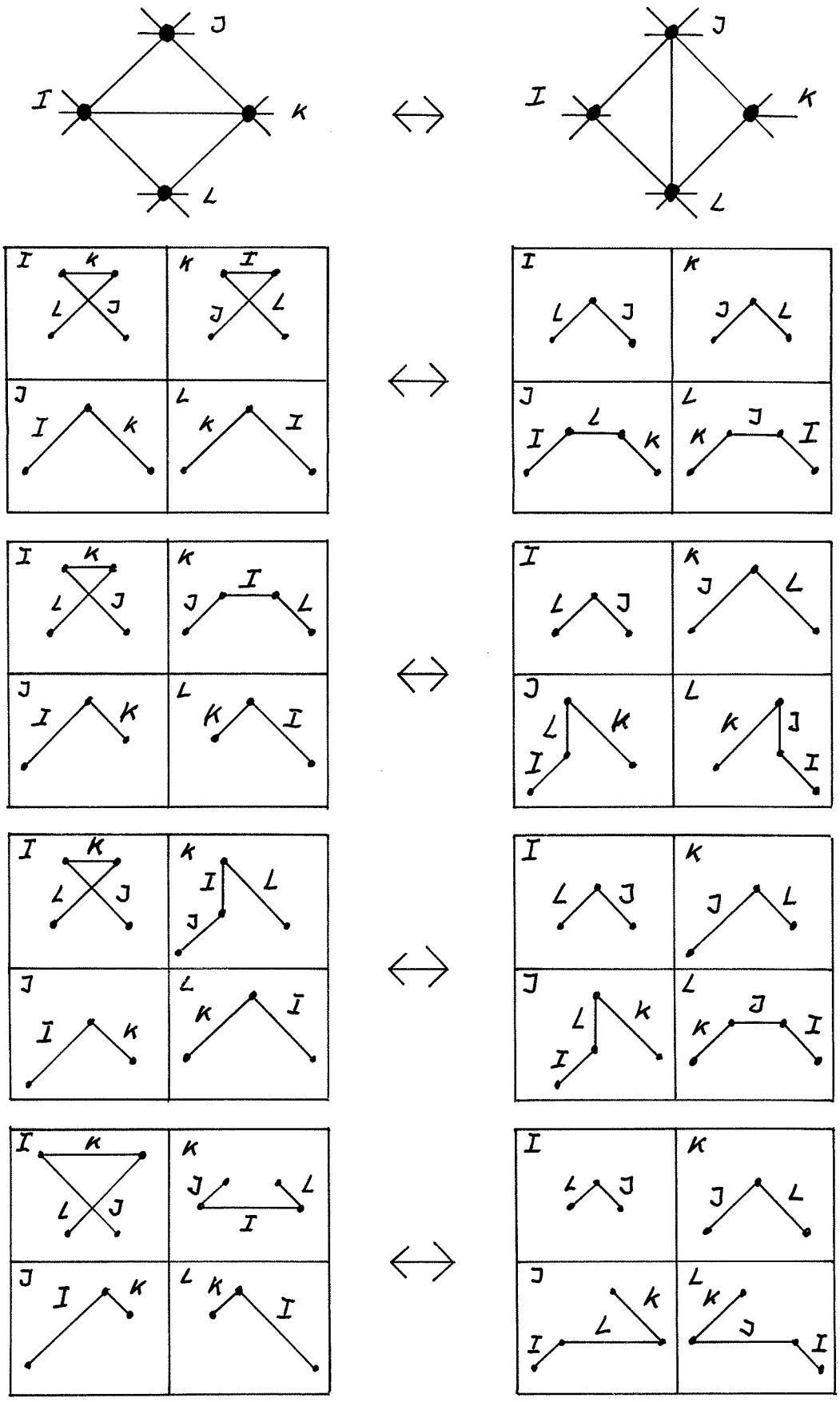
Ændringerne af basisudfoldningerne for skiverne J og L kan nu findes ud fra, at ændringerne af skiverne I og K har medført, at liniestykkerne L og J i skive I og J og L i skive K har fået nye længder.

På figur 100 er vist hvorledes.



Figur 100. Ændringerne af basisudfoldningerne for skiverne L og J.

På figur 101 er skematisk vist, hvad flytningen af stangen betyder afhængig af basisudfoldningens udseende.



Figur 101. Virkningen af en stangflytning.

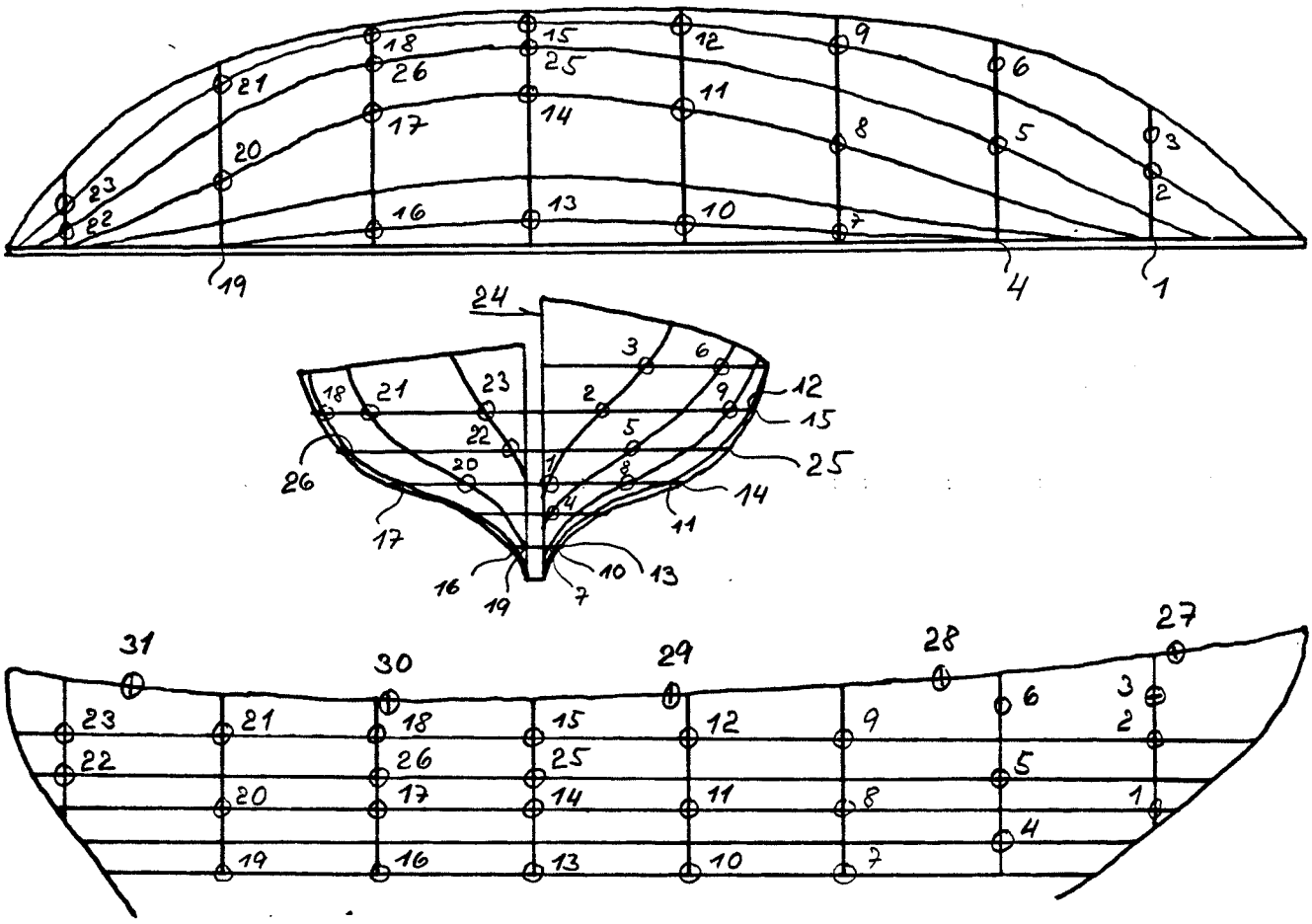
Ved hjælp af det tidligere omtalte edb-program, som kan finde basisudfoldningen, svarende til en vilkårlig skiverepræsentation, kan man nu finde en skivefacettering til en vilkårlig flade, idet man til et givent sæt af tangentplaner vælger en topologi, svarende til en triangulering af de til tangentplanerne svarende duale knuder, og derefter får programmet til at lave basisudfoldningen.

Hvis trianguleringen er valgt ud fra et vist kendskab til, hvor på den flade, som skal facetteres, tangentplanerne er beliggende, kan man direkte v.h.a. figur 101 aflæse hvilke stangflytninger, man skal foretage for at få enkeltsammenhængende elementer. Hvis den triangulering, man har valgt, ligger langt fra løsningen, dvs. der skal foretages mange stangflytninger, kan det være meget vanskeligt at overskue hvilke stangflytninger, der fører til en enkeltsammenhængende elementer, og det kan derfor være nødvendigt at forsøge med flere forskellige trianguleringer.

3.3.4.3 Facettering af et skibsskrog.

Som et eksempel på en anvendelse af de her beskrevne metoder, skal det vises, hvordan man kan modellere den dobbeltkrumme overflade af et skib.

Et skibs form er normalt givet ved en linietegning, som består af et antal lodrette snit vinkelret på skibets længdeakse og et antal vandrette snit. Se figur 102.



Figur 102. Linietegning af jolle.

Øverst i figuren er vist de vandrette snit og i midten de lodrette. På disse snitkurver er der valgt et antal sammenhørende punkter (1-26).

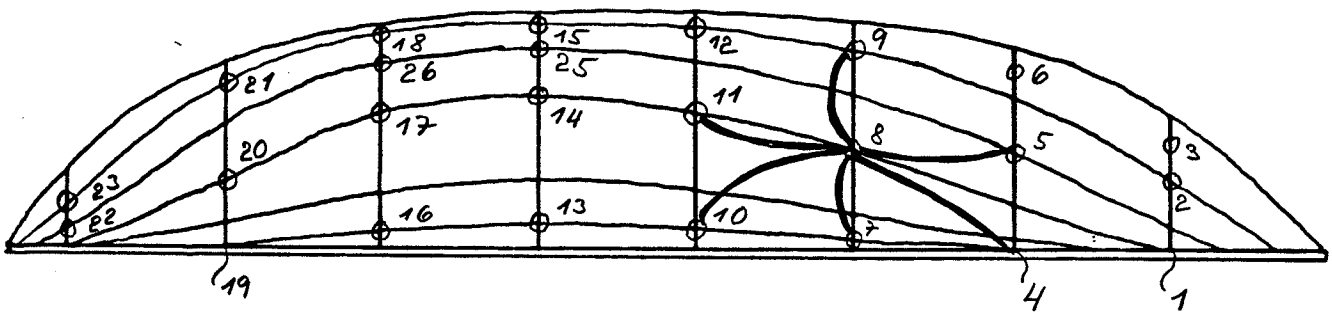
Til hvert par af sammenhørende punkter kan man grafisk bestemme en tangent i en lodret og i en vandret plan, og ud fra disse tangenter kan man bestemme ligningen for tangentplanen, svarende til hvert punktpar.

Skibets begrænsning opad (lønningen) er bestemt af nederste tegning, som viser skibet set fra siden. På denne er valgt 5 punkter (27-31), hvor man grafisk kan bestemme en tangent, beliggende i en lodret plan. Tangentplanerne gennem disse punkter forudsættes at ligge på en cylinderflade med vandret akse vinkelret på skibets midterplan.

Da skibet er symmetrisk om dets midterplan, behandles kun den ene halvdel. Midterplanen har nummer 24.

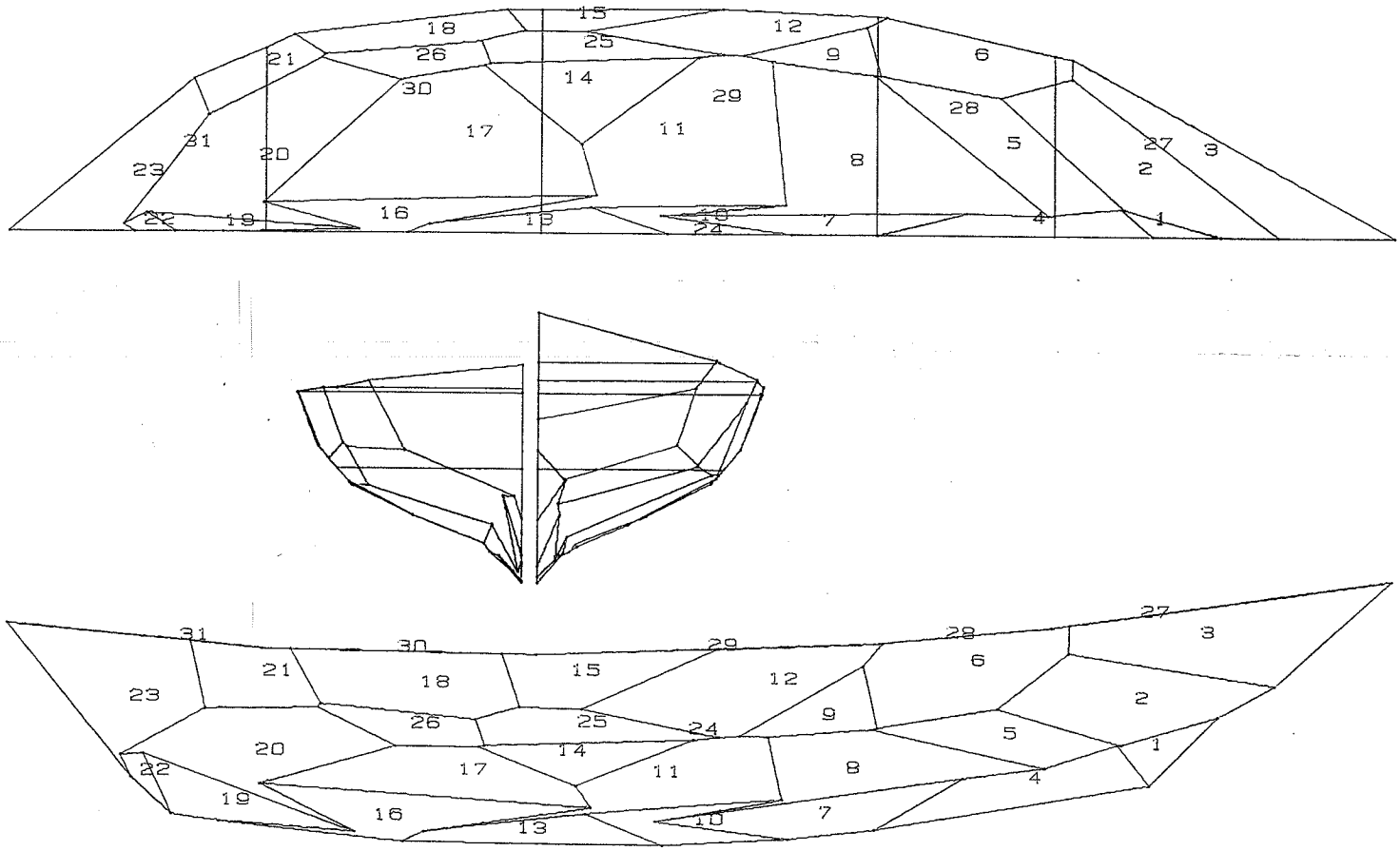
Disse 31 punkter, hver svarende til en tangentplan, placeres nu som knuder i en trianguleret trekant.

På figur 103 er vist hvilke punkter, punkt 8 er forbundet med.



Figur 103. Nabopunkter til punkt 8.

På figur 104 er vist resultatet af en behandling af disse data med det før omtalte edb-program. Figuren viser det facetterede skrog, set fra samme vinkler, som på figur 102.



Figur 104. Facetteret skibsskrog.

Ved bestemelsen af facetteringen blev der foretaget 4 stangombytninger i den først skønnede triangulering, for at nå frem til den triangulering, som svarer til, at alle facetter er enkeltsammenhængende.

3.3.4.4 Fordele og ulemper ved skivefacettering af dobbeltkrumme flader.

Idet der især refereres til skibseksemplet, skal der kort redegøres for fordele og ulemper ved skivefacettering af dobbeltkrumme flader.

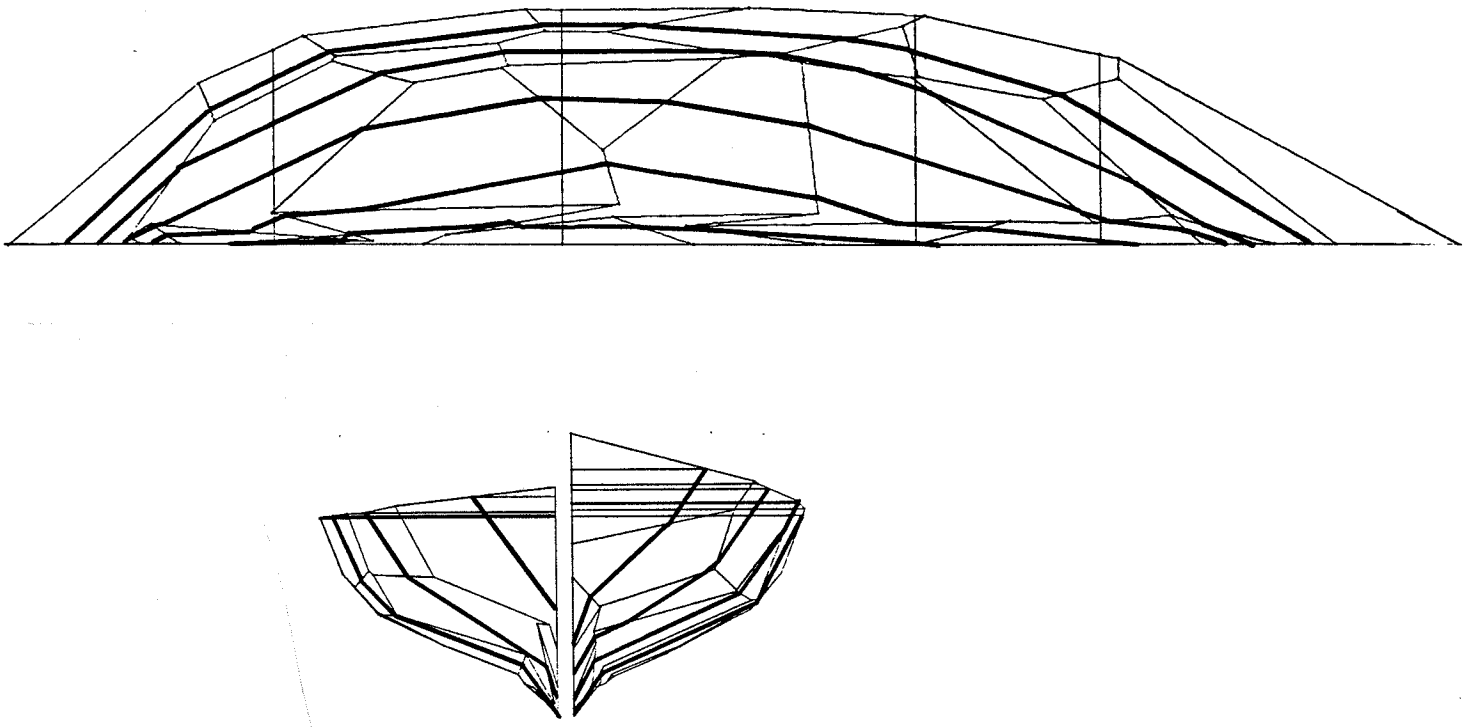
For at starte med ulemperne, er den mest iøjnefaldende den, at en flade med fordelte krumninger approximeres af en flade med krumningerne koncentreret i punkter og linier.

Derudover må den manuelle bestemmelse, ved visuel inspektion af en udfoldning af den triangulering, som fører til enkeltsammenhængende facetter, også betegnes som en ulempe.

Fordelene ved skiverepræsentation er følgende:

1. Nemt at finde fladens udfoldning og dermed fremstille materielle modeller af fladen.

2. Skiverepræsentationen er let at håndtere matematisk, hvilket medfører, at man kan opstille simple algoritmer for f.eks. en flades skæring med en plan, som vist på figur 104, hvor den oprindelige linietegnings vandrette og lodrette snit er indlagt på det facetterede skrog.



Figur 105. Lodrette og vandrette snit i facetteret skrog (fed streg).

3. En flades krumningsforhold kan umiddelbart aflæses af facetteringen.
   (3 konvekse hjørner ⇒ positiv krumning,
   2 konvekse og et konkavt hjørne ⇒ negativ krumning).

4. Der kan opstilles simple algoritmer for areal og volumenberegninger.

4. Analyse af skivekonstruktioner.

Som omtalt i indledningen til denne rapport, er sammenhængen mellem en skivekonstruktion og dens duale gitterkonstruktion så fuldstændig, at man kan beregne en skivekonstruktion statisk v.h.a. et generelt gitterberegningsprogram, hvori der er indbygget nogle simple transformationsformler. I det følgende vil det blive vist, hvordan man kan udlede nogle af disse formler. En mere fuldstændig udledning er givet i [2].

4.1 Stabilitetsforhold.

Når man anvender et gitterprogram med tilhørende transformationsformler på en skivekonstruktion, kan man af resultaterne bl.a. se, om den beregnede konstruktion er stabil eller ustabil, idet de fleste programmer stopper og giver en mere eller mindre forståelig udskrift, hvis de sættes til at beregne en ustabil konstruktion.

Dette er en ret besværlig måde at undersøge en konstruktions stabilitet på, og især hvis man står i en situation, hvor man skal vælge mellem alternative udformninger, er der behov for simplere metoder.

Inden transformationsformlerne udledes, skal selve stabilitetsproblemet derfor først behandles. Sammenhængen mellem en skivekonstruktion og den duale gitterkonstruktion bevirker, at de har samme stabilitetsforhold. I det følgende betragtes derfor kun stabiliteten af gitterkonstruktioner.

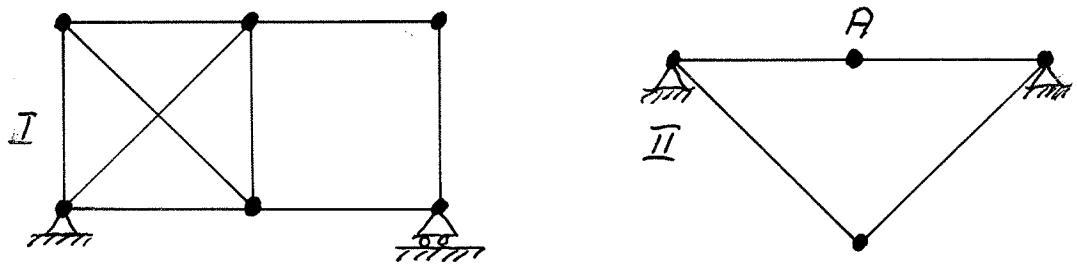
En nødvendig betingelse for at en gitterkonstruktion er indvendig rumlig stabil, er at

$$s \geq 3k - 6 \qquad (26)$$

hvor s er antallet af stænger, og k er antallet af knuder. Dette resultat fås simpelthen ved at sammenholde antallet af ubekendte stangkræfter med det antal ligevægtsligninger, som kan opstilles.

I det følgende forudsættes det, at (26) er opfyldt, og det skal undersøges, hvilke supplerende betingelser man kan opstille, således at disse sammen med (26) udgør en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for stabilitet.

Konstruktioner, der opfylder (26), men alligevel ikke er stabile, kan være ustabile af 2 årsager, som illustreret på figur 106.



Figur 106. Topologisk og geometrisk ustabilitet.

Konstruktionerne er plane gitterkonstruktioner, som begge opfylder den til (26) analoge betingelse for plane gitre. I konstruktion I er årsagen til ustabiliteten, at den ene firkant har 2 diagonalstænger, mens den anden ingen har. Ustabiliteten kan elimineres ved flytning af en stang og den benævnes derfor som topologisk. I konstruktion II er årsagen til ustabiliteten, at stængerne, som støder op til knude A, ligger i forlængelse af hinanden. Ustabiliteten kan elimineres ved, at knude A flyttes således, at stængerne ikke længere ligger på linie, og denne type ustabilitet kaldes derfor geometrisk ustabilitet.

I komplicerede rumlige gitterkonstruktioner kan det være vanskeligt direkte at afgøre, om konstruktionen indeholder nogle af disse typer på ustabilitet, og der skal derfor opstilles en metode, som succecivt kan forenkle en konstruktion, uden at dens stabilitetsforhold forandres.

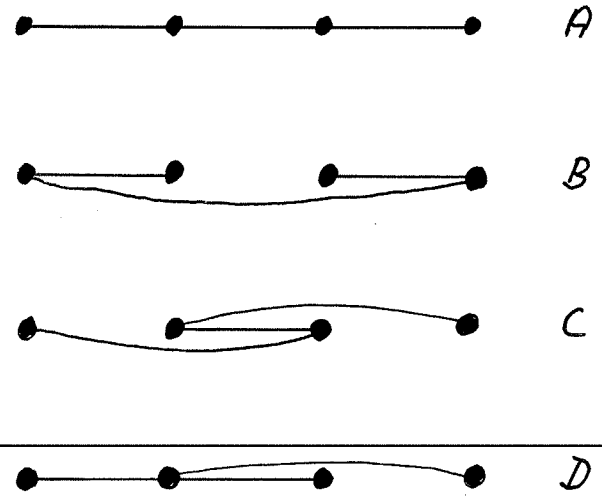
Den første forenkling man kan foretage er at fjerne knuder med valensen 3. (Valensen 2 hvis det er et plant gitter). At dette ikke ændrer konstruktionens stabilitetsforhold, følger direkte af, at de ydre kræfter, som virker på en knude med valensen 3, kan

opløses efter de 3 stænger, som støder op til knuden, og overføres til naboknuderne. Opløsningen efter de 3 stangretninger er ikke mulig, hvis de 3 stænger ligger i samme plan (2 stænger på linie i det plane tilfælde), og man har derfor, hvis dette er tilfældet, fundet, at konstruktionen er geometrisk ustabil.

Det er langt fra altid, at denne forenkling er tilstrækkelig til, at man kan overskue konstruktionen.

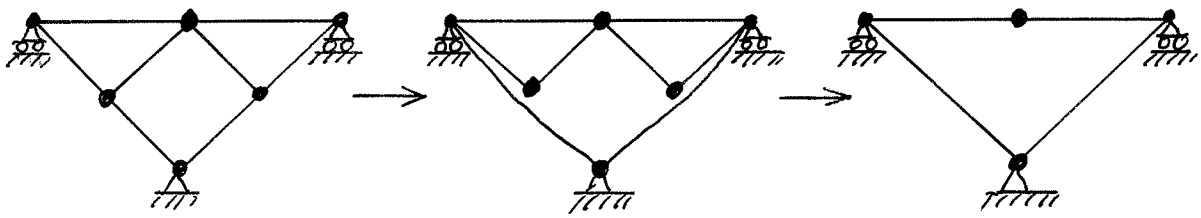
Flytter man en stang i konstruktionen, ændres nogle af knudernes valenser, og man kan derfor opnå, at flere knuder får valensen 3 og kan fjernes. De stangflytninger, som ændrer konstruktionens stabilitetsforhold, kan ikke benyttes, men i nogle tilfælde kan man, ved at betragte en statisk bestemt delmængde af knuder og stænger, identificere nogle stabilitetsbevarende stangflytninger.

Har man i konstruktionen f.eks. 4 knuder, som ligger på en ret linie og forbundet med 3 stænger, er dette en statisk bestemt en-dimensional gitterkonstruktion, og de 3 stængers eneste funktion er at opretholde den indbyrdes afstand mellem knuderne. I praksis vil 4 knuder, liggende på en ret linie, forbundet af 3 stænger, altid se ud som tilfælde A på figur 107, men rent stabilitetsmæssigt kunne knuderne ligeså godt være forbundet, som i tilfældene B, C og D.



Figur 107. Stabilitetsmæssigt ækvivalente måder at forbinde 4 knuder med 3 stænger.

Kaldes tilfælde A en gittervej, har man helt generelt, at en gittervej, som forbinder n knuder, som ligger på en ret linie, kan stabilitetsmæssigt erstattes af et vilkårligt gittertræ, som forbinder de samme n knuder. Et eksempel på en anvendelse af dette, er vist på figur 108.

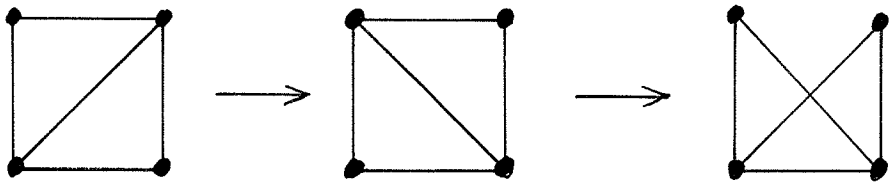


Figur 108. Bestemmelse af stabilitet for plant gitter ved stangombytning og fjernelse af knuder med valensen 2.

Det ses, at det forenklede gitter er geometrisk ustabilt.

Hvis den delmængde af stænger og knuder, som man betragter, udgør en statisk bestemt plan gitterkonstruktion, er flytningen af en stang fra en diagonal

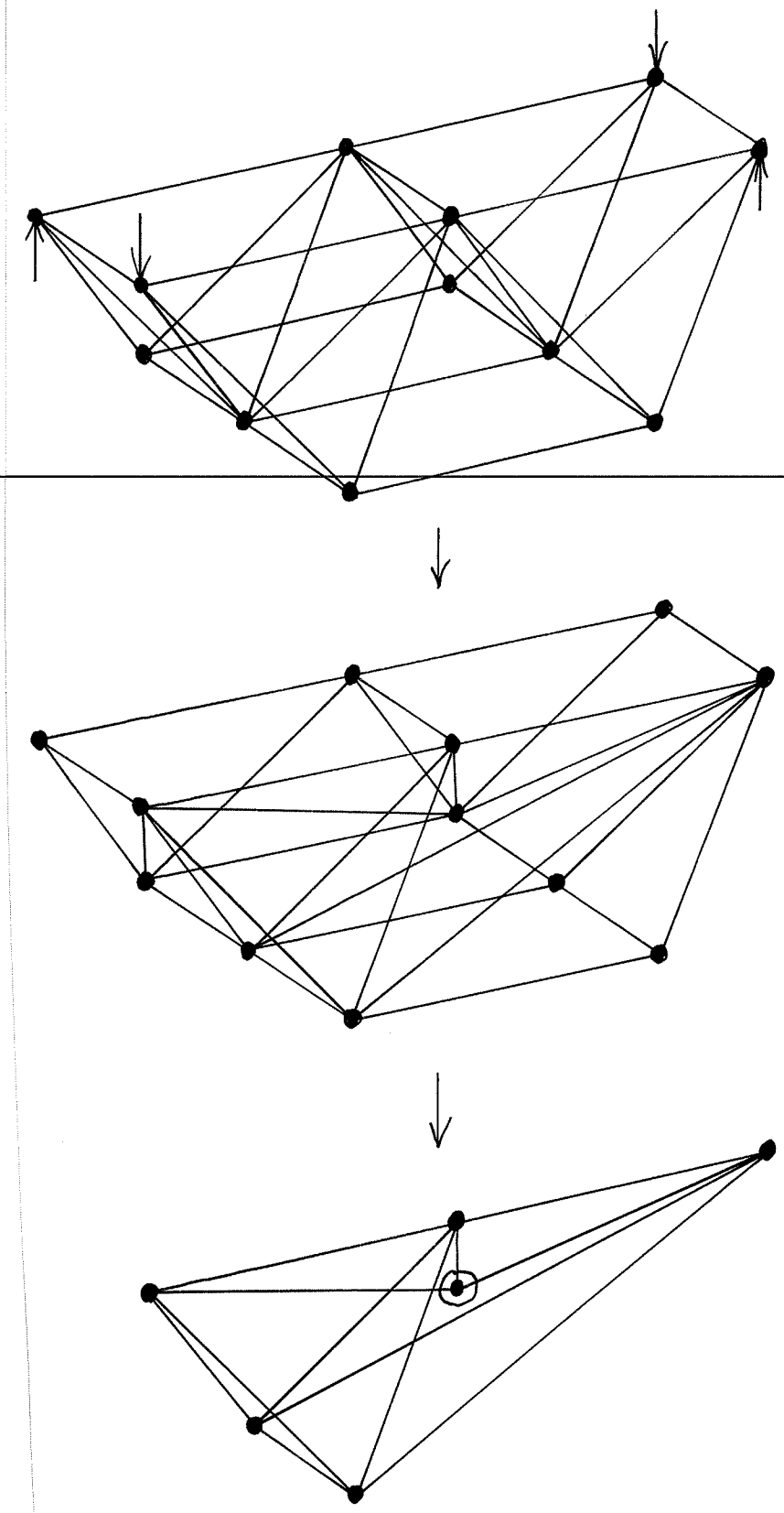
til en anden i en firkant også stabilitetsbevarende, ligesom man kan bytte om på en side og en diagonal. Se figur 109.



Figur 109. Stabilitetsmæssigt ækvivalente måder at forbinde 4 knuder, som ligger i samme plan, med 5 stænger.

Betingelsen for, at disse flytninger er stabilitetsbevarende, er, at 3 af knuderne ikke ligger på ret linie.

Som eksempel på anvendelse af dette, betragtes det på figur 110 viste rumgitter.

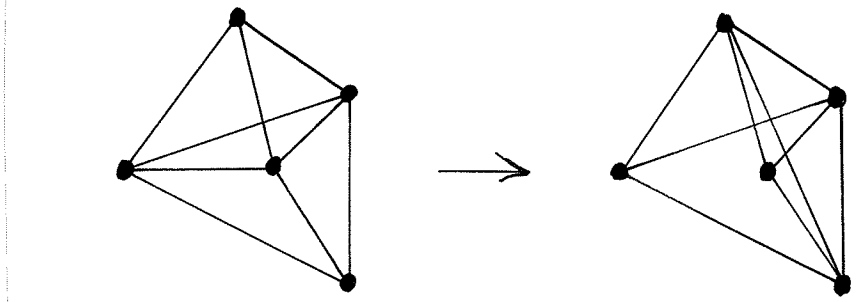


Figur 110. Reduktion af rumgitter ved ombytning af diagonaler i plane firkanter, og fjernelse af knuder med valensen 3.

Rumgitteret i figur 110 består af regulære tetraedre og halve regulære oktaedre. Det har 12 knuder og 30 stænger og opfylder derfor netop (26). Det er geometrisk ustabilt, da det reducerede gitter indeholder en knude med valensen 3, hvor de 3 stænger ligger i samme plan.

Ustabiliteten giver sig konstruktionsmæssigt til kende, ved at gitteret ikke kan optage de på figuren viste 4 kræfter, som svarer til en vridningspåvirkning.

Man kan også have en delmængde af stænger og knuder, som udgør en statisk bestemt rumlig gitterkonstruktion. På figur 111 er vist et dobbelttetraeder.

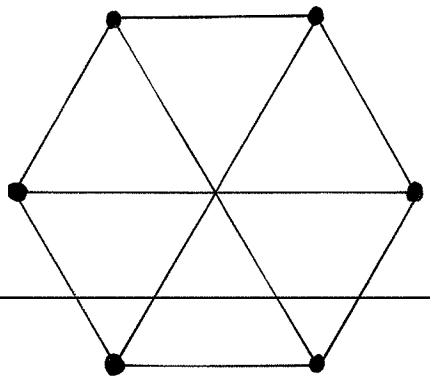


Figur 111. Stangflytning i dobbelttetraeder.

Betingelsen for, at stangflytningen er stabilitetsbevarende, er, at ingen af de 2 nydannede tetraedre har alle knuderne til at ligge i samme plan.

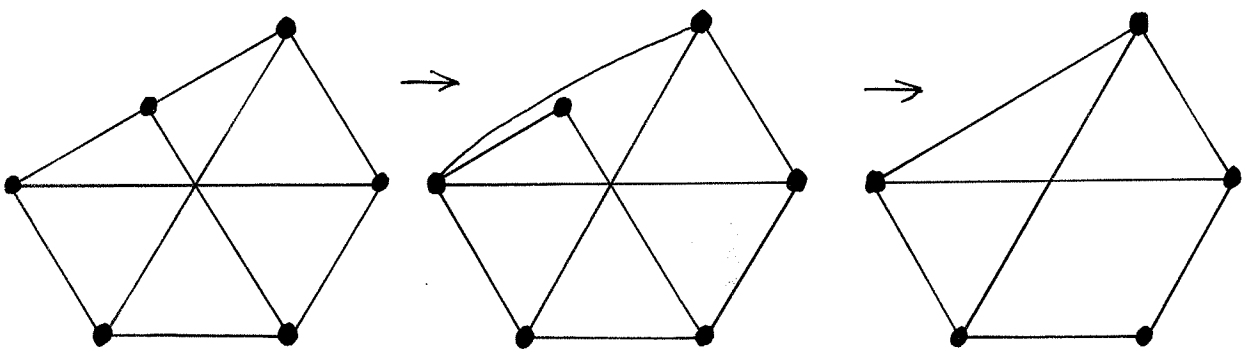
Med de her opstillede regler for stangflytning og fjernelse af knuder med valensen 3 (2), vil man kunne bestemme stabilitetsforholdene for en lang række almideligt forekommende gitterkonstruktioner, men man kan meget let konstruere et eksempel, hvor disse regler ikke er tilstrækkeligt, og meget tyder på, at dette vil være tilfældet lige meget, hvor mange regler man finder.

Et eksempel på en konstruktion, hvor de opstillede regler ikke er tilstrækkelige, er vist på figur 112.



Figur 112. Plant gitter, hvor stabilitetsforholdene ikke kan bestemmes, ud fra de opstillede regler.

Gitteret på figur 112 består af siderne i en regulær sekskant og 3 diagonaler. Ingen af de opstillede regler tillader en ændring af dette gitter. En analyse af gitteret viser, at det er geometrisk ustabilt. Hvis en af knuderne flyttes indad i sekskanten, således at 3 af knuderne ligger på linie, bliver den derimod stabil, som vist på figur 113.



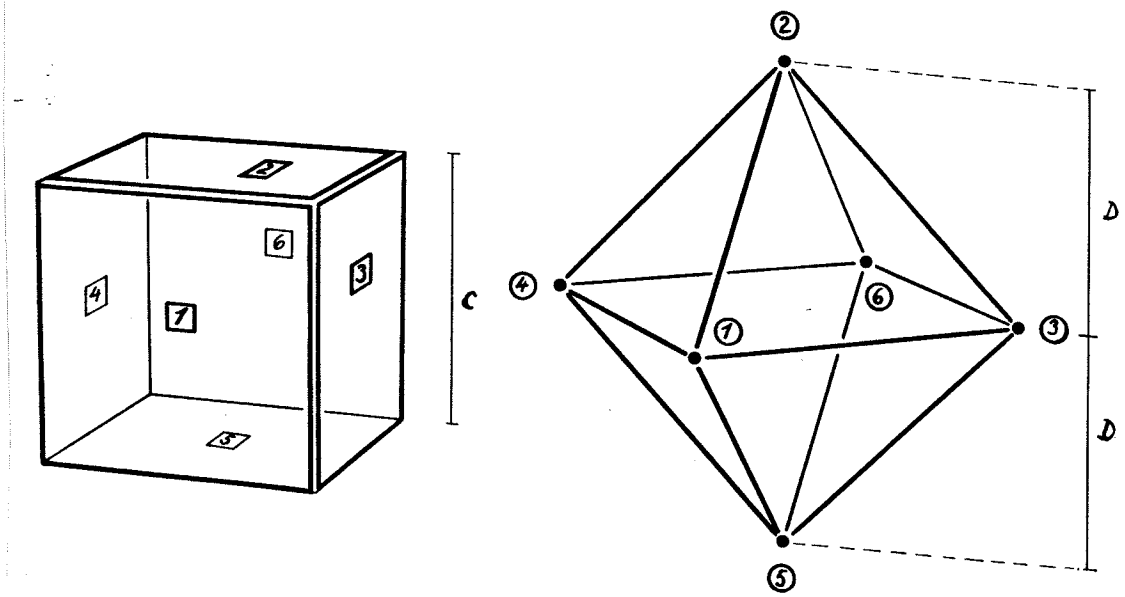
Figur 113. Reduktion af modificeret sekskantgitter.

Som omtalt, er det ikke sikkert, at de her beskrevne regler for stabilitetsbevarende stangflytninger altid fører til et positivt resultat, og i en edb-alder er det næppe umagen værd at opstille yderligere regler for stangombytning, som kan håndteres manuelt, da det kan forudses, at disse for det første sandsynligvis aldrig vil kunne dække alle tænkelige tilfælde, og for det andet vil blive ret komplicerede og vanskelige at håndtere.

4.2 Dualtransformationer.

Der skal herefter udledes nogle af de transformationer, som gør det muligt at foretage en statisk analyse af en skivekonstruktion v.h.a. et generelt gitterberegningsprogram. Som tidligere omtalt, er disse transformationer udførligt beskrevet i [2].

Der betragtes en terning, opfattet som en skivekonstruktion, og et regulært oktaeder, opfattet som en gitterkonstruktion. Fladerne i terningen og knuderne i oktaederet nummeres, som vist på figur 114.



Figur 114. Nummereret terning og oktaeder.

Sidelængden i terningen er C og den halve højde af oktaederet er D. En samling i terningen karakteriseres ved numrene på de 2 flader, som støder op til samlingen, mens en stang i oktaederet karakteriseres ved numrene på de 2 knuder, som stangen forbinder.

Det viser sig nu, at ligevægtsligningerne for terningen og ligevægtsligningerne for oktaederet ligner hinanden så meget, at de kan bringes til at være identiske, hvis C = D, og hvis man vælger en passende sammenhæng mellem belastningen på terningen og belastningen på oktaederet.

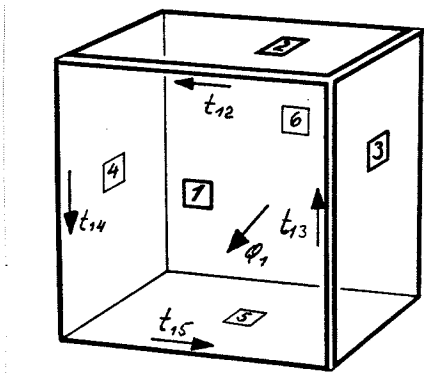
Først betragtes ligevægtsligningerne for terningen.

Hver flade i terningen gives en positiv omløbsretning, svarende til en udadrettet drejningsvektor midt i hver flade. Der tænkes lagt snit i hver samling, og ligevægtsligningerne for hver flade opstilles. Som ligevægtsligninger viser det sig mest hensigtsmæssigt at benytte momentligevægt om samlinger.

For flade 1 haves:
Moment om samling 23

$$t_{14} \cdot C + t_{15} \cdot C + M_{Q_1}^{23} = 0$$

hvor t'erne er forskydningskræfterne i samlingerne, som vist på figur 115.



Figur 115. Kræfter på skive 1.

Q_1 er den ydre kraft på skive 1 og er beliggende i skive 1's plan, og $M_{Q_1}^{23}$ er denne krafts moment om samling 23.

Tilsvarende fås ved moment om samling 35 og 45

$$t_{14}\ C + t_{12}\ C + M_{Q_1}^{35} = 0$$

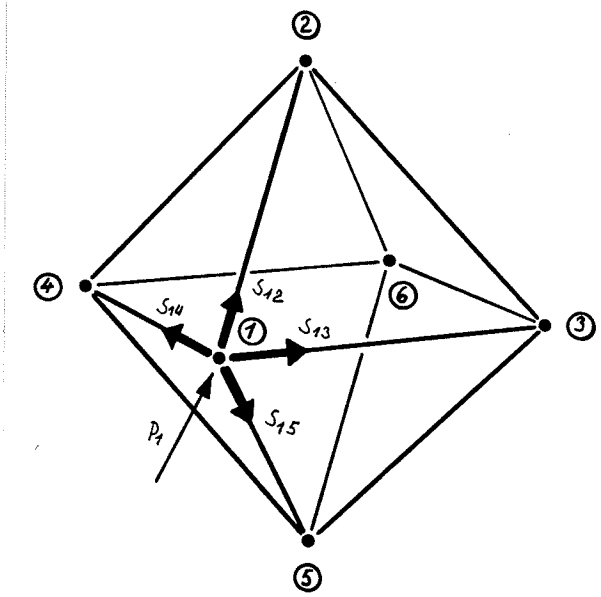
$$t_{12}\ C + t_{13}\ C + M_{Q_1}^{45} = 0$$

For de øvrige flader fås analoge ligninger.

Herefter betragtes oktaederet. Stangkræfterne regnes positive som træk. Moment om stang 23

$$S_{14}\ D + S_{15}\ D + M_{P_1}^{23} = 0$$

hvor S'erne er stangkræfterne, som vist på figur 116.



Figur 116. Kræfter på knude 1.

P_1 er den ydre kraft på knude 1 og $M_{P_1}^{23}$ er denne krafts moment om stang 23.

Tilsvarende fås ved moment om stang 35 og 45

$$S_{14}\ D + S_{12}\ D + M_{P_1}^{35} = 0$$

$$S_{12}\ D + S_{13}\ D + M_{P_1}^{45} = 0$$

For de øvrige flader fås analoge ligninger.
Det ses, at de 2 ligningssystemer er identiske, hvis

$$D = C \quad \text{og}$$

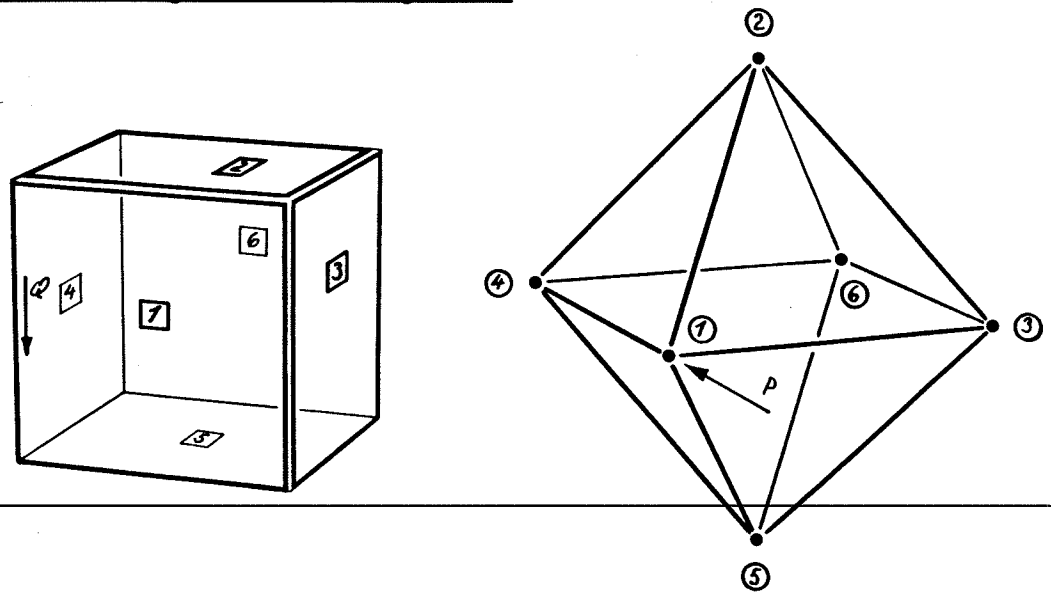
$$M_{Q_i}^{KJ} = M_{P_i}^{KJ} \tag{27}$$

hvor i gennemløber tallene 1-6, og dubletten KJ angiver samlinger henholdsvis stænger.

Når (27) er opfyldt, er forskydningskræfterne mellem terningernes flader lig stangkræfterne i oktaederet, og (27) kan derfor benyttes til at transformere kræfter, som virker på terningen til kræfter, som virker på oktaederet.

I det følgende skal det vises, hvordan (27) fungerer for givne kræfter på terningen.

4.2.1 En kraft langs en terningkant.



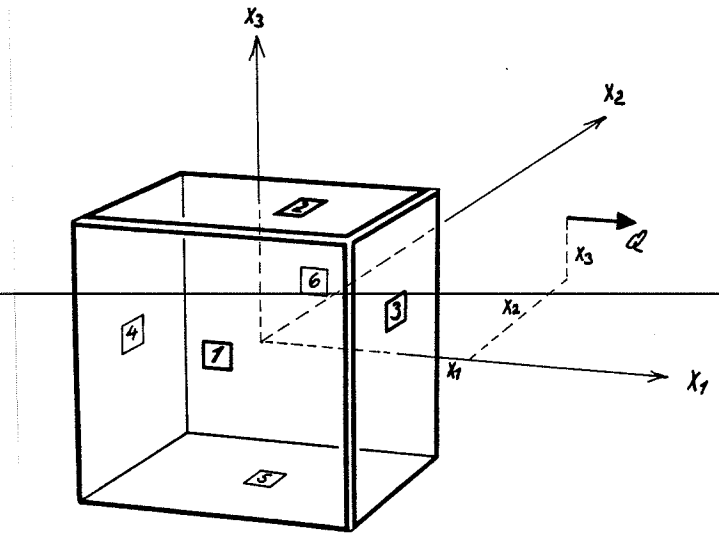
Figur 117. Transformation af skivepåvirkning til gitterpåvirkning.

Det ses,,at kraften Q langs samlingen 14, virkende på skive 1 i den positive omløbsretning, transformeres til kraften P, virkende i stangretningen 14, og at $|Q| = |P|$, idet disse to kræfter vil opfylde samtlige ligninger

$$M_Q^{KJ} = M_P^{KJ}$$

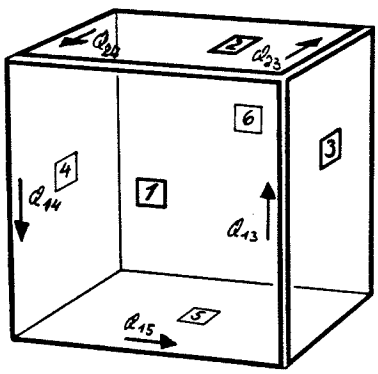
4.2.2. En kraft parallel med en terningkant.

Den simpleste måde at anvende ligningerne (27) på, er at opløse kraften Q efter terningens kanter.



Figur 118. Kraft parallel med samlingerne 12, 15, 62 og 65.

Q opløses efter kanterne, hørende til skiverne 1 og 2, som vist på figur 118.



Figur 119. Kraften Q opløst efter kanterne 14, 15, 13, 24 og 23.

Moment om samling 45 giver

$$Q_{13} = -Q\ (x_3 + \frac{1}{2})$$

idet der er indlagt et koordinatsystem midt i terningen, og terningen forudsættes at have sidelængden C = 1.

Moment om samling 14 giver

$$Q_{23} = -Q\ (x_2 + \tfrac{1}{2})$$

Projektion på 15 giver

$$Q_{15} = Q$$

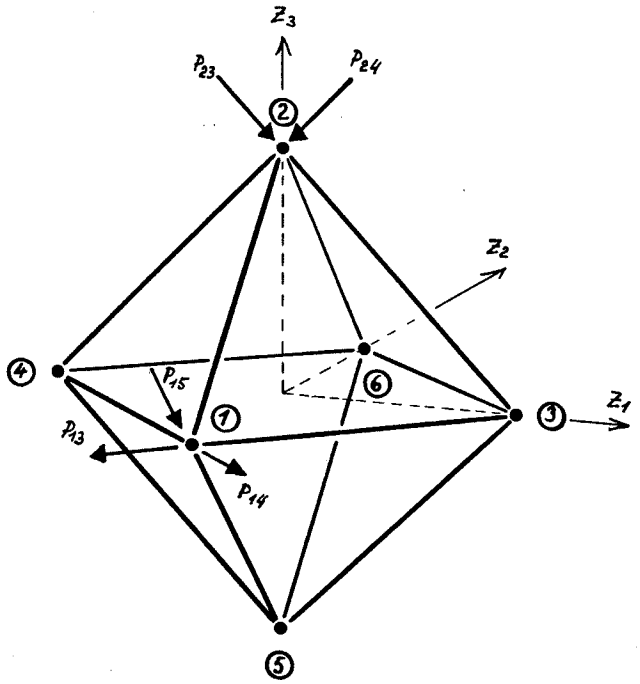
Projektion på 24 giver

$$Q_{24} = Q_{23} = -Q\ (x_2 + \tfrac{1}{2})$$

Projektion på 14 giver

$$Q_{14} = Q_{13} = -Q\ (x_3 + \tfrac{1}{2})$$

Kræfterne Q_{14}, Q_{15}, Q_{13}, Q_{24} og Q_{23} kan nu direkte transformeres til oktaederet, som vist på figur 120.



Figur 120. Kræfterne overført til oktaederet.

Resultanten af disse 5 kræfter kan herefter findes, og komposanterne efter de tre akser bliver

$$P_{z_1} = (x_3 + \tfrac{1}{2})\ Q\ \sqrt{2}/2 - (x_3 + \tfrac{1}{2})\ Q\ \sqrt{2}/2 = 0$$

$$P_{z_2} = -(x_3 + \tfrac{1}{2})\ Q\ \sqrt{2}/2 + Q\ \sqrt{2}/2 = -x_3\ \sqrt{2}\ Q$$

$$P_{z_3} = (x_2 + \tfrac{1}{2})\ Q\ \sqrt{2} - Q\ \sqrt{2}/2 = x_2\ \sqrt{2}\ Q$$

Resultantens størrelse bliver

$$|\bar{P}| = Q\ \sqrt{2}\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

Resultantens skæring med z_3-aksen fås ved at tage moment om linien 34

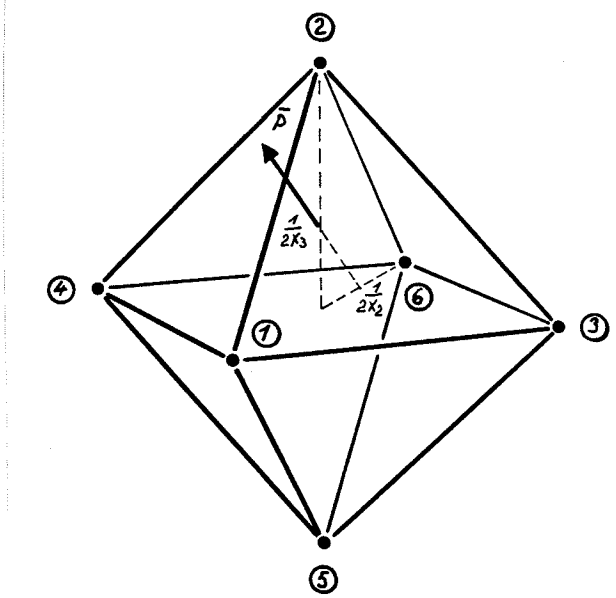
$$P_{z_2}\ z_3 = -Q\ \sqrt{2}/2 \Rightarrow -x_3\ \sqrt{2}\ Q\ z_3 = -Q\ \sqrt{2}/2$$

$$z_3 = \frac{1}{2\ x_3}$$

Resultantens skæring med z_2-aksen fås analogt ved at tage moment om linien 34

$$z_2 = \frac{1}{2\ x_2}$$

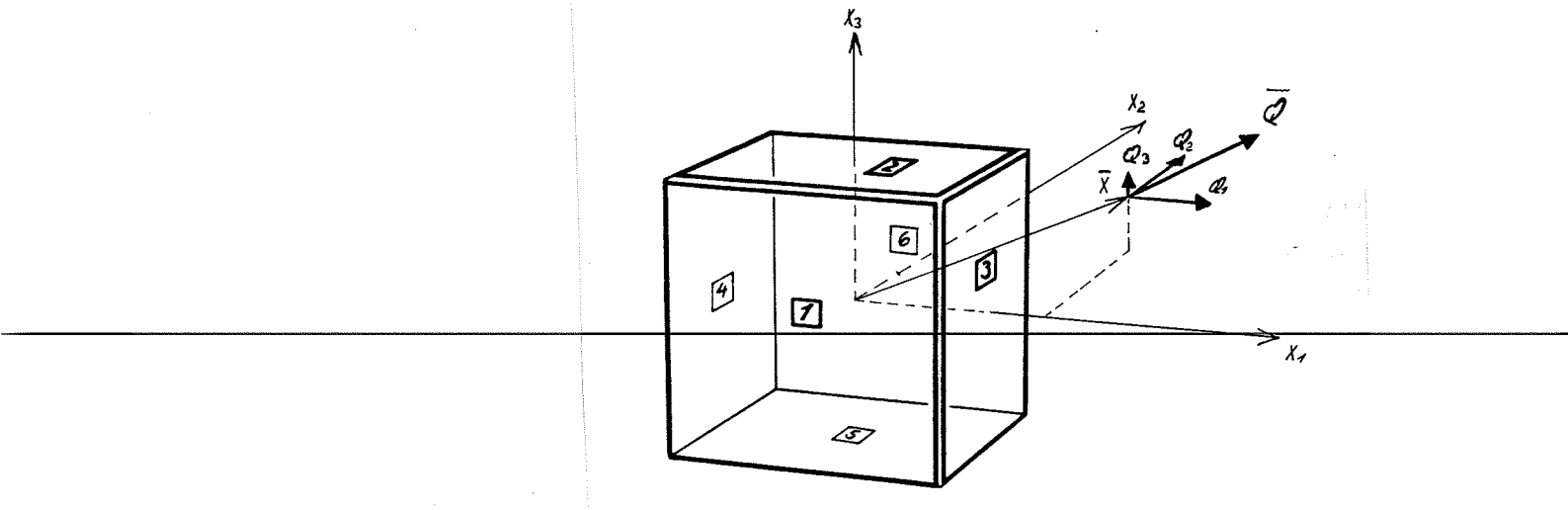
På figur 121 er resultantens retning vist.



Figur 121. Resultantens retning.

4.2.3 En vilkårlig kraft.

I figur 122 er kraftens placering vist.

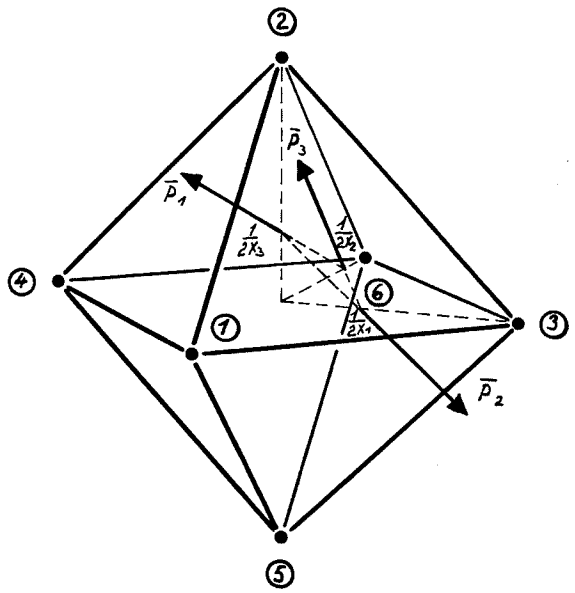


Figur 122. En vilkårlig kraft.

$\bar{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$

$\bar{X} = (x_1, x_2, x_3)$

Opløses $\bar{Q}$ efter akseretningerne, kan kraften umiddelbart overføres, som vist på figur 123.



Figur 123. En vilkårlig kraft overført til oktaederet.

$$|P_1| = Q_1 \sqrt{2} \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

$$|P_2| = Q_2 \sqrt{2} \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$$

$$|P_3| = Q_3 \sqrt{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Resultanten af $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ og $\bar{P}_3$ findes ved projektering af akseretningerne.

Projektionen giver

$$P_{z_1} = \sqrt{2} \, (x_3 \, Q_2 - x_2 \, Q_3)$$

$$P_{z_2} = \sqrt{2} \, (x_1 \, Q_3 - x_3 \, Q_1)$$

$$P_{z_3} = \sqrt{2} \, (_2 \, Q_1 - x_1 \, Q_2)$$

kaldes resultanten $\bar{P}$, kan disse ligninger udtrykkes på vektorform

$$\bar{P} = \sqrt{2} \, (\bar{Q} \times \bar{X}) \qquad (28)$$

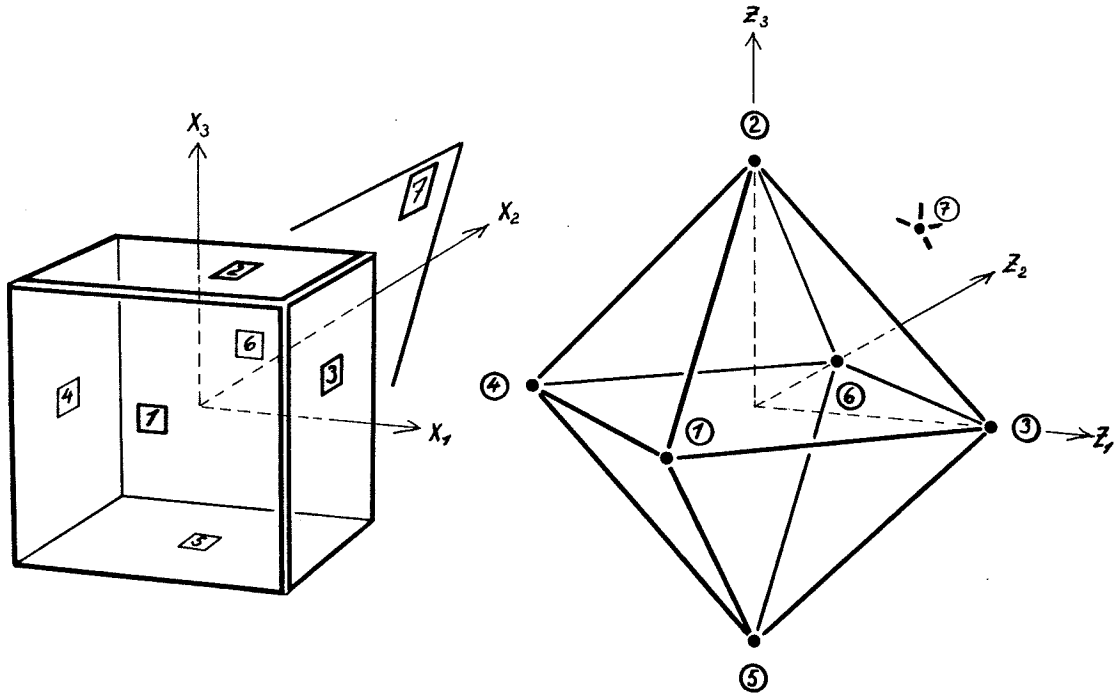
Formel (28) er udledt under forudsætning af, at kubens sidelængde C = 1. Hvis der var valgt andre værdier for C, ville konstanten foran vektorproduktet være blevet en anden.

4.2.4 En vilkårlig plan.

Det skal herefter vises, hvorledes en vilkårlig plan med relation til terningen overføres til et punkt med relation til oktaederet.

Der betragtes en enhedsterning og en vilkårlig plan. som ikke går gennem (0,0,0), givet ved en ligning af formen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 1$$



Figur 124. En enhedskube og en vilkårlig plan 7.

Spørgsmålet er, hvilket punkt plan 7 transformeres til.

For at kunne besvare dette spørgsmål, betragtes kræfter (vektorer) i skæringslinierne mellem plan 7 og terningens flader, f.eks. fladerne 2 og 5.

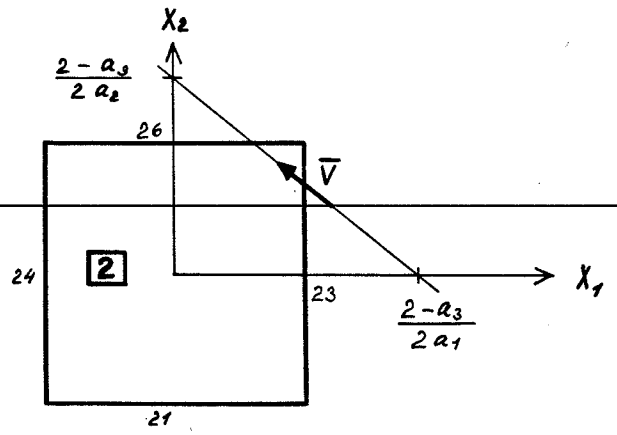
Flade 2's ligning er

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

og indsættes den i plan 7 fås

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + 3_3 \frac{1}{2} = 1$$

som er skæringslinien mellem plan 7 og 2. Se figur 125.



Figur 125. Skæringslinien mellem plan 7 og 2.

Der vælges nu en vilkårlig vektor (kraft) på denne linie, og denne vektor opløses efter terningkanterne f.eks. 24, 21 og 23. Disse kan nu overføres til oktaederet, og resultantens retning kan findes.

Tilsvarende vælges en vektor på skæringslinien mellem plan 7 og 3, og den til denne vektor svarende resultant i oktaederet findes. Beregnes koordinaterne til skæringspunktet for disse resultanter fås

$$z_1 = a_1/2$$

$$z_2 = a_2/2$$

$$z_3 = a_3/2$$

Planen givet ved ligningen

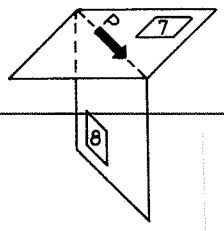
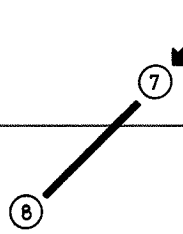
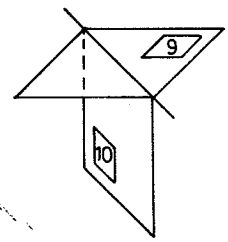
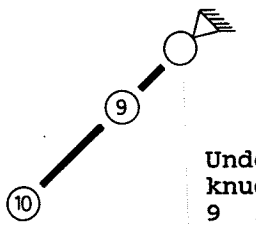
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 1$$

overføres derfor i punktet

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} (a_1, a_2, a_3) \qquad (29)$$

(29) angiver, hvorledes en vilkårlig plan overføres til et punkt, og man kan derfor benytte (29) til at finde den duale gitterkonstruktion til en vilkårlig skivekonstruktion.

Ved at betragte forskydninger af terningens flader og undersøge de kræfter, sådanne forskydninger giver anledning til, kan man, som vist i [2], også bestemme, hvorledes deformationer og stivheder transformeres, og ud fra dette kan der opstilles et komplet sæt af transformationsformler, som angivet i figur 126. Ved hjælp af disse formler, kan man beregne en vilkårlig skivekonstruktion med et generelt gitterberegningsprogram.

SKIVE		GITTER
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 1$	→	$\bar{Z} = \frac{1}{2} (a_1, a_2, a_3)$
Samling mellem skive n_1 og n_2	→	Stang mellem knude n_1 og n_2
Stivhed af samling n_1, n_2 $N_{n_1 n_2}$	→	Stivhed af stang mellem n_1, n_2 $(E F)_{n_1 n_2} = N_{n_1 n_2}$ *) $F^2_{n_1 n_2}$ **) $l_{n_1 n_2}$
 Ydre kraft virkende i skive 7 i linien 78	→	 $P_{Gitter} = P_{Skive} F_{76}$ Ydre kraft på knude 7 med retning mod knude 8.
 Understøtning af skive 9 i retningen 9 10	→	 Understøtning af knude 9 i retningen 9 10
Forskydningskraft i samling 11 12 $t_{11,12} = s_{11,12} / F_{11,12}$	←	Stangkraft i stang 11 12 $s_{11,12}$
Rotationsvektor gennem (0,0,0) på: $-\sqrt{2} \frac{\bar{T} \cdot \bar{Z}}{Z^2} \bar{Z}$ og translationsvektor på: $\frac{-\sqrt{2}}{2 Z^2} (\bar{T} \times \bar{Z})$	←	Flytning af knude med stedvektor $\bar{Z}$: $\bar{T}$

*) $F_{n_1 n_2} = \sqrt{2} \left| \frac{\bar{A}_{n_2} - \bar{A}_{n_1}}{\bar{A}_{n_1} \times \bar{A}_{n_2}} \right|$

**) $l_{n_1 n_2} = \frac{1}{2} \left| \bar{A}_{n_1} - A_{n_2} \right|$

Figur 126. Transformationsformler, som skal anvendes til beregning af en skivekonstruktion v.h.a. et generelt gitterberegningsprogram.

SUMMARY in English

This thesis describes methods for generating a number of different spatial plate structures, composed of identical plate elements or few different types of plate elements.

Through the methods given, a wide spectrum of different plate structures, is obtained with respect to their statical properties (from statically determinant structures to structures of a high degree of statical indeterminant) as well as to the shape of the individual elements (from quite simple ones to very complicated ones).

In this thesis the practical applications of these structures are not directly pointed out, but most of the examples given are chosen with a view to possible practical applications.

Some of these structures thus form continuous planes with both bending and torsional stiffness and could be used as an alternative to a space truss.

The first section of the thesis deals with the general geometrical representation of a plate structure.

It is shown, that in case the geometry of the individual plate element is defined by its lines of intersection with those of the adjoining elements, a very suitable representation is obtained with respect to a mathematical manipulation of the geometry and with respect to a statical calculation. This suitability is partly due to the fact, that it is possible by this representing to set up the equations of equilibrium for each individual plate and partly, that alterations and corrections of the geometry can be made in a simple and clear manner.

This way of representing the geometry of a plate structure is dual to the way, the geometry of lattice structures is normally represented. The dualism consist of the transformation of plate elements, and joints in the plate structure into nodes and rods in the lattice structures. The dualism between plate structures and lattice structures is utillized in the last section of the thesis.

The second section of the thesis describes methods for generating spatial plate structures, consisting of identical plate elements or few different types of plate elements.

It is demonstrated, how these structures can be classified according to their topological properties, and how their over-all statical behaviour can be predicted. Further, a method is given for bevelling an arbitrary surface, so that the statical properties of this bevelling are optimal.

In the last section, methods are given for determining the over-all stability of latice and plate structures as well as a description of the connection between the statics of plate structures, and those of lattice structures leading to a set of transformation formulas to be used in the calculation of an arbitrary plate structure be means of a general computer program for lattice structures.

APPENDIX

Eksempler på navngivne periodiske kvadratnet.

Ved hjælp af den metode, der er angivet i afhandlingens afsnit 3.2.1 Bestemmelse af navngivne kvadratnet, kan man finde mange forskellige navngivne kvadratnet. De, der er angivet i dette appendix, har perioder fra 2 - 8. I hvert net er medtaget èn række og èn søjle kvadrater mere end svarende til perioden.

Kvadratnet med perioden 2.

a_1	a_2	a_1	
$a^1_{b_1}$	$b^2_{b_2}$	$a^1_{b_1}$	b^2
$a^2_{a_1}$	$b^1_{a_2}$	$a^2_{a_1}$	b^1
$a^1_{b_1}$	$b^2_{b_2}$	$a^1_{b_1}$	b^2

Kvadratnet med perioden 3.

a_1	a_2	a_3	a_1	
$a^3_{b_1}$	$b^2_{b_2}$	$c^1_{b_3}$	$a^3_{b_1}$	b^2
$a^2_{c_1}$	$b^1_{c_2}$	$c^3_{c_3}$	$a^2_{c_1}$	b^1
$a^1_{a_1}$	$b^3_{a_2}$	$c^2_{a_3}$	$a^1_{a_1}$	b^3
$a^3_{b_1}$	$b^2_{b_2}$	$c^1_{b_3}$	$a^3_{b_1}$	b^2

a_1	a_2	a_3	a_1	
$a^1_{b_1}$	$b^3_{b_2}$	$c^2_{b_3}$	$a^1_{b_1}$	b^3
$a^3_{c_1}$	$b^2_{c_2}$	$c^1_{c_3}$	$a^3_{c_1}$	b^2
$a^2_{a_1}$	$b^1_{a_2}$	$c^3_{a_3}$	$a^2_{a_1}$	b^1
$a^1_{b_1}$	$b^3_{b_2}$	$c^2_{b_3}$	$a^1_{b_1}$	b^3

a_1	a_2	a_3	a_1	
$a^2_{b_1}$	$b^1_{b_2}$	$c^3_{b_3}$	$a^2_{b_1}$	b^1
$a^1_{c_1}$	$b^3_{c_2}$	$c^2_{c_3}$	$a^1_{c_1}$	b^3
$a^3_{a_1}$	$b^2_{a_2}$	$c^1_{a_3}$	$a^3_{a_1}$	b^2
$a^2_{b_1}$	$b^1_{b_2}$	$c^3_{b_3}$	$a^2_{b_1}$	b^1

Kvadratnet med perioden 4.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	
$a^1_{b_1}$	$b^4_{b_2}$	$c^3_{b_3}$	$d^2_{b_4}$	$a^1_{b_1}$	b^4
$a^4_{c_1}$	$b^3_{c_2}$	$c^2_{c_3}$	$d^1_{c_4}$	$a^4_{c_1}$	b^3
$a^3_{d_1}$	$b^2_{d_2}$	$c^1_{d_3}$	$d^4_{d_4}$	$a^3_{d_1}$	b^2
$a^2_{a_1}$	$b^1_{a_2}$	$c^4_{a_3}$	$d^3_{a_4}$	$a^2_{a_1}$	b^1
$a^1_{b_1}$	$b^4_{b_2}$	$c^3_{b_3}$	$d^2_{b_4}$	$a^1_{b_1}$	b^4

a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	
$a^4_{b_1}$	$b^2_{b_2}$	$d^4_{b_3}$	$c^2_{b_4}$	$a^4_{b_1}$	b^2
$a^3_{c_1}$	$b^1_{c_2}$	$d^1_{c_3}$	$c^3_{c_4}$	$a^3_{c_1}$	b^1
$a^2_{d_1}$	$b^4_{d_2}$	$d^2_{d_3}$	$c^4_{d_4}$	$a^2_{d_1}$	b^4
$a^1_{a_1}$	$b^3_{a_2}$	$d^3_{a_3}$	$c^1_{a_4}$	$a^1_{a_1}$	b^3
$a^4_{b_1}$	$b^2_{b_2}$	$d^4_{b_3}$	$c^2_{b_4}$	$a^4_{b_1}$	b^2

a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	
$a^2_{b_1}$	$d^4_{b_2}$	$c^4_{b_3}$	$b^2_{b_4}$	$a^2_{b_1}$	d^4
$a^3_{c_1}$	$d^3_{c_2}$	$c^1_{c_3}$	$b^1_{c_4}$	$a^3_{c_1}$	d^3
$a^4_{d_1}$	$d^2_{d_2}$	$c^2_{d_3}$	$b^4_{d_4}$	$a^4_{d_1}$	d^2
$a^1_{a_1}$	$d^1_{a_2}$	$c^3_{a_3}$	$b^3_{a_4}$	$a^1_{a_1}$	d^1
$a^2_{b_1}$	$d^4_{b_2}$	$c^4_{b_3}$	$b^2_{b_4}$	$a^2_{b_1}$	d^4

Kvadratnet med perioden 5.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_1	
$a^4_{b_1}$	$b^3_{b_2}$	$c^2_{b_3}$	$d^1_{b_4}$	$e^5_{b_5}$	$a^4_{b_1}$	b^3
$a^3_{c_1}$	$b^2_{c_2}$	$c^1_{c_3}$	$d^5_{c_4}$	$e^4_{c_5}$	$a^3_{c_1}$	b^2
$a^2_{d_1}$	$b^1_{d_2}$	$c^5_{d_3}$	$d^4_{d_4}$	$e^3_{d_5}$	$a^2_{d_1}$	b^1
$a^1_{e_1}$	$b^5_{e_2}$	$c^4_{e_3}$	$d^3_{e_4}$	$e^2_{e_5}$	$a^1_{e_1}$	b^5
$a^5_{a_1}$	$b^4_{a_2}$	$c^3_{a_3}$	$d^2_{a_4}$	$e^1_{a_5}$	$a^5_{a_1}$	b^4
$a^4_{b_1}$	$b^3_{b_2}$	$c^2_{b_3}$	$d^1_{b_4}$	$e^5_{b_5}$	$a^4_{b_1}$	b^3

Kvadratnet med perioden 6.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	
$a^3 b_1$	$b^2 b_2$	$c^1 b_3$	$d^6 b_4$	$e^5 b_5$	$f^4 b_6$	$a^3 b_1$	b^2
$a^2 c_1$	$b^1 c_2$	$c^6 c_3$	$d^5 c_4$	$e^4 c_5$	$f^3 c_6$	$a^2 c_1$	b^1
$a^1 d_1$	$b^6 d_2$	$c^5 d_3$	$d^4 d_4$	$e^3 d_5$	$f^2 d_6$	$a^1 d_1$	b^6
$a^6 e_1$	$b^5 e_2$	$c^4 e_3$	$d^3 e_4$	$e^2 e_5$	$f^1 e_6$	$a^6 e_1$	b^5
$a^5 f_1$	$b^4 f_2$	$c^3 f_3$	$d^2 f_4$	$e^1 f_5$	$f^6 f_6$	$a^5 f_1$	b^4
$a^4 a_1$	$b^3 a_2$	$c^2 a_3$	$d^1 a_4$	$e^6 a_5$	$f^5 a_6$	$a^4 a_1$	b^3
$a^3 b_1$	$b^2 b_2$	$c^1 b_3$	$d^6 b_4$	$e^5 b_5$	$f^4 b_6$	$a^3 b_1$	b^2

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	
$a^5 b_1$	$b^4 b_2$	$c^3 b_3$	$d^2 b_4$	$e^1 b_5$	$f^6 b_6$	$a^5 b_1$	b^4
$a^4 c_1$	$b^3 c_2$	$c^2 c_3$	$d^1 c_4$	$e^6 c_5$	$f^5 c_6$	$a^4 c_1$	b^3
$a^3 d_1$	$b^2 d_2$	$c^1 d_3$	$d^6 d_4$	$e^5 d_5$	$f^4 d_6$	$a^3 d_1$	b^2
$a^2 e_1$	$b^1 e_2$	$c^6 e_3$	$d^5 e_4$	$e^4 e_5$	$f^3 e_6$	$a^2 e_1$	b^1
$a^1 f_1$	$b^6 f_2$	$c^5 f_3$	$d^4 f_4$	$e^3 f_5$	$f^2 f_6$	$a^1 f_1$	b^6
$a^6 a_1$	$b^5 a_2$	$c^4 a_3$	$d^3 a_4$	$e^2 a_5$	$f^1 a_6$	$a^6 a_1$	b^5
$a^5 b_1$	$b^4 b_2$	$c^3 b_3$	$d^2 b_4$	$e^1 b_5$	$f^6 b_6$	$a^5 b_1$	b^4

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	
$a^1 b_1$	$b^6 b_2$	$c^5 b_3$	$d^4 b_4$	$e^3 b_5$	$f^2 b_6$	$a^1 b_1$	b^6
$a^6 c_1$	$b^5 c_2$	$c^4 c_3$	$d^3 c_4$	$e^2 c_5$	$f^1 c_6$	$a^6 c_1$	b^5
$a^5 d_1$	$b^4 d_2$	$c^3 d_3$	$d^2 d_4$	$e^1 d_5$	$f^6 d_6$	$a^5 d_1$	b^4
$a^4 e_1$	$b^3 e_2$	$c^2 e_3$	$d^1 e_4$	$e^6 e_5$	$f^5 e_6$	$a^4 e_1$	b^3
$a^3 f_1$	$b^2 f_2$	$c^1 f_3$	$d^6 f_4$	$e^5 f_5$	$f^4 f_6$	$a^3 f_1$	b^2
$a^2 a_1$	$b^1 a_2$	$c^6 a_3$	$d^5 a_4$	$e^4 a_5$	$f^3 a_6$	$a^2 a_1$	b^1
$a^1 b_1$	$b^6 b_2$	$c^5 b_3$	$d^4 b_4$	$e^3 b_5$	$f^2 b_6$	$a^1 b_1$	b^6

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	
$a^1 b_1$	$b^1 b_2$	$e^5 b_3$	$d^3 b_4$	$c^3 b_5$	$f^5 b_6$	$a^1 b_1$	b^1
$a^2 c_1$	$b^6 c_2$	$e^6 c_3$	$d^2 c_4$	$c^4 c_5$	$f^4 c_6$	$a^2 c_1$	b^6
$a^3 d_1$	$b^5 d_2$	$e^1 d_3$	$d^1 d_4$	$c^5 d_5$	$f^3 d_6$	$a^3 d_1$	b^5
$a^4 e_1$	$b^4 e_2$	$e^2 e_3$	$d^6 e_4$	$c^6 e_5$	$f^2 e_6$	$a^4 e_1$	b^4
$a^5 f_1$	$b^3 f_2$	$e^3 f_3$	$d^5 f_4$	$c^1 f_5$	$f^1 f_6$	$a^5 f_1$	b^3
$a^6 a_1$	$b^2 a_2$	$e^4 a_3$	$d^4 a_4$	$c^2 a_5$	$f^6 a_6$	$a^6 a_1$	b^2
$a^1 b_1$	$b^1 b_2$	$e^5 b_3$	$d^3 b_4$	$c^3 b_5$	$f^5 b_6$	$a^1 b_1$	b^1

Kvadratnet med perioden 7.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_1	
$a^7 b_1$	$b^6 b_2$	$c^5 b_3$	$d^4 b_4$	$e^3 b_5$	$f^2 b_6$	$g^1 b_7$	$a^7 b_1$	b^6
$a^6 c_1$	$b^5 c_2$	$c^4 c_3$	$d^3 c_4$	$e^2 c_5$	$f^1 c_6$	$g^7 c_7$	$a^6 c_1$	b^5
$a^5 d_1$	$b^4 d_2$	$c^3 d_3$	$d^2 d_4$	$e^1 d_5$	$f^7 d_6$	$g^6 d_7$	$a^5 d_1$	b^4
$a^4 e_1$	$b^3 e_2$	$c^2 e_3$	$d^1 e_4$	$e^7 e_5$	$f^6 e_6$	$g^5 e_7$	$a^4 e_1$	b^3
$a^3 f_1$	$b^2 f_2$	$c^1 f_3$	$d^7 f_4$	$e^6 f_5$	$f^5 f_6$	$g^4 f_7$	$a^3 f_1$	b^2
$a^2 g_1$	$b^1 g_2$	$c^7 g_3$	$d^6 g_4$	$e^5 g_5$	$f^4 g_6$	$g^3 g_7$	$a^2 g_1$	b^1
$a^1 a_1$	$b^7 a_2$	$c^6 a_3$	$d^5 a_4$	$e^4 a_5$	$f^3 a_6$	$g^2 a_7$	$a^1 a_1$	b^7
$a^7 b_1$	$b^6 b_2$	$c^5 b_3$	$d^4 b_4$	$e^3 b_5$	$f^2 b_6$	$g^1 b_7$	$a^7 b_1$	b^6

Kvadratnet med perioden 8.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_1	
$a^1 b_1$	$b^8 b_2$	$c^7 b_3$	$d^6 b_4$	$e^5 b_5$	$f^4 b_6$	$g^3 b_7$	$h^2 b_8$	$a^1 b_1$	b^8
$a^8 c_1$	$b^7 c_2$	$c^6 c_3$	$d^5 c_4$	$e^4 c_5$	$f^3 c_6$	$g^2 c_7$	$h^1 c_8$	$a^8 c_1$	b^7
$a^7 d_1$	$b^6 d_2$	$c^5 d_3$	$d^4 d_4$	$e^3 d_5$	$f^2 d_6$	$g^1 d_7$	$h^8 d_8$	$a^7 d_1$	b^6
$a^6 e_1$	$b^5 e_2$	$c^4 e_3$	$d^3 e_4$	$e^2 e_5$	$f^1 e_6$	$g^8 e_7$	$h^7 e_8$	$a^6 e_1$	b^5
$a^5 f_1$	$b^4 f_2$	$c^3 f_3$	$d^2 f_4$	$e^1 f_5$	$f^8 f_6$	$g^7 f_7$	$h^6 f_8$	$a^5 f_1$	b^4
$a^4 g_1$	$b^3 g_2$	$c^2 g_3$	$d^1 g_4$	$e^8 g_5$	$f^7 g_6$	$g^6 g_7$	$h^5 g_8$	$a^4 g_1$	b^3
$a^3 h_1$	$b^2 h_2$	$c^1 h_3$	$d^8 h_4$	$e^7 h_5$	$f^6 h_6$	$g^5 h_7$	$h^4 h_8$	$a^3 h_1$	b^2
$a^2 a_1$	$b^1 a_2$	$c^8 a_3$	$d^7 a_4$	$e^6 a_5$	$f^5 a_6$	$g^4 a_7$	$h^3 a_8$	$a^2 a_1$	b^1
$a^1 b_1$	$b^8 b_2$	$c^7 b_3$	$d^6 b_4$	$e^5 b_5$	$f^4 b_6$	$g^3 b_7$	$h^2 b_8$	$a^1 b_1$	b^8

5. Litteraturliste.

1. Ture Wester og Klaus Feilberg Hansen:
Skive- og gittervirkning i rumlige netværk. (Rapport).
Skivelaboratoriet, Kunstakademiets Arkitektskole, København. 1985.

2. Klaus Feilberg Hansen:
Rumlige periodiske strukturer opbygget af plane elementer. (Rapport).
Skivelaboratoriet, Kunstakademiets Arkitektskole, København 1985.

3. Ture Wester:
Structural order in space.
København 1984. Eget forlag.

4. Fabricius-Bjerre:
Geometri I og II.
Jul. Gjellerups Forlag. København 1960.

5. E.A. Lord and C.B. Wilsom:
The mathematical description of shape and form.
Ellis Horwood Limited. 1984.

6. P.A. Firby and C.F. Gardiner:
Surface Topology.
Ellis Horwood Limited. 1982.

7. Frank Nielsen:
Grafer og netværk.
Matematisk Institut. Danmarks Tekniske Højskole 1981.

8. Flemming Damhus Pedersen:
Grupper.
Matematisk Institut. Danmarks Tekniske Højskole 1985.

9. Mogens Buhelt, Jørgen Nielsen, Jens E. Staalby:
Skivebygningers stabilitet 1 - Konstruktionsprincipper.
SBI-Anvisning 82. 1976.

10. M.J. Buerger:
Elementary Crystallography.
Wiley. New York. 1956.

11. K. Critchlow:
Order in space.
Thames and Hudson. 1969.

12. L. Fejes Tóth:
Regular figures.
Pergamon. 1964.

13. P.S. Stevens:
Patterns in nature.
Penguin. 1976.

14. M. Wenninger:
Polyhedron models.
Cambridge University Press. 1971.

15. M.C. Escher:
The graphic work of M.C. Escher.
4'printing Pan/Ballantine. 1973.

16. M.A. Jaswon and M.A. Rose:
Crystal Symmetri. Theory of colour crystallography