

**INSTITUTTET FOR HUSBYGNING**

**Rapport nr. 172**

**APPENDIX**

**NIELS-JØRGEN AAGAARD JENSEN**

**TRÆKONSTRUKTIONER OG MATERIALEØKONOMI  
I HUSBYGNING**

---

**Den polytekniske Lærestalt, Danmarks tekniske Højskole**

**Lyngby 1988**



## INDHOLD

## APPENDICES

|   |                                                                                     |             |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| A | LEVETID OG ELEMENTANTAL                                                             | A-01 - A-04 |
| B | DEN BÆREEVNEMÆSSIGE BETYDNING AF SNITKRAFT-FORTEGNET I ELASTOPLASTISKE TRÆBJÆLKER   | B-01 - B-06 |
| C | OPTIMAL BJÆLKESLANKHED                                                              | C-01 - C-04 |
| D | PLANE ENKELTSPÆNDTE TRÆDEKKONSTRUKTIONERS MATERIALEØKONOMI                          | D-01 - D-08 |
| E | PLANE DOBBELTSPÆNDTE TRÆBJÆLKEKONSTRUKTIONERS MATERIALEØKONOMI                      | E-01 - E-04 |
| F | <del>PLANE KVADRATISKE DOBBELTSPÆNDTE TRÆBJÆLKE-KONSTRUKTIONERS HOVEDGEOMETRI</del> | F-01 - F-06 |
| G | REAKTIONSFORDELING FOR SIMPELT KANTUNDERSTØTTEDE KVADRATISKE ORTOTROPE PLADER       | G-01 - G-04 |
| H | FORSØG MED STRESSED-SKIN-ELEMENTER AF TRÆ                                           | H-01 - H-30 |
| J | GEOMETRISKE FORHOLD I TRÆSØJLEKONSTRUKTIONER                                        | J-01 - J-06 |
| K | FORHOLD I GRENEDE TRÆSØJLE-KONSTRUKTIONER UNDERSTØTTENDE KONTINUERT BJÆLKE          | K-01 - K-06 |
| L | HOVEDMOMENTFORLØB I ORTOTROPE TRÆBASEREDE PLADER                                    | 1 - 56*     |

\* Sidetal refererer til Aagaard, N.J.: "Hovedmomentforløb i ortotrope træbaserede plader.", Rapport nr. 173, Instituttet for Husbygning, DTH, Lyngby, 1988.



APPENDIX ALEVETID OG ELEMENTANTAL

Lad  $k$  geometrisk ligedannede tværsnit have det samlede tværsnitsareal  $A = 1[\text{m}]$ . I følgende eksempel antages tværsnittene cirkulære med radius  $r_k[\text{m}]$  og omkreds  $S_k[\text{m}]$ :

$$\left. \begin{aligned} r_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \\ S_k &= 2\sqrt{\frac{\pi}{k}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.01.a-b})$$

Elementernes levetid  $T[\text{år}]$  betragtes i forhold til en nedbrydningsmekanisme med en konstant nedbrydningshastighed  $K_i [\text{m/år}]$  (virkende fra et elements hele overflade) og med en angrebssandsynlighed på  $p[/math> /år·m<sup>2</sup>].  $p$  antages rektangulært fordelt og er således konstant i tiden. Af forenklingmæssige grunde betragtes alene momentane nedbrydningsmekanismer - det vil sige hvor destruktionsperioden er kort set i forhold til elementets levetid. ( $r_k/K_i$ ) sættes derfor til 0.$

En sådan model svarer til en Poisson-fordelt stokastisk proces, hvor  $p(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  (eller kort:  $p = 1 - e^{-\lambda}$ ). Poisson-procesen er beskrevet ved tæthedsfunktion  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = P\{T \geq t\}$ . Antages intensiteten  $\lambda$  på 1 element proportional med overfladearealet  $S_k$  - som vist i afsnit 1.3 i forbindelse med lign. (1.04) - og proportional med tiden  $T_o$ , hvori elementet angrebseksponeres, fås for  $\lambda$ :

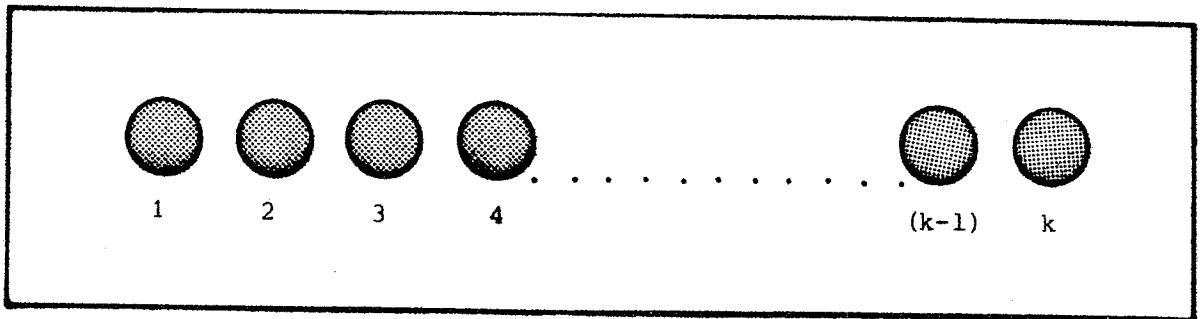
$$\lambda = -S_k T_o \ln(1-p) \quad (\text{A.02})$$

Udtrykt ved  $p$  fås således til bestemmelse af sandsynligheden for at eet element har en levetid på mindst  $T_o$ :

$$P\{T \geq T_o\} = (1-p)^{S_k T_o} \quad (\text{A.03})$$

Sandsynligheden for, at levetiden af 1 element er mindre end  $T_o$  er

$$P\{T < T_o\} = 1 - P\{T \geq T_o\} \quad (\text{A.04})$$



A.01

$$r_i = r_{i+1}; \quad r_i = (1/\sqrt{\pi k}); \quad \sum_{i=1}^k A_i = 1$$

Sandsynligheden for, at netop  $n$  af  $k$  elementer er destrueret til tiden  $T_0$ , fås da til:

$$P\{\text{arealandelen } (\frac{n}{k}) \text{ destrueret til tiden } T_0\} =$$

$$P\{T \geq T_0\}^{k-n} \cdot P\{T < T_0\}^n \left( \frac{k!}{n!(k-n)!} \right) \quad (A.05)$$

Det er en forudsætning for udtrykket i lign. (A.05), at destruktionsangrebene og -processerne for de forskellige elementer er uafhængige hændelser. I lign. (A.05) er sandsynligheden for, at  $n$  elementer er bortdestrueret til tiden  $T_0$  lig  $P\{T < T_0\}^n$ , medens sandsynligheden for at netop  $(k-n)$  elementer ikke er bortdestrueret til tiden  $T_0$  lig  $P\{T \geq T_0\}^{(k-n)}$ . Kombinatorisk kan dette udfald hænde på  $\binom{n}{k}$  antal måder ( $\binom{n}{k} = k!/n!(k-n)!$ ).

Middelværdien af denne diskrete sandsynlighedsfordeling fås af:

$$E(\text{antal elementer destrueret til tiden } T_0) =$$

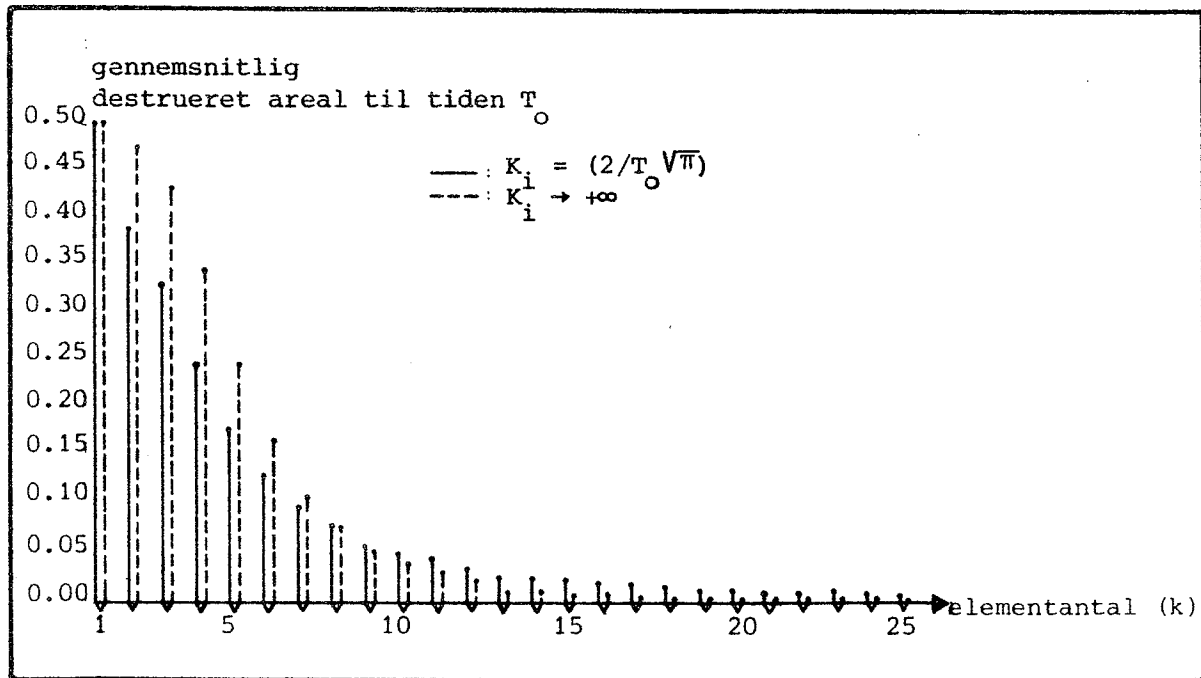
$$\sum_{n=0}^k P\{T \geq T_1\}^{k-n} \cdot P\{T < T_1\}^n \left( \frac{k!}{n!(k-n)!} \right) n \quad (A.06)$$

For den gennemsnitlig destruerede arealandel til tiden  $T_0$  fås ved division med  $k$ , eftersom der netop er ialt  $k$  elementer, således for en samling cirkulære tværsnit:

$$E(\text{arealandel, destrueret til tiden } T_0) = \sum_{n=0}^k \binom{n}{k} [(1-p)^{2T_0(k-n)} \sqrt{\frac{\pi}{k}} (1-(1-p)^{2T_0 \sqrt{\frac{\pi}{k}}})^n] \left( \frac{k!}{n! (k-n)!} \right) \quad (A.07)$$

hvor lign. (A.01.b), lign. (A.03) og lign. (A.04) er indsat i lign. (A.06).

Idet grænseværdien for E, herefter kaldet  $E(\frac{n}{k})$ , arealandel, destrueret til tiden  $T_0$  for  $k \rightarrow \infty (k \in \mathbb{N}_+)$  er endog overordentlig svær at bestemme på eksakt form, er der udviklet et mindre EDB-program til bestemmelse af  $E(\frac{n}{k})$  for varierende kombinationer af p,  $T_1$ ,  $K_i$  og k. På grundlag heraf er det ad numerisk vej påvist, at  $E(\frac{n}{k}) \rightarrow 0$  for  $k \rightarrow \infty$  og for en sædvanlig husbygningsmæssig levetid på  $T=50$  år og  $p=3.9 \cdot 10^{-3}/m^2\text{år}$  - se figur A.02.



## A.02

Variationen af det gennemsnitligt destruerede arealandel til tiden  $T_0 - E(\frac{n}{k})$  - som funktion af antal elementer (k).  $K_i = (2/T_0 \sqrt{\pi})$  svarer til en destruktionsperiode på  $\frac{1}{2}T_0$  for  $k = 1$ . Elementstørrelsen varierer med elementantallet, således at det samlede areal er konstant = 1. Forudsætning i øvrigt:  $(1-p)^0 = 2^{-2\sqrt{\pi}}$  svarende til  $p = 3.9 \cdot 10^{-3} (/m^2\text{år})$  og  $T_0 = 50$  år. Som det fremgår er  $\text{Lim}(E(\frac{n}{k})) = 0$  for  $k \rightarrow \infty$ .

A-04

1000

## APPENDIX B

## DEN BÆREEVNEMÆSSIGE BETYDNING AF SNITKRAFTFORTEGNET I ELASTO-PLASTISKE TRÆBJÆLKER.

Den betragtede brudtilstand og tværsnitsform er angivet i figur 2.22. Indeks  $_1$  på de for tværsnittet variable geometriske og statiske størrelser vedrører bøjning om y-aksen orienteret i dennes positive retning - og omvendt ved størrelser indekseret med  $_2$ .

Snitmomentet  $M_{y1}$  ækvivaleres med et kraftpar  $N_{c1}$  og  $N_{t1}$  parallelle med den lokale x-akse. Ligevægt kræver

$$N_{c1} + N_{t1} = 0 \quad (B.01)$$

hvor

$$N_{c1} = \int_0^{h_1 - e_1} [b(z) \left( \frac{f_c}{h_1 - e_1} \right) z] dz + \int_{h_1 - e_1}^{h - e_1} [b(z) f_c] dz, \quad (B.02)$$

$$N_{t1} = \int_{-e_1}^0 [b(z) \frac{f_t}{e_1} z] dz \quad (B.03)$$

Der er anvendt følgende benævnelse:

- $h_1$  : højden af den lineært elastiske tværsnitsdel.
- $e_1$  : afstand fra nullinie til yderste trækpåvirkede tværsnitskant.
- $b(z)$  : tværsnitsbredden som funktion af  $z$ .
- $f_t$  : konstruktionsmaterialets trækbrudstyrke.
- $f_c$  : konstruktionsmaterialets idealiserede tryk-flydespænding.

Idet der på grund af den lineære spændingsvariation i det elastiske tværsnitsområde må kræves

$$\frac{f_t}{e_1} = \frac{f_c}{h_1 - e_1} \Leftrightarrow$$

$$h_1 = e_1 \left(1 + \frac{f_c}{f_t}\right) \quad (B.04)$$

fås ved indsættelse af lign. (B.02-04) i lign. (B.01) betingelsen

$$e_1 \left(\frac{f_c}{f_t}\right) \int_{-e_1}^{h-e_1} b(z) z dz + e_1 \left(\frac{f_c}{f_t}\right) \int_{e_1(f_c/f_t)}^{h-e_1} b(z) dz = 0 \quad (B.05)$$

til bestemmelse af nulliniens beliggenhed ved  $e_1$ , såfremt styrkeforholdet  $(f_c/f_t)$  og tværsnitsformen - bestemt ved  $h$  og  $b(z)$  - er kendt.

Det til kraftparret  $N_{c1}-N_{t1}$  svarende snitmoment  $M_{y1}$  findes som

$$(|M_{y1}|/f_t) = (1/e_1) \int_{-e_1}^{e_1(f_c/f_t)} b(z) z^2 dz + (f_c/f_t) \int_{e_1(f_c/f_t)}^{h-e_1} b(z) z dz \quad (B.06)$$

Orienteres det bøjende moment den anden vej  $-|M_{y2}|$  - kan nulliniens beliggenhed bestemmes ved  $e_2$  af:

$$\begin{aligned} e_2 \left(\frac{f_c}{f_t}\right) \int_0^{h-e_2} [b(h-z) z] dz + e_2 \left(\frac{f_c}{f_t}\right) \int_{e_2(f_c/f_t)}^{h-e_2} [b(h-z)] dz \\ \div \int_{-e_2}^0 [b(h-z) z] dz = 0 \end{aligned} \quad (B.07)$$

Det til kraftparret  $N_{c2}-N_{t2}$  svarende snitmoment  $M_{y2}$  findes tilsvarende som

$$\begin{aligned}
 (M_{y2}/f_t) &= (1/e_2) \int_{-e_2}^0 [b(h-z)z^2] dz \div (1/e_2) \int_0^{e_2(f_c/f_t)} [b(h-z)z^2] dz \\
 &\div (f_c/f_t) \int_{e_2(f_c/f_t)}^{h-e_2} [b(h-z)z] dz
 \end{aligned}
 \tag{B.08}$$

EKSEMPEL 1: Lineær breddevariation.

$$b(z) = az + c$$

Bestemmelse af  $|M_{y1}|$ :

$$\begin{aligned}
 b(z = -e_1) &= b_1 \quad ; \quad b(z = h-e_1) = b_2 \\
 \Rightarrow b(z) &= \left( \frac{b_2 - b_1}{h} \right) (z + e_1) + b_1
 \end{aligned}$$

Ligning (B.05) giver  $Ae_1^2 + Be_1 + C = 0$ , til bestemmelse af  $e_1$ , hvor

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(b_2 - b_1)}{6h} \left[ \left( \frac{f_c}{f_t} \right)^3 \div 3 \left( \frac{f_c}{f_t} \right)^2 \div 3 \left( \frac{f_c}{f_t} \right) \div 1 \right] \\
 B &= - \frac{b_1}{2} \left[ \left( \frac{f_c}{f_t} \right)^2 + 2 \left( \frac{f_c}{f_t} \right) + 1 \right] \\
 C &= \frac{h}{2} \left( \frac{f_c}{f_t} \right) (b_2 + b_1)
 \end{aligned}$$

Bæreevnen ( $|M_{y1}|/f_t$ ) findes af ligning (B.06):

$$\begin{aligned}
 (|M_{y1}|/f_t) &= \left[ \frac{(b_2 - b_1)}{4h} e_1^3 \left( \left( \frac{f_c}{f_t} \right)^4 \div 1 \right) + \frac{e_1^2}{3} \left( b_1 + \frac{e_1}{h} (b_2 - b_1) \right) \left( \left( \frac{f_c}{f_t} \right)^3 + 1 \right) \right] \\
 &\quad + \left( \frac{f_c}{f_t} \right) \left[ \frac{(b_2 - b_1)}{3h} \left( (h - e_1)^3 - e_1^3 \left( \frac{f_c}{f_t} \right)^3 \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{f_c}{f_t} \right) \left[ \left( b_1 + \frac{e_1}{h} (b_2 - b_1) \right) \left( (h - e_1)^2 - e_1^2 \left( \frac{f_c}{f_t} \right)^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

Ved bestemmelse af  $(|M_{y2}|/f_t)$  ombyttes  $b_1$  og  $b_2$ , og  $e_2$  findes af ligning (B.05)

For et tværsnit med kontinuert og lineær breddevariation fås en variation af forholdet mellem bæreevnerne som fkt. af tværsnitsformen som vist i figur 2.25 - kurve A.

EKSEMPEL 2: Lineær diskontinuert breddevariation.

Som et specialtilfælde betragtes et T-tværsnit sammensat af 2 ens rektangulære fuldt samvirkende rektangulære tværsnitsdele.

Rektanglerne har et kantlængdeforhold på  $k$ . Det vil sige:

$$b(z < e - \left(\frac{k}{1+k}\right)h) = \left(\frac{k}{1+k}\right)h \quad \text{og}$$

$$b(z \geq e - \left(\frac{1}{1+k}\right)h) = \left(\frac{1}{1+k}\right)h$$

For  $(f_c/f_t) \geq \frac{1}{3}$  (hvilket er tilfældet for næsten alle opnåelige trækvaliteter):

$e_1$  bestemmes af  $Ae_1^2 + Be_1 + C = 0$ , hvor

$$A = \left(\frac{1}{1+k}\right) \left[1 + (f_c/f_t)\right]^2$$

$$B = \left(\frac{2h}{1+k}\right) \left[\left(\frac{k-1}{k+1}\right) - (f_c/f_t)\right]$$

$$C = \div h^2 \left[\frac{(k-1)}{(k+1)^3}\right]$$

Bæreevnen  $(|M_{y1}|/f_t)$  findes af ligning (B.06):

$$\begin{aligned} (|M_{y1}|/f_t) = & \frac{h}{3e_1} \left[ \left(\frac{k}{1+k}\right) \left[ \left(\left(\frac{1}{1+k}\right)h - e_1\right)^3 + e_1^3 \right] \right. \\ & + \left(\frac{1}{1+k}\right) \left[ e_1^3 \left(\frac{f_c}{f_t}\right)^3 - \left(\left(\frac{1}{1+k}\right)h - e_1\right)^3 \right] \\ & \left. + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{1+k}\right) \left(\frac{f_c}{f_t}\right) \left[ (h - e_1)^2 - e_1^2 \left(\frac{f_c}{f_t}\right)^2 \right] \right] \end{aligned}$$

Ved bestemmelse af  $(|M_{y2}|/f_t)$  benyttes på tilsvarende måde ligningerne (B.07) og (B.08).

Forholdet  $(|M_{y1}|/|M_{y2}|)$  er vist for  $k = 2, 3$  og  $4$  som kurverne B, C og D i figur 2.25.



## APPENDIX C

## OPTIMAL BJÆLKESLANKHED

Der betragtes en bjælke, i hvilken det bøjende moment  $M$  optræder. Bjælkens understøtnings- og belastningsforhold har i første omgang kun interesse ved fastlæggelse af bjælkens effektive længde i instabilitetsmæssig henseende.

For at kunne vurdere det nødvendige bjælkevolumens afhængighed af tværsnitsformen under hensyntagen til i dette tilfælde kipningsmæssig instabilitet, indføres et slankhedstal  $\lambda_m$  ved bøjningen. Der kunne være fokuseret på andre instabilitetsfænomener end kipning; for eksempel foldning af krop eller eventuelle flanger.

Slankhedstallet  $\lambda_m$  defineres ved

$$\lambda_m^2 = \frac{f_m W}{M} \quad (C.01)$$

hvor  $W$  er tværsnittets modstandsmoment, medens  $f_m$  betegner bjælke-materialets formelle bøjningsstyrke. Idet undersøgelsen afgrænses til at omhandle dobbelt spejlsymmetriske, punktsymmetriske eller enkeltsymmetriske tværsnit belastet på en sådan måde, at momentvektoren til beskrivelse af  $M$  er parallel med spejlsymmetrilinien, kan den kritiske værdi af  $M$ ,  $M_{cr}$ , ifølge [Timoschenko, S.P. et al. (1963)] pp. 250 - 255 udtrykkes som en funktion af elasticiteten  $E$ , forskydningselasticiteten  $G$ , vridningsinertimomentet  $I_v$  samt sektorinertimomentet  $I_s$ :

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell_e} \sqrt{EI_z GI_v (1 + (\pi/\ell_e)^2 (EI_s/GI_v))} \quad (C.02)$$

Vedrørende de anførte symmetrikrav: se [Aagaard, N.J. (1988a)] app. A. For hvælvingssstive tværsnitsformer bortfalder det led i ligning (C.02), der indeholder  $I_s$ , hvorefter man for  $\lambda_m$  får:

$$\lambda_m^2 = \frac{\ell_e W}{\pi \sqrt{I_z I_v}} \cdot \frac{f_m}{E} \sqrt{\frac{E}{G}} \quad (C.03)$$

For massive rektangulære tværsnit kan ligning (C.03) ifølge [Larsen, H.J. et al. (1983)] pp. 121-122 kan ligning (C.03) for trækonstruktioner tilnærmes ved:

$$\lambda_m \approx 0.065 \frac{\sqrt{\ell_e h}}{b} = 0.065 \left(\frac{h}{b}\right) \sqrt{\frac{\ell_e}{h}} \quad (C.04)$$

Idet  $W = bh^2/6$ , og man antager, at  $M = W f_m k_{inst}$ , hvor man for styrkereduktionsfaktoren  $k_{inst}$  antager, at denne - for  $\lambda_m \in [0.75, 1.4]$  - er lig  $(1.56 - 3\lambda_m/4)$ , fås:

$$\frac{6M}{h^3} \left(\frac{h}{b}\right) = \left(1.56 - \frac{3}{4} 0.065 \left(\frac{h}{b}\right) \sqrt{\frac{\ell_e}{h}}\right) f_m \quad (C.05)$$

Heraf fås for forholdet  $(h/b)$ :

$$\left(\frac{h}{b}\right) = 1.56 \left( \frac{6M}{f_m h^3} + \frac{3}{4} 0.065 \sqrt{\frac{\ell_e}{h}} \right)^{-1} \quad (C.06)$$

Bjælketværsnittets areal  $A$  er lig  $h^2(b/h)$ . D.v.s.:

$$A = \frac{1}{1.56} \left( \frac{6M}{f_m h^3} + \frac{3}{4} 0.065 \sqrt{\ell_e h^3} \right) \quad (C.07)$$

Af ligning (C.06) ses det bekræftet, at forholdet  $(h/b)$  er voksende med voksende værdi af  $h$  - i det relevante interval af  $h$ :  $h > 0$ . Hvis der for materialeforbruget - udtrykt ved tværsnitsarealet  $A$  - findes et minimum for en optimal værdi af  $h$  og faste størrelser  $M$ ,  $f_m$  og  $\ell_e$ , vil dette derfor repræsentere et eventuelt optimalt forhold  $(h/b)_{OPT}$ .

Ligning (C.07) differentieres med hensyn til  $h$ :

$$\frac{dA}{dh} = \frac{1}{1.56} \left( \frac{9}{8} 0.065 \sqrt{\ell_e h} - \frac{6M}{f_m h^2} \right) \quad (C.08)$$

For  $dA/dh = 0$  fås for  $h_{OPT}$ :

$$h_{OPT} \approx 5.83 \sqrt[5]{\frac{M^2}{f_m^2 \ell_e}} \quad (C.09)$$

som indsat i ligning (C.06) giver

$$\left(\frac{h}{b}\right)_{\text{OPT}} \approx 30.905 \sqrt[5]{\frac{M}{f_m \ell^3 e}} \quad (\text{C.10})$$

som altså er gældende med god tilnærmelse for massive træbjælker. Indsættes ligning (C.09) og ligning (C.10) i ligning (C.04) fås  $\lambda_m = 0.832$ , hvilket er i overensstemmelse med forudsætningerne om intervallet for  $\lambda_m$ .

Af ovenstående gennemgang er det følgelig muligt for ethvert materiale og enhver tværsnitstype at bestemme en optimal tværsnitsform. I de tilfælde, hvor tværsnitstypen - for eksempel et I-formet tværsnit - ikke giver mulighed for at anvende en relativt simpel og tilstrækkelig god tilnærmelse for  $M_{cr}$  (ligning (C.02)), er man henvist til ved numeriske metoder at bestemme den optimale slankhed af tværsnittet.

Det bør endvidere pointeres, at forudsætningerne om styrkereduktionsfaktoren  $k_{inst}$ 's afhængighed af  $\lambda_m$  er baseret på et kendskab til træs arbejdskurve og prøvningsmetoderne ved fastlæggelse af den formelle bøjningsstyrke. For bjælker af andre konstruktionsmaterialer må disse erstattes af andre forudsætninger for  $k_{inst}\{\lambda_m\}$  afhængig af materialets lineære eller ulineære elasticitetsforhold.



## APPENDIX D

## PLANE ENKELTSPENDTE TRÆDÆKKONSTRUKTIONERS MATERIALEØKONOMI.

Under de følgende afsnit - "Geometri", "Anvendelse og udførelse", "Last", "Virkemåde", "Materialer" og "Materialeforbrug" - er anført forudsætninger for de i afsnit 3.4 og afsnit 3.5 gennemførte materialeøkonomiske analyser af:

- a) - det "STATISK-TEORETISKE" nødvendige materialeforbrug (figur 3.19) og
- b) - det "HUSBYGNINGSMÆSSIGT" nødvendige materialeforbrug (figur 3.26 og 3.27),

for konstruktionstyperne 1-6, som disse er defineret i forbindelse med figur 3.18.

Ved materialeforbrug knyttet til ovenstående pkt. a henholdsvis b er anvendt lastkombinationer, laste og materialeparametre, som disse i det følgende er anført og benævnt "teoretiske" henholdsvis "husbygningsmæssige". Til det teoretiske tilfælde er knyttet karakteristiske langtidsegenskaber af materialer, medens der til det husbygningsmæssige tilfælde er knyttet sædvanlige kombinationer af lastkombinationer og materialeegenskaber i henhold til [DIF, Sikkerhed.(1982)], [DIF, LAST(1982)] og [DIF, Trækonstr.(1982)]. Der henvises i øvrigt til tekster til figurerne 3.18, 3.19, 3.26 og 3.27.

Geometri

Udover at tværsnittene i konstruktionstype 2 og 3 er forudsat enkeltsymmetriske og øvrige konstruktionstyper dobbeltsymmetriske i alle beregningssituationer, er der for det husbygningsmæssige tilfælde gjort følgende geometriske forudsætninger:

- Vedrørende konstruktionstype 2 og 3 (træbjælkelag):
    - Den frie bjælkeafstand = 600 mm
    - type 2:  $(h/b) = 1.0$
    - type 3:  $(h/b) = 6.0$
  - Vedrørende konstruktionstype 4 (stressed-skin):
    - Kroppladetykkelse  $\geq 6.5$  mm
    - Lister for samling af kroppe til flanger:
      - kvadratiske
      - kantlængde  $\geq 22$  mm
    - Kropsafstande; tagkonstr.: 300 mm
    - etagedækk.: 600 mm
- 
- Vedrørende konstruktionstype 4,5 og 6 (stressed-skin og sandwich):
    - Alle plader er af konstruktionskrydsfinér med yderfibre parallelle med hovedbæreretninger.

#### Anvendelse og udførelse

Alle konstruktioner og anvendelser henføres til

- Fugtklasse I
- Normal sikkerhedsklasse

I husbygningsmæssig henseende forudsættes konstruktionstype 4, 5 og 6 udført under uvildig kontrol, medens konstruktionstype 1, 2 og 3 henføres til "øvrige konstruktioner" - [DIF, Trækonstr. (1982)] p. 18.

I det statisk-teoretiske tilfælde er der ikke forudsat andre funktioner af konstruktionerne, end de der er formuleret i form af karakteristiske belastninger (brudgrænsetilstand).

I det husbygningsmæssige tilfælde er ikke-statiske funktioner, og betydninger af sådanne for de statiske funktioner, anført i forbindelse med figur 3.26 og 3.27.

---

Last

| Lastkombination*                        |                        | 1.1            |                | 2.1  |      |
|-----------------------------------------|------------------------|----------------|----------------|------|------|
| Svigtgrænsetilstand*                    |                        | Anv.           |                | Brud |      |
| Lasttilfælde                            |                        | 1 <sup>Δ</sup> | 2 <sup>†</sup> | 3    | 4    |
| Teoretisk tilfælde                      | $q/[N/m^2]$            | -              | -              | 1500 | 0    |
|                                         | $Q/[N]$                | -              | -              | 0    | 1500 |
| Husbyg-<br>ningsmæs-<br>sig<br>tilfælde | Tagkonstr. $s/[N/m^2]$ | 375            | 750            | 490  | 975  |
|                                         | $Q/[N]$                | 1000           | 0              | 1300 | 0    |
|                                         | Etagedæk. $q/[N/m^2]$  | 0              | 1500           | 0    | 1950 |
|                                         | $Q/[N]$                | 1500           | 0              | 1950 | 0    |

\* i h.t. [DIF, Sikkerhed.(1982)].

<sup>Δ</sup> Der tillades nedbøjninger m.h.t. hovedbæringen på max. 1/400 af spændvidden.

<sup>†</sup> Der tillades nedbøjninger m.h.t. hovedbæringen på max. 1/500 af spændvidden.

Alle egenlaste er permanente. Alle ydre laste - natur- og nytte-  
laste - er langtidsvirkende og fremgår af foregående skema ved  
de værdier, hvormed de direkte indgår i beregningerne. Der ind-  
går således ingen korttidsvirkende belastninger i de aktuelle  
lastkombinationer.

I skemaet er snelast angivet ved  $s$  og nyttelast ved  $q$  eller  $Q$ .  
Alle laste er nedadrettede.

Virkemåde

Alle ydre laste - nyttelaste og naturlaste - angriber konstrukti-  
onernes øvre flade. Enkeltkræfter er fordelt over et areal på  
0.1 m x 0.1 m. For disses fordeling i konstruktionerne er yderli-  
gere gjort følgende forudsætninger:

- Vedrørende konstruktionstype 1, 2 og 3 (massiv plade og træbjælkelag):  
En enkeltkraft fordeles forskydningsmæssigt over et tværsnitareal gennem plade eller bræddelag på  $200 \text{ t mm}^2$ .
- Vedrørende konstruktionstype 2 og 3 (træbjælkelag):  
En enkeltkraft  $Q$  giver anledning til et bøjende moment i bræddelaget på  $\frac{1}{10} Qb_k$  fordelt over 100 mm i bredden.  $b_k$  betegner den frie afstand mellem bjælkerne.
- Vedrørende konstruktionstype 4 (stressed-skin):  
Som for type 2 og 3, blot fordeles enkeltkraften på grund af flangepladens fiberorientering over en bredde af 300 mm.
- Vedrørende konstruktionstype 4, 5 og 6:  
En enkeltkraft fordeles i hovedbæringen over en bredde  $\ell/20$  på tværs af bæreretningen; dog min. 200 mm.

Alle konstruktionstyper er antaget simpelt understøttede for hovedbæringen over spændvidden  $\ell$ .

Konstruktionstype 1, 2, 3 og 4 er dimensioneret i henhold til svigtkriterier og teori for bærende trækonstruktioner, som denne er repræsenteret ved [Larsen, H.J. et al. (1983)]. For konstruktionstype 1, 2 og 3 er teorien for bjælker af massive tværsnit gældende medens der for konstruktionstype 4 er anvendt teori for bjælker med tynde kroppe og tynde flanger.

Konstruktionstype 5 og 6 er dimensioneret i henhold til svigtkriterier og teori for bærende sandwichkonstruktioner, som denne er repræsenteret ved [Rasmussen, L. (1980)].

Ved bestemmelse af nedbøjninger i det husbygningsmæssige tilfælde er der for konstruktionstype 4, 5 og 6 medtaget såvel forskydnings- som bøjningsmæssige bidrag. For konstruktionstype 1, 2 og 3 er alene medtaget de bøjningsmæssige bidrag til nedbøjningerne.

Alle samlinger mellem tværsnitselementer er forudsat lige så stærke som eller stærkere end alle øvrige tværsnitsområder. Sam-

linger kan være etableret ved sømlimning, men det er i øvrigt ikke godtgjort, hvilket bidrag disse måtte have på materiale- eller energiforbrug.

Kernematerialerne i konstruktionstype 5 og 6 antages ikke ud over ved deres forskydningsegenskaber at medvirke ved bøjningsoptagelsen. Der er hverken for konstruktionstype 4, 5 eller 6 taget hensyn til flangernes egenbøjningsstivhed ved hovedbæringen. De samlede fejl introduceret af disse tilnærmelser udgør mindre end 1% på bøjningsstyrken og -stivheden.

### Materialer

For konstruktionstræ - K24 (med rumvægt  $510 \text{ kg/m}^3$ ) er anvendt følgende formelle materialeparametre:

| Formel parameter |          | Laste <sup>*</sup> | værdi i MPa    |                   |
|------------------|----------|--------------------|----------------|-------------------|
|                  |          |                    | husbygningssm. | statisk-teoretisk |
| Bøjning $\neq$   | $f_m$    | P + L              | 11.2           | 16.8              |
| Forskydning      | $f_v$    | P + L              | 1.2            | 1.8               |
|                  | $E_{qo}$ | P + L              | 0              | 0                 |
| Elasticitet      | $E_o$    | P                  | 6300           | $_{-\Delta}$      |
|                  |          | L                  | 8400           | $_{-\Delta}$      |

Fugtklasse I; Normal sikkerhedsklasse

\* P: Permanente laste  
L: Langtidslaste

$\Delta$  Karakteristiske værdier af stivhedsparametrene indgår ikke i beregningerne for det statisk-teoretiske tilfælde, idet tværsnitsparametre for sammensatte tværsnit antages at være homogene i elasticitetsmæssig henseende.

For krydsfinér (med rumvægt  $650 \text{ kg/m}^3$ ) er bestemt formelle materialeparametre som geometriske middelværdier af regningsmæssige materialeparametre i henhold til [Larsen, H.J. et al. (1983)] p. 79 for canadisk Douglas Fir Plywood - DFP, upudset, svensk gran - P30 og

upudset USA C-D ext. glued finér:

$$\langle m_{90} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (6m_{90}/t_i^2) \text{ og}$$

$$\langle \gamma_o \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\gamma_{oi}/t_i),$$

hvor  $\gamma$  betegner træk-tryk-stivheden i skiveplanen ( $E_{\text{norm}}$ ), trækstyrken ( $n_t$ ) eller trykstyrken ( $n_e$ ) i skiveplanen. De således bestemte karakteristiske styrkeparametre ganges med partialkoefficienter  $\gamma_m = 1.35$ . Tilsvarende ganges stivhedstal med 1.25 for langtidslaste og 5/3 for permanente laste. Resultaterne er resumeret i følgende tabel.

| Formel parameter                                         | Laste * | værdi i MPa   |                   |
|----------------------------------------------------------|---------|---------------|-------------------|
|                                                          |         | Husbygningsm. | Statisk-teoretisk |
| Bøjningsstyrke<br>$\langle m_{90} \rangle$               | P + L   | 3.7           | 5.0               |
| Trækstyrke<br>$\langle n_{t,o} \rangle$                  | P + L   | 5.7           | 7.7               |
| Træk-/trykstivhed<br>$\langle E_{\text{norm},o} \rangle$ | P       | 4200          | — $\Delta$        |
|                                                          | L       | 5600          | — $\Delta$        |
| Skiveforskydning<br>$\langle G \rangle$                  | P + L   | 580           | — $\Delta$        |
| Skiveforskydning<br>$\langle f_v \rangle$                | P + L   | 1.7           | 2.3               |
| Pladeforskydning<br>$\langle f_{v,rul} \rangle$          | P + L   | 0.35          | 0.47              |

FUGTKLASSE I; NORMAL SIKKERHEDSKLASSE

\* } se note til foregående skema.  
 $\Delta$

Med udgangspunkt i principper beskrevet i [Borchersen, E. (1979)] p. 84 ff. er der bestemt regningsmæssige og karakteristiske forskydningsegenskaber for konstruktionsmineraluld med rumvægt 80 kg/m<sup>3</sup>):

| Formel parameter               | Værdi* i MPa·10 <sup>-3</sup> |                   |
|--------------------------------|-------------------------------|-------------------|
|                                | Husbygningsm.                 | Statisk-teoretisk |
| Forskydningsstyrke $f_v$       | 15                            | 21                |
| Forskydningsstivhed $G^\Delta$ | 3700                          | - †               |

Fugtklasse I; Normal sikkerhedsklasse, langtids- og permanente laste

\* Værdierne er baseret på en mineraluld med karakteristisk trækstyrke på 130 MPa. Alle værdier er ganget med en korrektionsfaktor på 0.75 for at tage hensyn til de mekaniske egenskabers stærkere fugtafhængighed for mineraluld end for træbaserede materialer.

$\Delta$  Forskydningsstivheden er ganget med en korrektionsfaktor på 0.8 for at tage hensyn til, at væsentlige dele af lasten er permanent.

† Karakteristiske værdier af stivhedsparametre indgår ikke i beregningerne.

På baggrund af oplysninger i [Franken, H.W. (1977)], [Gad, W. (1977)] og diverse brochuremateriale skønnes den karakteristiske korttidsforskydningsstyrke for polystyrenskum (med rumvægt 30 kg/m<sup>3</sup>) til 0.140 MPa. På grundlag heraf omsættes den regningsmæssige og karakteristiske forskydningsstyrke for polystyrenskum skønsmæssigt til 0.07 MPa henholdsvis 0,095 MPa. Den regningsmæssig forskydningsstivhed anslåes til 5.0 MPa.

### Materialeforbrug

De opgjorte materialeforbrug repræsenterer massen af den minimale nødvendige mængde under forudsætning af de trufne valg med hensyn til geometri, materialer og belastninger samt disse faktorerers statiske sammenhænge.

For konstruktionstype 4, 5 og 6 er der i det husbygningsmæssige tilfælde forudsat endeskot af 12.5 mm's tykkelse hver monteret

med 2 stk. 37.5 x 50.0 mm nåletræslistes. Disse bidrag til de nødvendige materialeforbrug er fordelt over spændvidden.

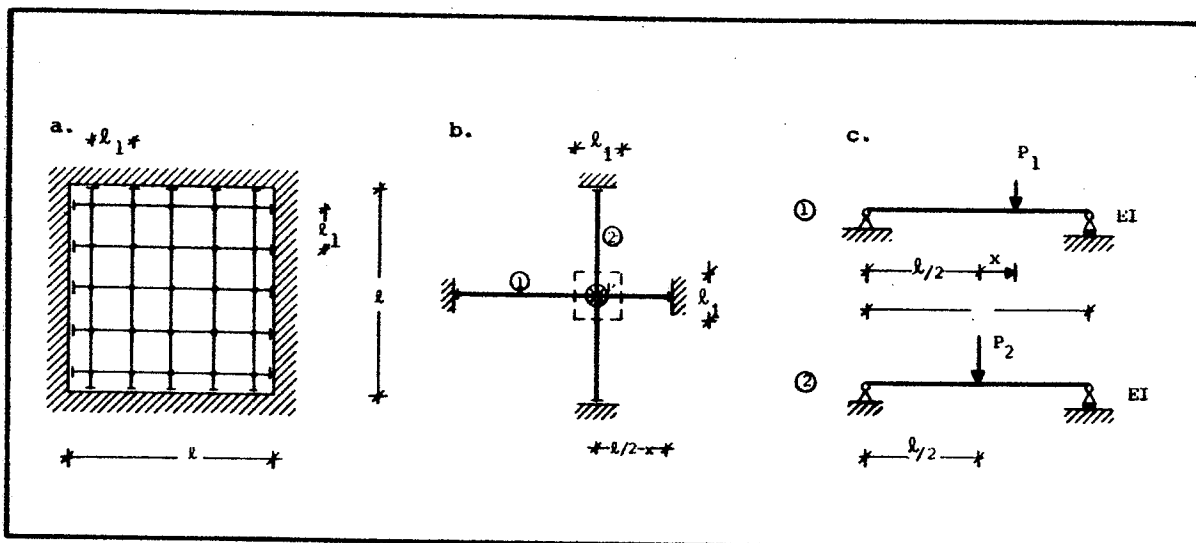
Nødvendigt forbrug af forbindelsesmidler så som søm og/eller lim er ikke medtaget i de opgjorte materialeforbrug.

---

## APPENDIX E

## PLANE DOBBELTSPÆNDTE TRÆBJÆLKEKONSTRUKTIONERS MATERIALEØKONOMI

Der betrages den i figur E.01 skitserede dobbeltspændte bjælkelagskonstruktion, hvor alle indgående bjælker er kongruente, såvel hvad angår de mekaniske egenskaber som for alle geometriske parametre. Konstruktionens materialeforbrug analyseres ved hjælp af en "strimmelmetode" - beskrevet i [Salvadori, M. (1967)] pp. 222-235 -, idet strukturen kan ses som bestående af 2 sæt af indbyrdes parallelle og indbyrdes ortogonale, kongruente strimler, hver indeholdende en centralt placeret bjælke.



Det ydre lastbidrag  $P$  fordeles mellem 2 krydsende "bjælkestrimler" - med indeks  $_1$  og  $_2$  - (hvoraf "1" er centralt placeret i konstruktionen) således at:

$$P = P_1 + P_2 \quad (E.01)$$

Krav om kompatibilitet i bjælkelagskonstruktionen fordrer samme udbøjning i krydsningspunktet. D.v.s.

$$\frac{P_1}{3EI} \left( \frac{(l/2-x)^2 (l/2+x)^2}{l} \right) \geq \frac{P_2 l^3}{48EI} \quad (E.02)$$

Ulighedstegnet skyldes, at bjælke 2 får udbøjning fra andele af andre lastbidrag langs dennes akse, hvorfor den til  $P_2$  hørende udbøjning må være mindre end den til  $P_1$  hørende udbøjning.

Indsættes ligning (E.01) og  $P = pl_1^2$  i ligning (E.02) fås

$$P_1 \geq \frac{pl_1^2}{\left[ \left( 1 - \left( \frac{2x}{l} \right)^2 \right)^2 + 1 \right]} \quad (E.03)$$

$P_1(x)$  giver et bidrag til bjælke 1's maksimalmoment - i midten af bjælken ( $x = 0$ ) - af størrelsen:

$$\Delta M_{x,1} = \left( \frac{l}{2} - x \right) \frac{P_1}{2} \quad (E.04)$$

hvorfor bøjningsmomentet i midten af bjælke 1 hidrørende fra alle lastbidrag langs dennes akse af symmetrigrunde fås til

$$M_{midt,1} = \int_0^{l/2} \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \frac{P_1}{4} dx \quad (E.05)$$

Det vil sige, at

$$M_{\max} \geq \frac{pl_1^2}{2} \int_0^{l/2} \left[ \frac{(1 - (2x/l))}{((1 - (2x/l))^2 + 1)} \right] dx \quad (E.06)$$

som løst numerisk giver

$$M_{\max} \geq 0.0741 pl_1 l^2 \approx 0.60 \cdot \frac{1}{8} pl_1 l^2 \quad (E.07)$$

Et lag af parallelle bjælker, med indbyrdes afstand  $l_0$ , kan udgøre et referencesystem, idet det maksimale bøjningsmoment  $M_A$  her er bestemt ved

$$M_A = \frac{1}{8} pl_0 l^2 \quad (E.08)$$

Maksimalmomentet i den dobbeltspændte bjælkelagskonstruktion udgør således mindst 60% af maksimalmomentet i den enkeltspændte

bjælkelagskonstruktion.

Idet volumenet af 1 bjælke er proportionalt med bjælkelængden gange  $M_{\max}^{2/3}$ , og der, såfremt  $l_1 = l_0$ , er dobbelt så mange bjælker i den dobbeltspændte som i den enkeltspændte bjælkelagskonstruktion, fås:

$$\frac{\Sigma V_{\text{DOBBELTSPÆND}}}{\Sigma V_{\text{ENKELTSPÆND}}} \geq 1.42 \sqrt[3]{\frac{l_0}{l_1}} \quad (E.09)$$

som udtryk for forholdet mellem materialeforbrugene pr. overdækket arealenhed.



10-11-11



## APPENDIX F

## PLANE KVADRATISKE DOBBELTSPÆNDTE TRÆBJÆLKEKONSTRUKTIONERS HOVED-GEOMETRI.

I det følgende er der inden for et afgrænsende rektangel - her med kvadratisk tilsnit - skitseret mulige bjælkekonfigurationer, idet der er anvendt 2 typer af sekundærplader:

- 1) En rektangulær enkeltspændt plade med spændvidden  $\ell_0$ .
- 2) En kvadratisk dobbeltspændt plade med spændvidden  $\ell_1$  ( $>\ell_0$ )

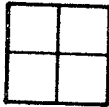
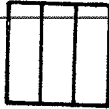
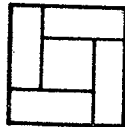
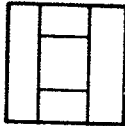
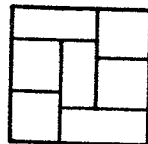
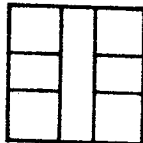
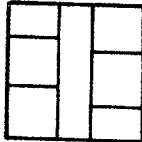
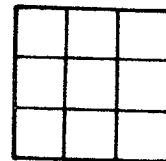
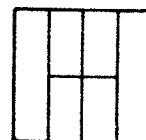
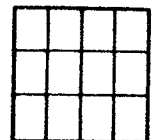
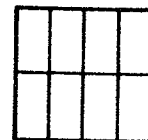
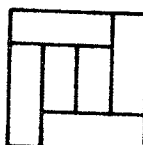
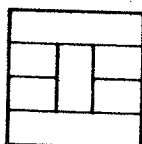
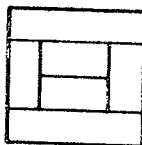
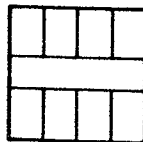
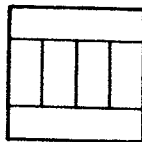
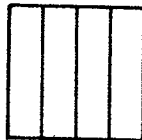
De rektangulære sekundærplader spænder over  $\ell_0$  mellem de lange sider i rektanglet, medens de kvadratiske dobbeltspændte sekundærplader fordeler den ydre last ligeværdigt til kvadratets fire kanter. Følgende hovedgeometriske spændvidder er mulige:

- 0) 1 plade pr. kant:  $\ell_0, \ell_1$
  - A) 2 plader pr. kant:  $2\ell_0, (\ell_0+\ell_1), 2\ell_1$
  - B) 3 plader pr. kant:  $3\ell_0, (2\ell_0+\ell_1), (\ell_0+2\ell_1), 3\ell_1$
  - C) 4 plader pr. kant:  $4\ell_0, (3\ell_0+\ell_1), (2\ell_0+2\ell_1), (\ell_0+3\ell_1), 4\ell_1$
  - D) 5 plader pr. kant:  $5\ell_0, (4\ell_0+\ell_1), (3\ell_0+2\ell_1) \dots osv.$
- osv.

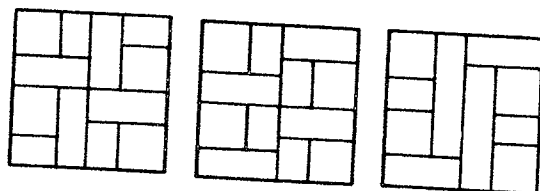
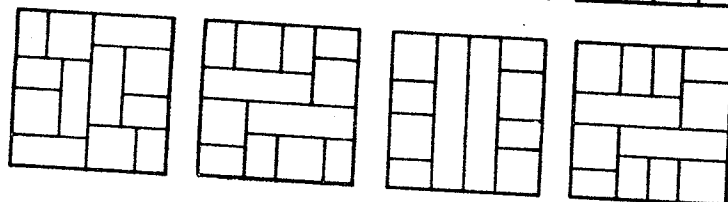
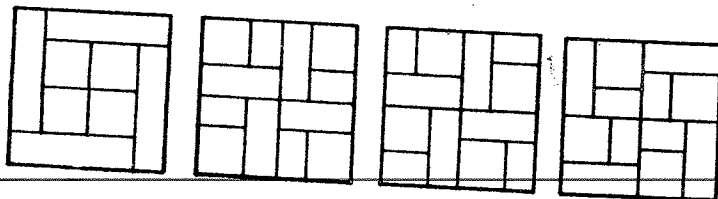
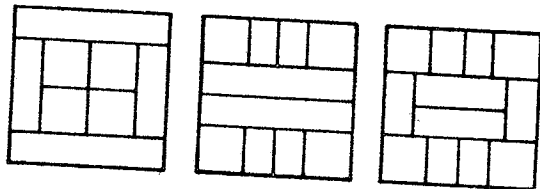
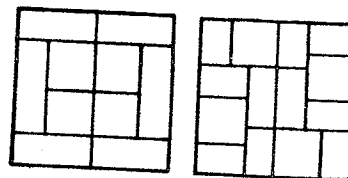
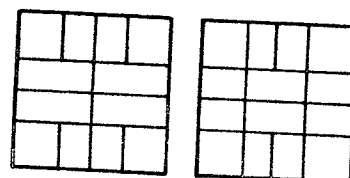
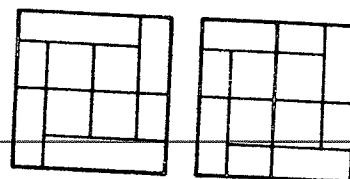
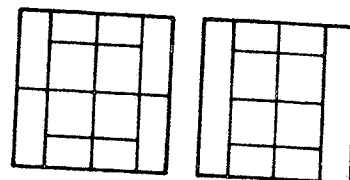
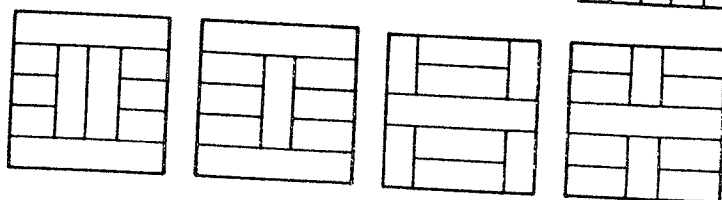
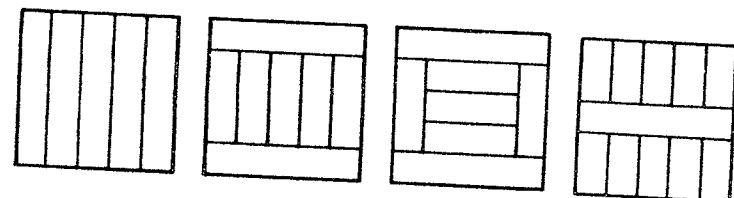
Gruppe 0 er uinteressant, for så vidt der her kun er een plade og ingen bjælker i konstruktionen.

I følgende skitser er vist en række bjælkearrangementer inden for kantlængder af hovedkonstruktionen mindre end eller lig  $(3\ell_0+2\ell_1)$ . Der er forudsat parvis ens eller kvartetvis spejlsymmetriske reaktionsfordelinger. Alle pladefelter, hvis ene kantlængde er  $\ell_0$ , defineres som rektangler, hvis den anden kantlængde er større end  $\ell_0$ .

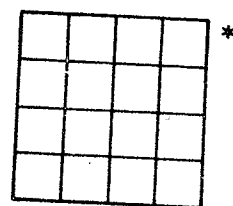
Til højre for den lodrette stiplede linie er vist eksempler, hvor der optræder uens parvis spejlsymmetriske reaktionsfordelinger, samt eksempler på bjælkearrangementer, der indeholder rektangler, hvis korte sider er lig  $\ell_0$ , og hvor en deling heraf betyder ændrede kraftveje. Når kantlængden af hovedkonstruktionen overstiger disse størrelser, er en fuldkommen permutation heraf uden for en skitseringsmulighed.

$A_{2\ell_0}:$  $A_{\ell_0+\ell_1}:$  ingen løsning $A_{2\ell_1}:$  $B_{3\ell_0}:$  $B_{2\ell_0+\ell_1}:$  $B_{\ell_0+2\ell_1}:$  $B_{3\ell_1}:$  $C_{4\ell_0}:$ 

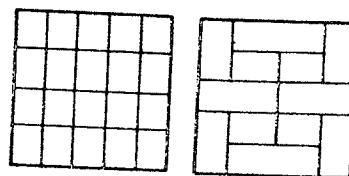
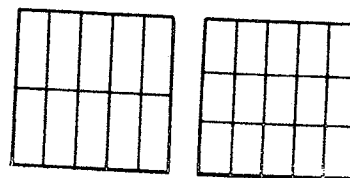
fortsat

 $c_{3\ell_0+\ell_1}$ : ingen løsning $c_{2\ell_0+2\ell_1}$ : $c_{\ell_0+3\ell_1}$ : ingen løsning $c_{4\ell_1}$ : $D_{5\ell_0}$ :

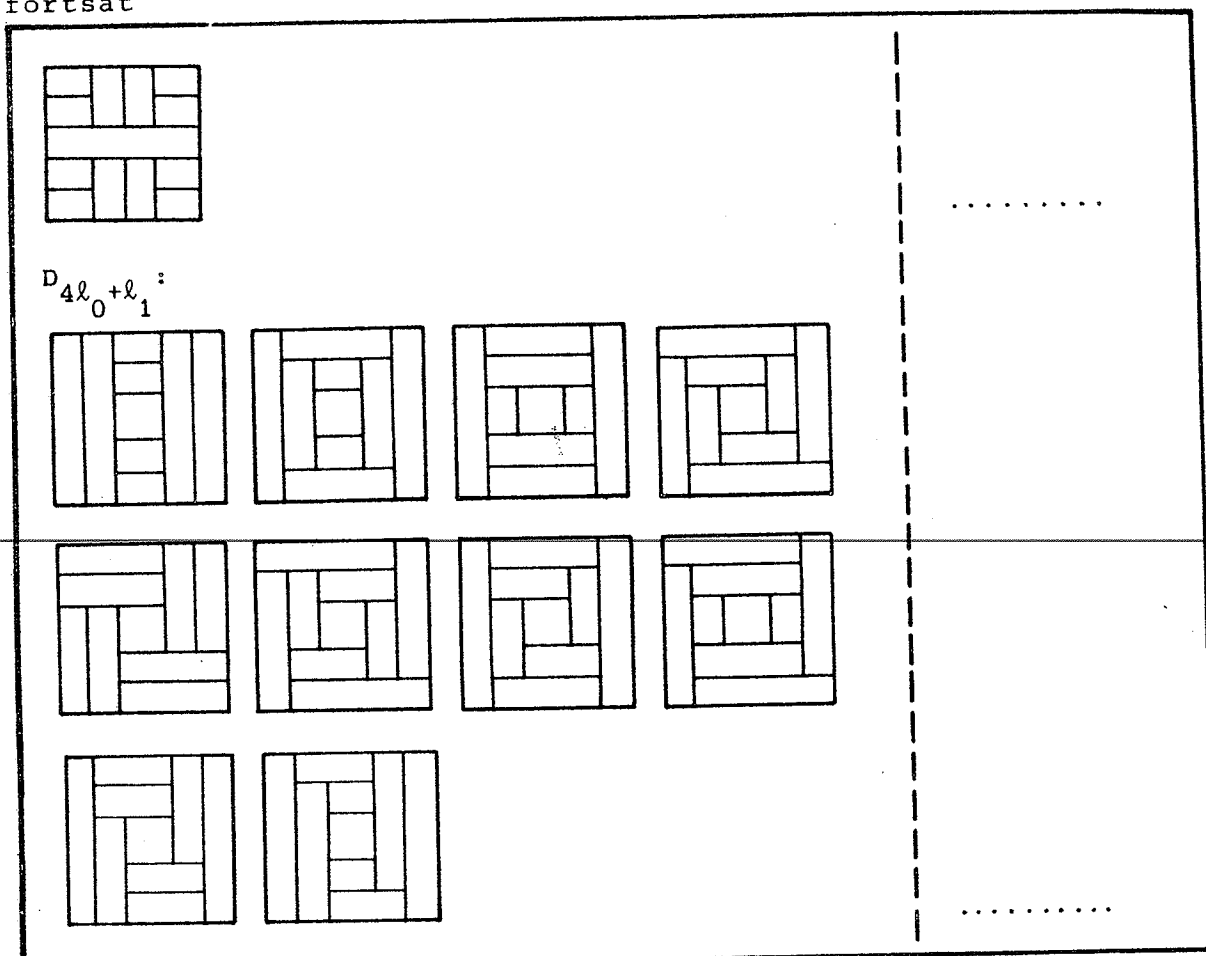
\*



\*



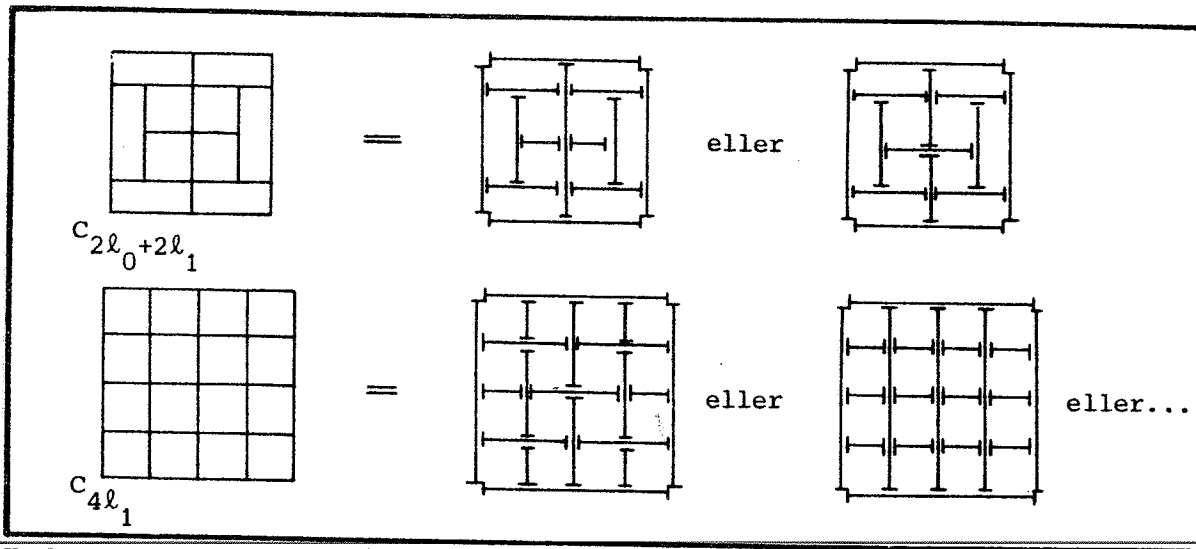
fortsat



F.01

Mulige ortogonale bjælkeforløb inden for kvadrater med kantlængder svarende til indekseringerne på gruppebenævnelserne A, B, C & D. Til venstre for de lodrette stiplede linier er anført de endelige mængder af mulige bjælkeforløb under forudsætning af, at ingen bjælker har mulighed for at krydse hinanden. Man kunne kalde disse for de "regulære" bjælkearrangementer. Til højre er antydte eksempler på bjælkearrangementer, hvor bjælker har mulighed for at krydse hinanden. Disse eksempler, som man kunne kalde for de "irregulære" bjælkearrangementer, muliggør forskellige statiske tolkninger, af hvilke antallet kan være meget stort.

I gruppen af bjælkearrangementer til højre forekommer krydsningspunkter eller sammenfald mellem 2 bjælkers vederlag på samme bjælke. Der er derigennem muliggjort forskellige veje for den ydre last gennem bjælkekonfigurationen afhængig af, hvilke bjælker der tænkes gennemgående. Udtages 2 eksempler fra gruppe C med kantlængderne  $2(l_0+l_1)$  og  $4l_1$  - i figur F.01 mrk. \* -, er det i figur F.02 skitseret, hvorledes disse hver for sig kan opfattes på forskellig måde.



F.02

2 eksempler på, hvorledes bjælkearrangementer fra figur F.01 statisk kan opfattes på forskellig måde. Bjælkeender er markeret med korte tværstreger.



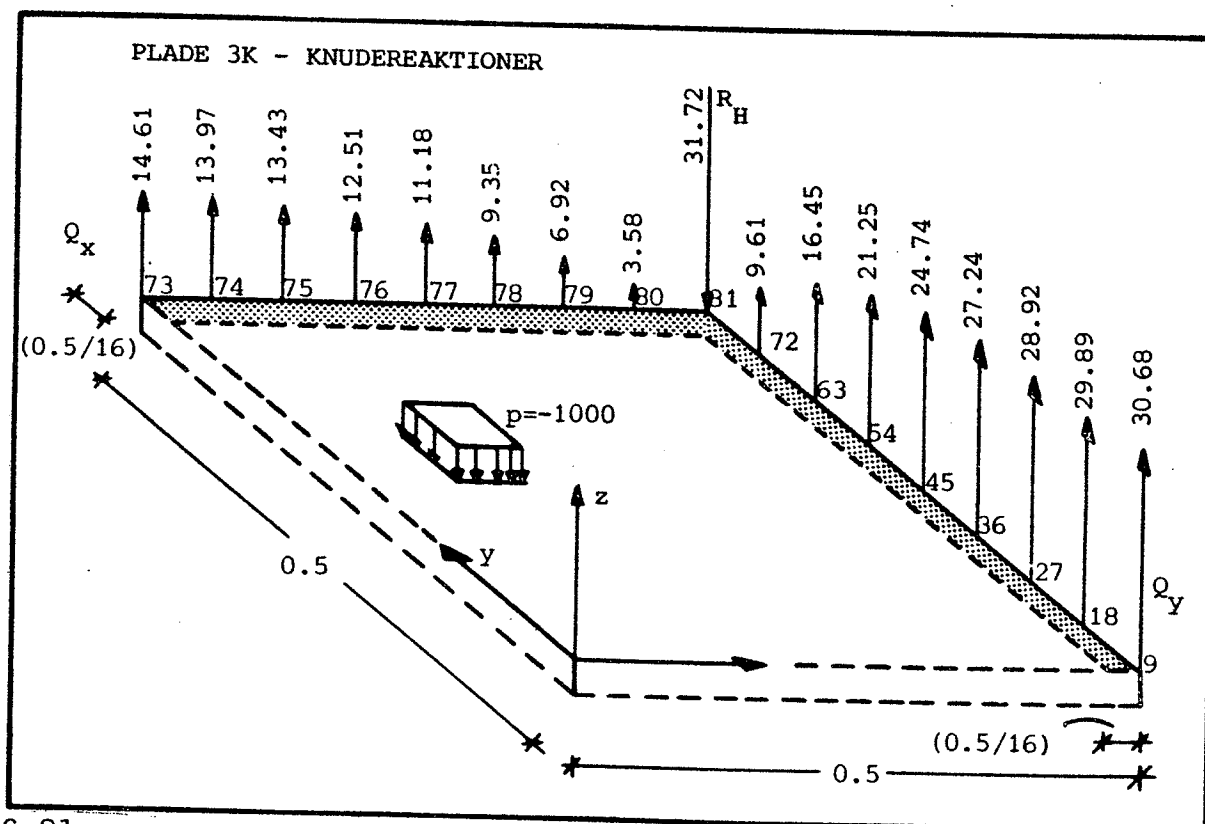
## APPENDIX G

## REAKTIONSFORDELING FOR SIMPELT KANTUNDERSTØTTEDE, KVADRATISKE ORTOTROPE PLADER

Ved elementmetodeberegning er fundet knudereaktioner i knuder jævnt fordelt langs kanter af kvadratiske, simpelt understøttede ortotrope plader, hvis materialeegenskaber er varieret fra kørsel til kørsel - se [Aagaard, N.J. (1988c)] og [Aagaard, N.J. (1988d)].

Belastningen består af en jævnt fordelt nedadrettet fladelast  $p$  af værdien  $\div 1000$ .

I figur G.01 er vist resultater for en ortotrop plade - kaldet 3K -, hvor  $(E_y/E_x) = 0.2$ ,  $(G/(E_x + E_y)) = 0.05$  og  $v_{yx} = v_{xy} = 0.3$ .



G.01

Knudereaktioner, således som disse er fundet v.h.j.a. elementmetodeberegning med biblioteksprogrammet ASKA [Aagaard, N.J. (1988 d)]. Elementinddeling og knudenummerering fremgår af figur 1.04 og 1.05 i [Aagaard, N.J. (1988 c)]. Pladen er belastet med en jævnt fordelt fladelast  $p$  af størrelsen  $-1000$ , idet kraft såvel som pladespændvidde har enhedsstørrelser. Der er vist  $1/4$ -plade.



Fejlen på elementmetodeberegningen er numerisk ca.  $30.03 - 29.95 = 0.08$  svarende til ca. 0.3 o/oo af den samlede belastning over 1/4-pladen.

Med en elementinddeling som den viste - se endvidere [Aagaard, N.J.(1988c)] figur 1.04 - opnåes således det åbentlyse forkerte resultat, at en fuldt ud ortotrop plade, der alene evner at bære een vej, bibringes en reaktion  $Q_x$  på kanten parallel med den stive retning, som er forskellig fra 0. Denne forstyrrelse af resultatet, som skyldes elementmetodens princip, er kraftigst, når reaktionsforholdet  $(\Sigma Q_x / \Sigma Q_y)$  - se figur G.01 - er lille.

For plade 3K fås  $\Sigma G_x = 78.25$  og  $\Sigma Q_y = 173.44$ , medens hjørnekraften  $R_H$  er lig  $-31.72$ . Adderet ovennævnte effekt fås tilsvarende  $\Sigma Q_x^1 = 92.57$ ,  $\Sigma Q_y^1 = 187.76$  og  $R_H^1 = -30.42$ . Idet det antages, at hjørnekraften er sammensat af 2 bidrag hørende til  $\Sigma Q_x^1$  henholdsvis  $\Sigma Q_y^1$ , fordeles  $R_H$  på  $\Sigma Q_x^1$  og  $\Sigma Q_y^1$  svarende til disses indbyrdes forhold. Man får dernæst  $\Sigma Q_x^1 = 82.52$  og  $\Sigma Q_y^1 = 167.39$ , eller om man vil  $(\Sigma Q_x^1 / \Sigma Q_y^1) \approx 0.493$ .

5-11-84

## APPENDIX H

## FORSØG MED STRESSED-SKIN-ELEMENTER

Der er gennemført 3 bæreevnepforsøg med henholdsvis

- enkeltbærende, simpelt kantunderstøttet stressed-skin-element,
- dobbeltbærende, simpelt kantunderstøttet stressed-skin-element og
- simpelt hjørneunderstøttet, isostat-tilnærmet stressed-skin-element.

Elementopbygningerne fremgår af tegningerne H.01, H.02 og H.03, medens den principielle opbygning - der er ens for alle 3 elementer - fremgår af detaljetegningerne H.04 og H.05. Der forekommer afvigelser herfra i de tilfælde, hvor ikke-ortogonale kroppe mødes eller krydses i det isostattilnærmede element.

Forsøgsopstillingen fremgår af figurerne H.06-H.14. Forsøgsopstillingen, hvis anliggende i alle 3 tilfælde har været at skabe en jævnt fordelt belastning via en hydrostatisk virkende trykballon over et kvadratisk areal på 1.35 m x 1.35 m, har været ens for alle 3 forsøg.

De kantunderstøttede elementer var forsynet med 2 henholdsvis 4 UNP-200-stålkantbjælker (figur H.15 og H.16) for overføring af liniereaktioner til vederlagskonsoller (figur H.09). Til det hjørneunderstøttede element anvendtes hjørnebeslag for montering af elementhjørner (figur H.17).

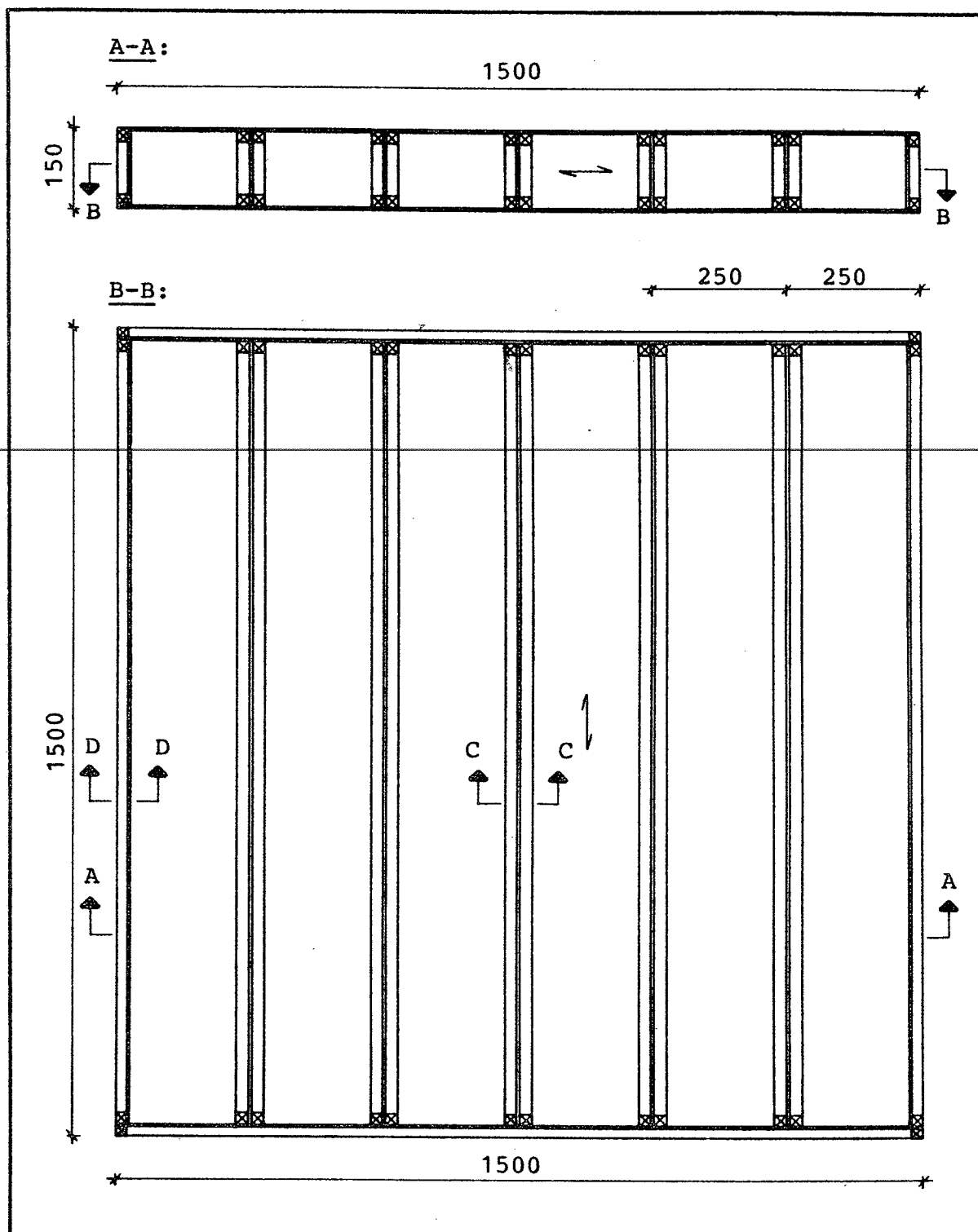
Flytningsmåleres nummerering og placering fremgår af figur H.18. De ved forsøgene med kalibrerede flytningsmålere og lufttrykmålere fundne arbejdskurver er gengivet kvartet- og kvintetvis i figurerne H.19, H.20 henholdsvis H.21. Forudsætninger, kommentarer, forbehold m.v. fremgår af figurteksterne.

I figurerne H.22, H.23 og H.24 er vist nedbøjninger i elementmidterlinier henholdsvis diagonaler undervejs i belastningerne.

Det er heraf tydeligt, at den valgte kantskinneløsning til understøtning af kantunderstøttede elementer kun i en begrænset udstrækning er anvendelig. Kantskinnerne bidrager med udbøjninger, der på midten heraf udgør ca.  $1/4$  af den maksimale elementudbøjning.

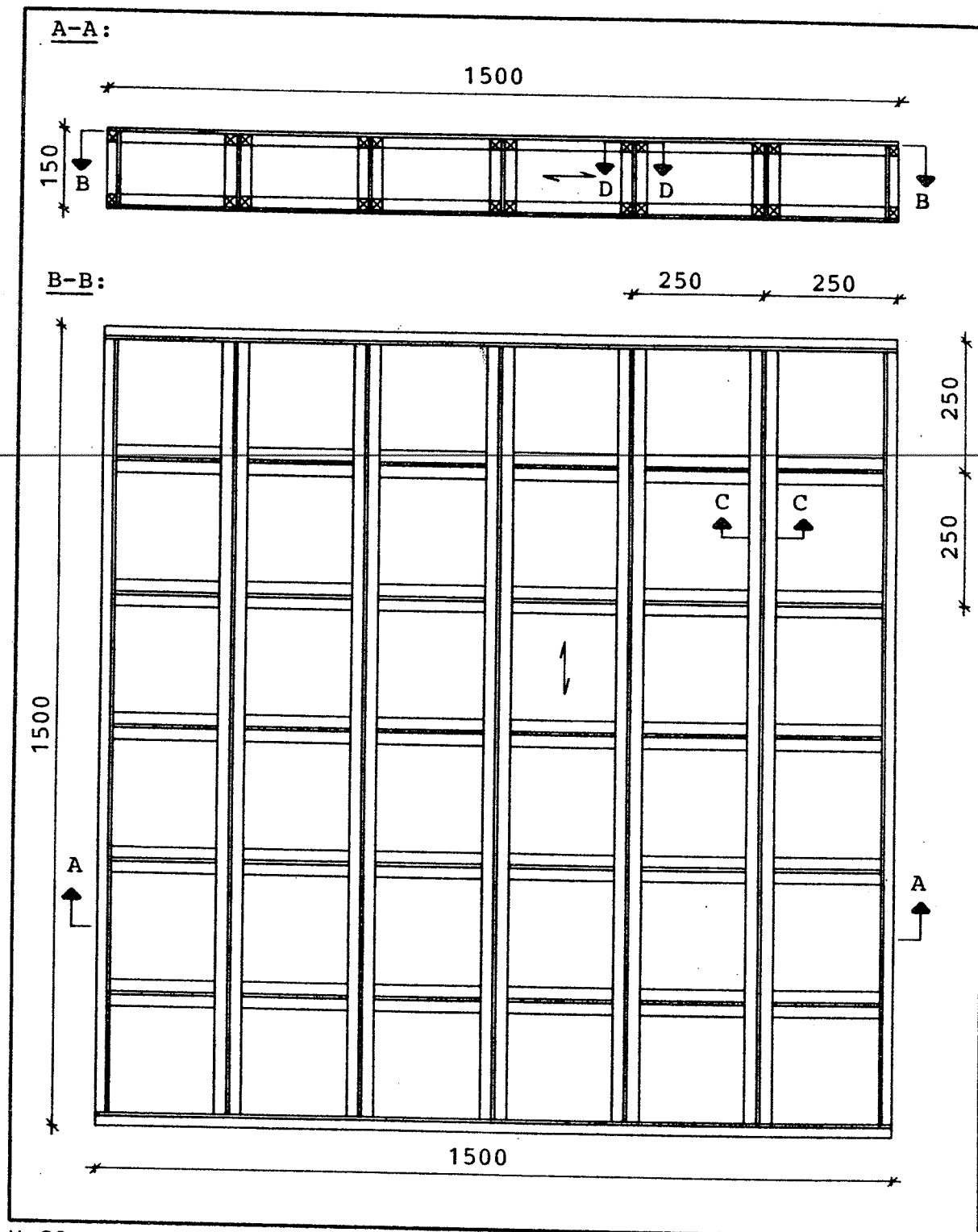
Det fremgår af figur H.22, at det enkeltbærende element ikke med den 1.35 m brede trykballon har været belastet over hele sin 1.5 m store bredde. Resultatet heraf har været, at de yderste kroppe (som udgør elementkanterne) under forsøget har virket som afstivninger for de nærmeste indre kroppe/ribber.

---



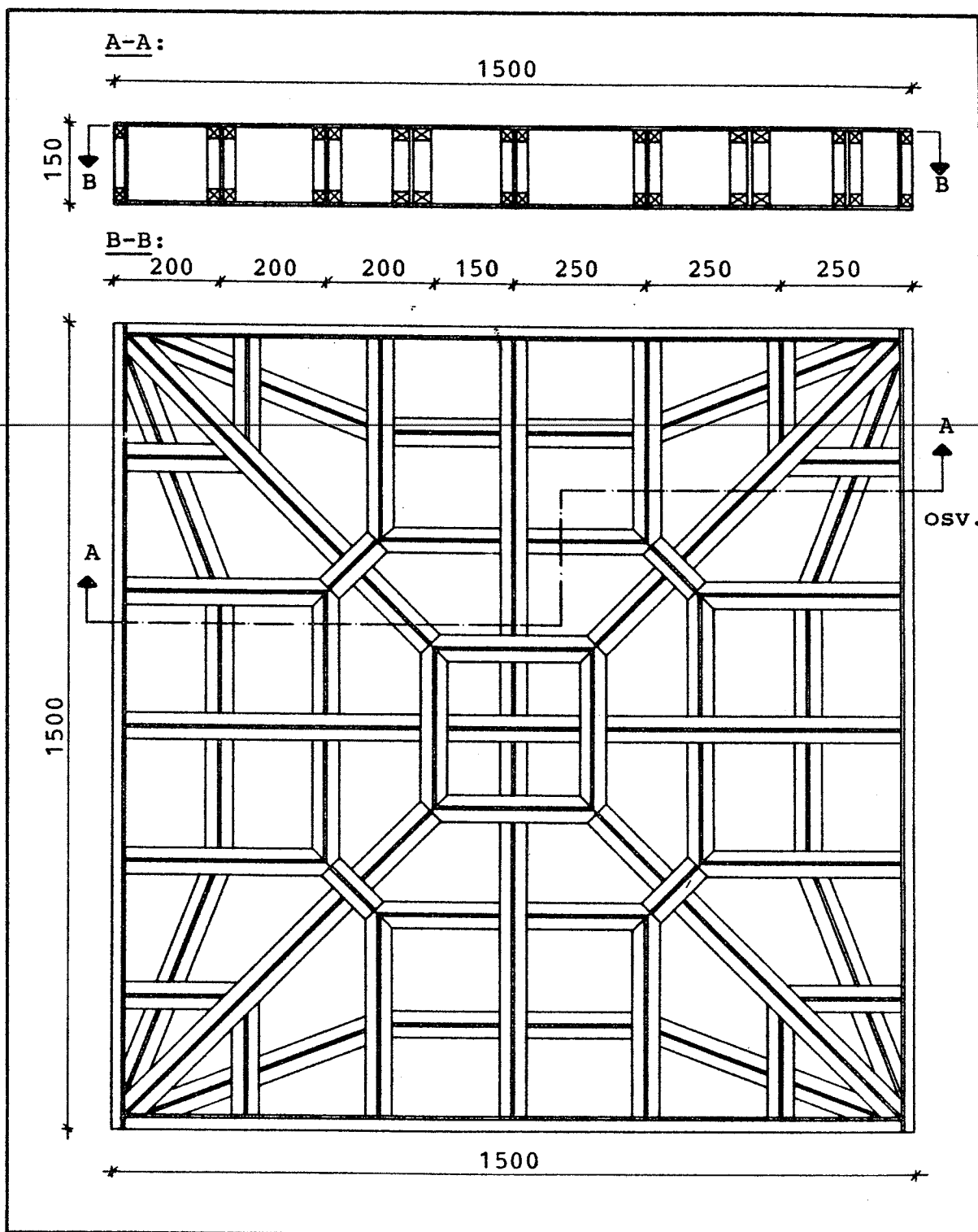
H.01

Enkeltbærende stressed-skinelement af træ. Ydre mål: 1500 x 1500 x 150 mm. Flanger og kroppe af finsk pudset kombikrydsfinér (nominel tykkelse 6.5 mm). Lister af 21 x 21 mm fyrretræ. Samlingsdetaljer (snit C-C og D-D) fremgår af figur H.04 og H.05.



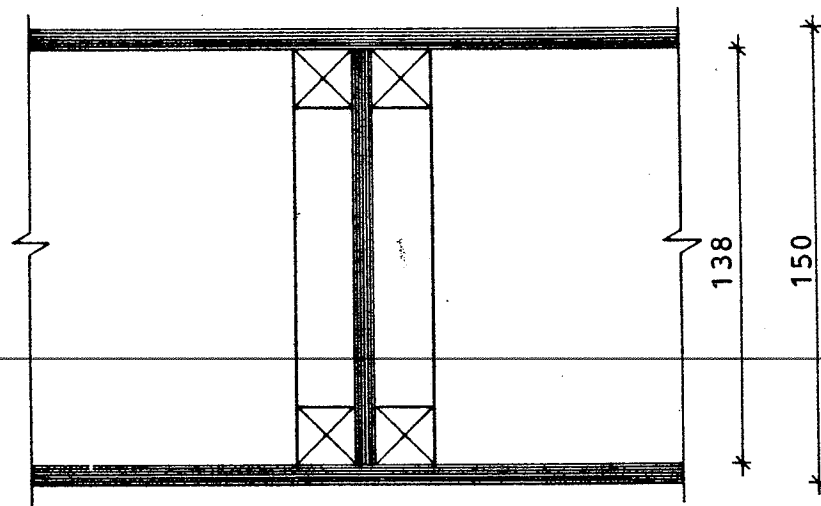
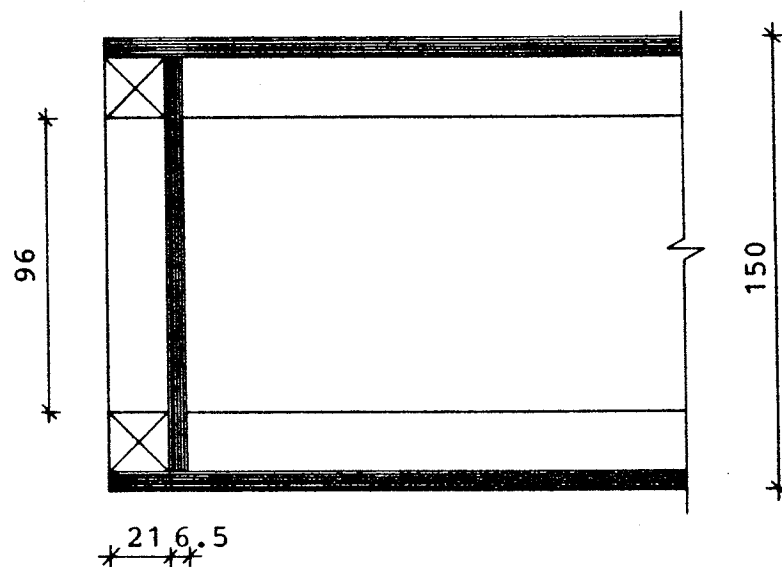
H.02

Dobbeltbærende stressed-skin-element af træ. Snit C-C og D-D refererer til figur H.05. Se i øvrigt figur H.01 og H.04.

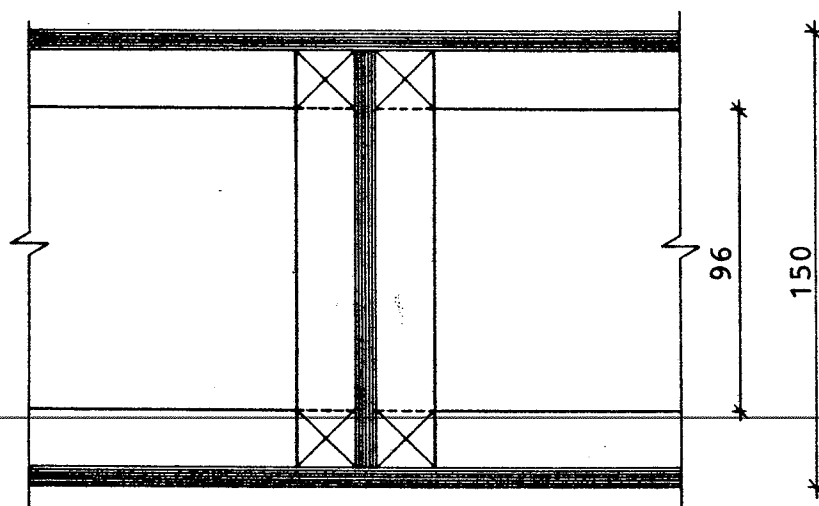
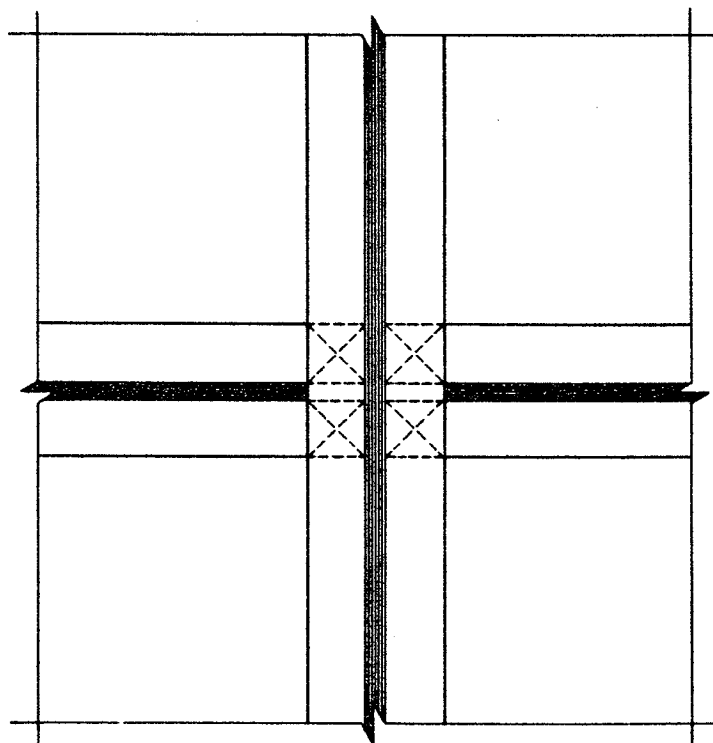


## H.03

Isostat-tilnærmet-stressed-skin-element af træ. Samlinger er opbygget som for elementet i figur H.02 og H.05. I ikke-ortogonale krop-til-krop-samlinger er der anvendt rhombe-tilskårne 42 x 21 mm lodrette fyrretræslister for at sikre tilstrækkeligt gods til sømlimningen.

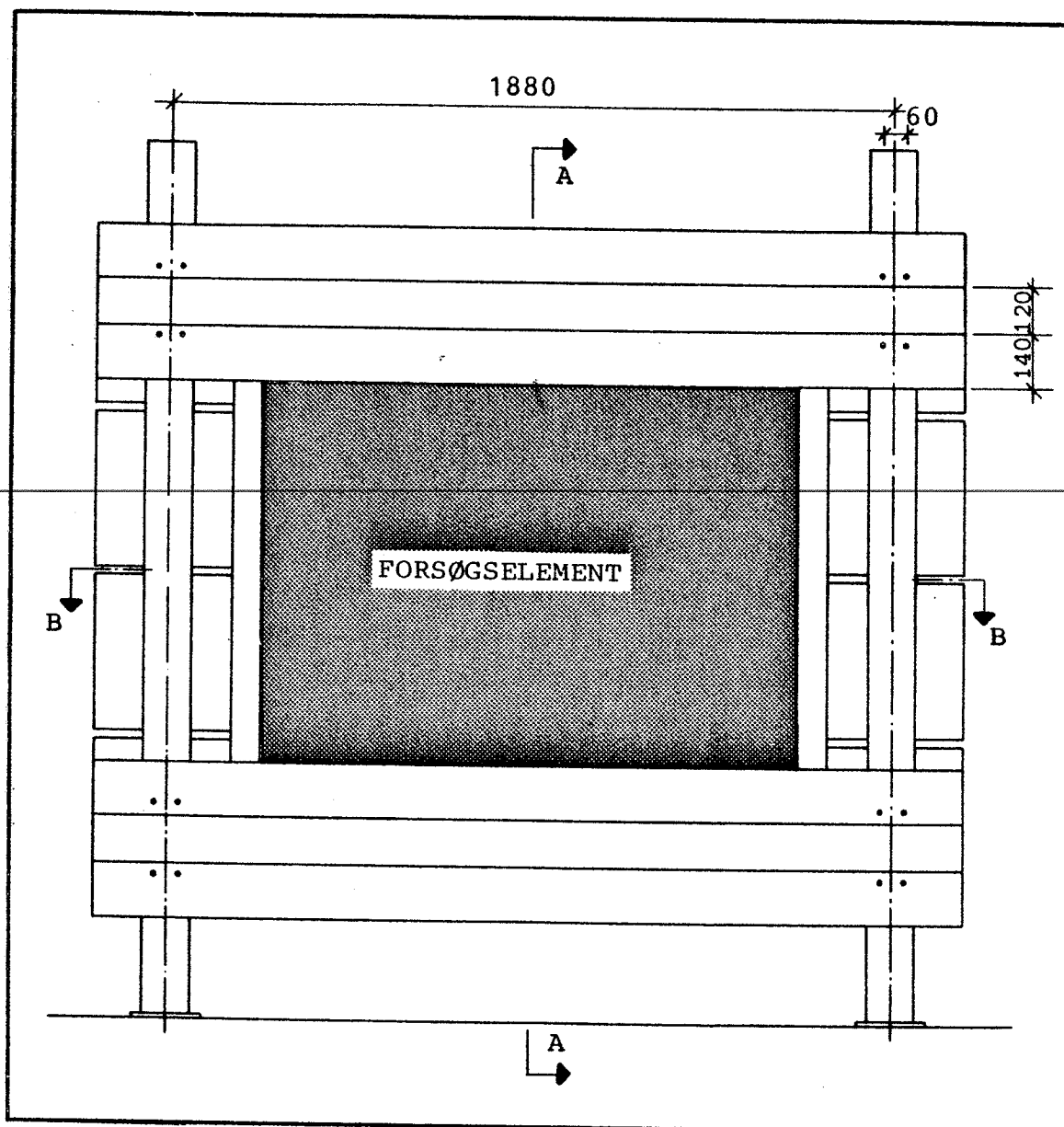
C-C:D-D:**H.04**

Lodrette snit i enkeltbærende stressed-skin-element. Alle samlinger (kropsplade-lister, lister-lister, lister-flanger) er udført som sømlimninger suppleret med midlertidige pressetryk (skruetvinger) under oplimningen. Søm: NKT 20/40 pr. 75 mm forskudt; lim: Fenol-resorcinol (Cascosinol 1711; hærder 2622 - venligst leveret af Casco, Glostrup). Snit D-D er også gældende i dobbeltbærende og isostattilnærmet element.

C-C:D-D:

## H.05

Lodret og vandret snit ved ortogonalt kryds mellem kroppe. Den ene krop (incl. flangeparallelle lister) er gennemgående. Tilstødende kropsplader er afskåret 21 x 21 mm i hjørnerne. Flangevederlag er planhøvlede og afpudsede inden montage af flangeplade.



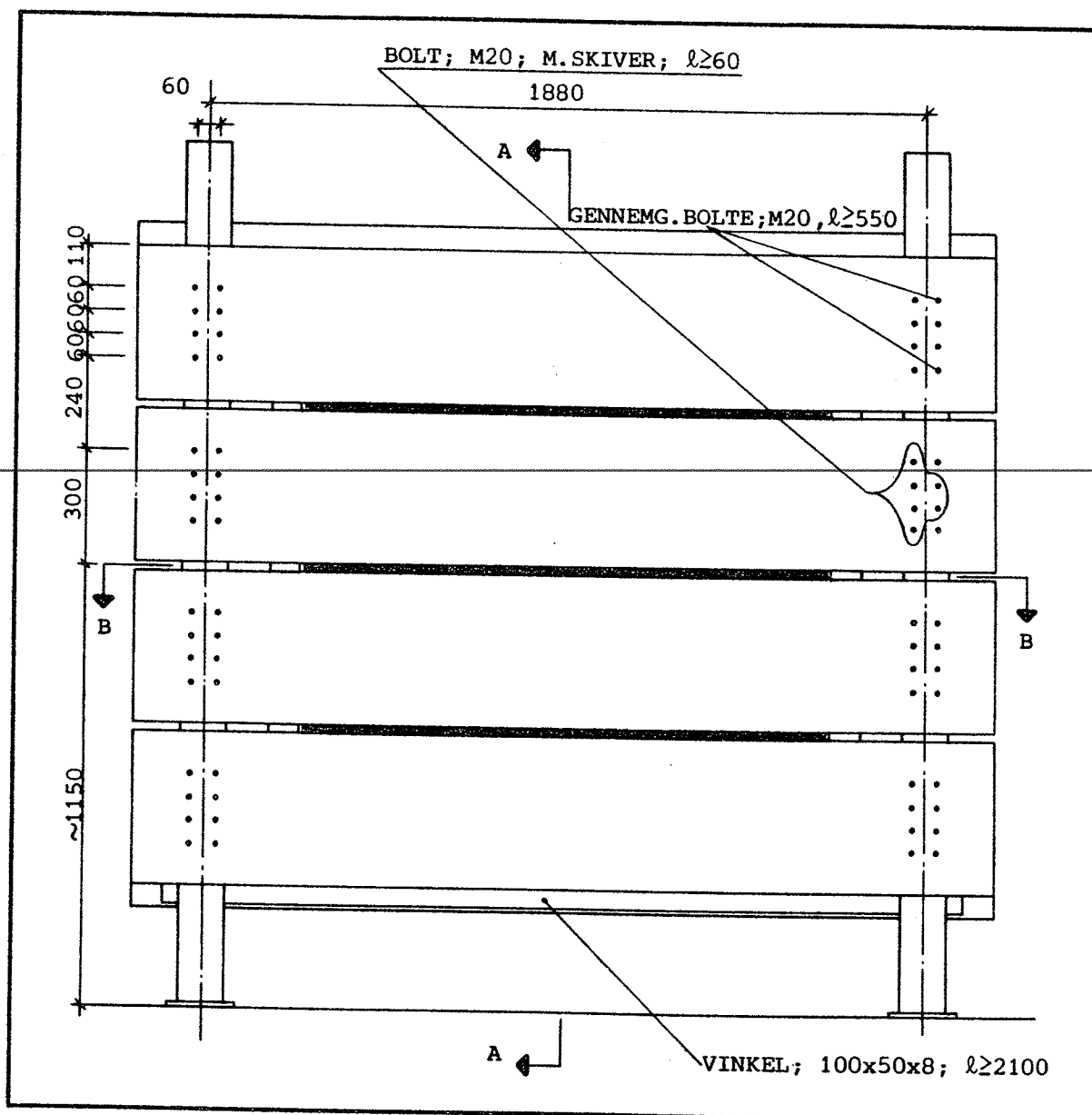
H.06

Forsøgsopstilling til bæreevneporsøg med kvadratiske, tværbelastede stressed-skin-elementer - figur H.01-H.03. Frontopstalt.

Snittene A-A og B-B er vist i figur H.08. I opstillingen er her vist det dobbeltbærende forsøgsselement med kantskiner.

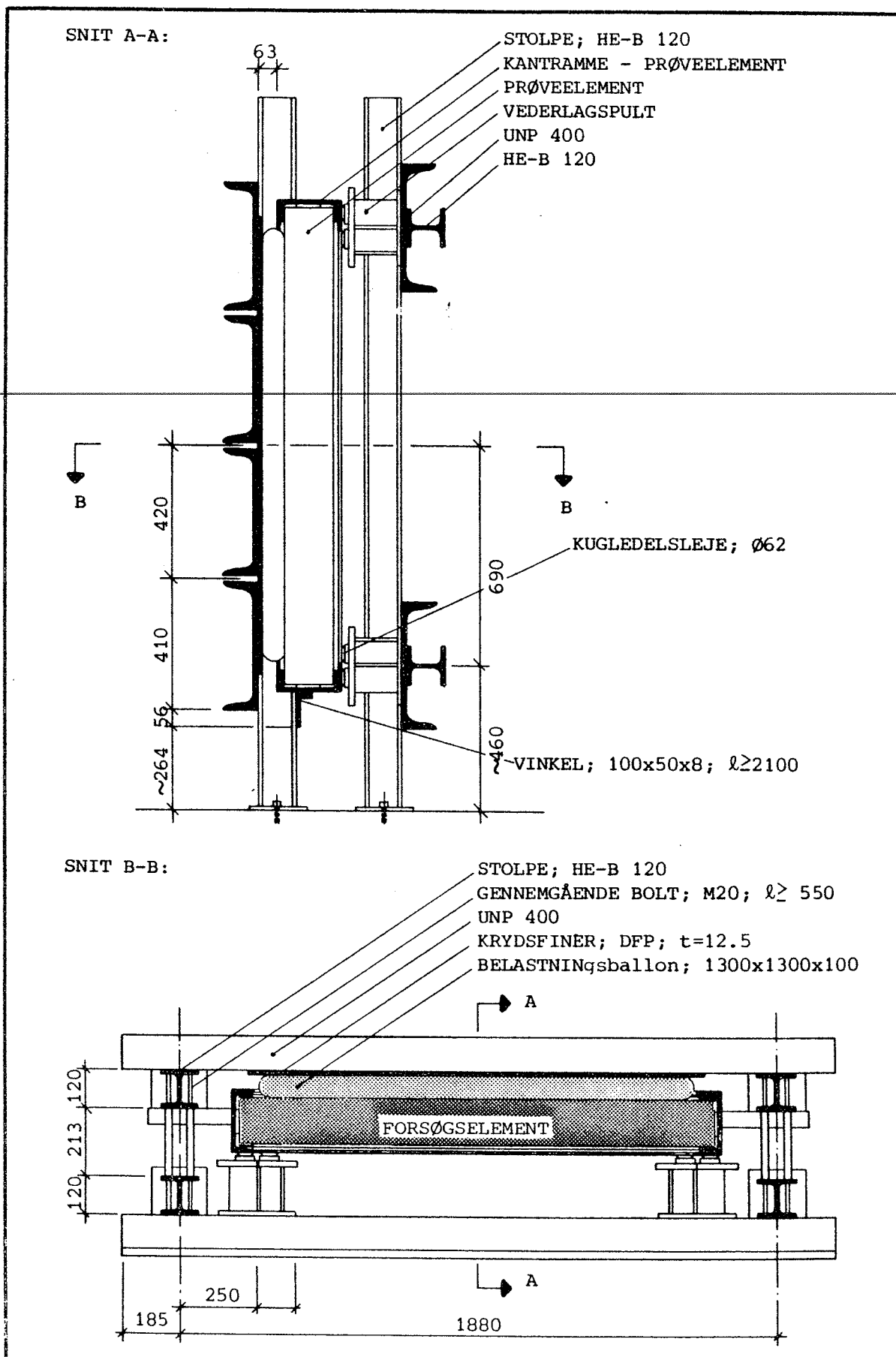
Forsøgsstanden er opbygget omkring 4 lodrette HE-B-120-stålprofiler. Belastningen etableres ved hjælp af en trykballon (formsyet i mål 1.35 x 1.35 x 0.15 m). Via kantskiner overføres belastningen til vederlagskonsoller, der er monteret 2 og 2 på 2 vandrette UNP-400 stålbjælker forstærket med HE-B-120-profiler. Via 4 gange 8 gevindstænger (Ø 20) overføres kræfterne til 2 vandrette UNP-400-profiler på opstillingens "bagside". Kræfterne fordeles via lodrette HE-B-120-profiler til alle de 4 vandrette UNP-400-profiler på opstillingens bagside. Disse udgør modholdet for trykballonen. Forsøgsselement styres lodret af et vinkelprofil monteret på HE-B-120-stolperne.

Forsøgsopstillingen er vist ved fotos i figurerne H.11 og H.12.



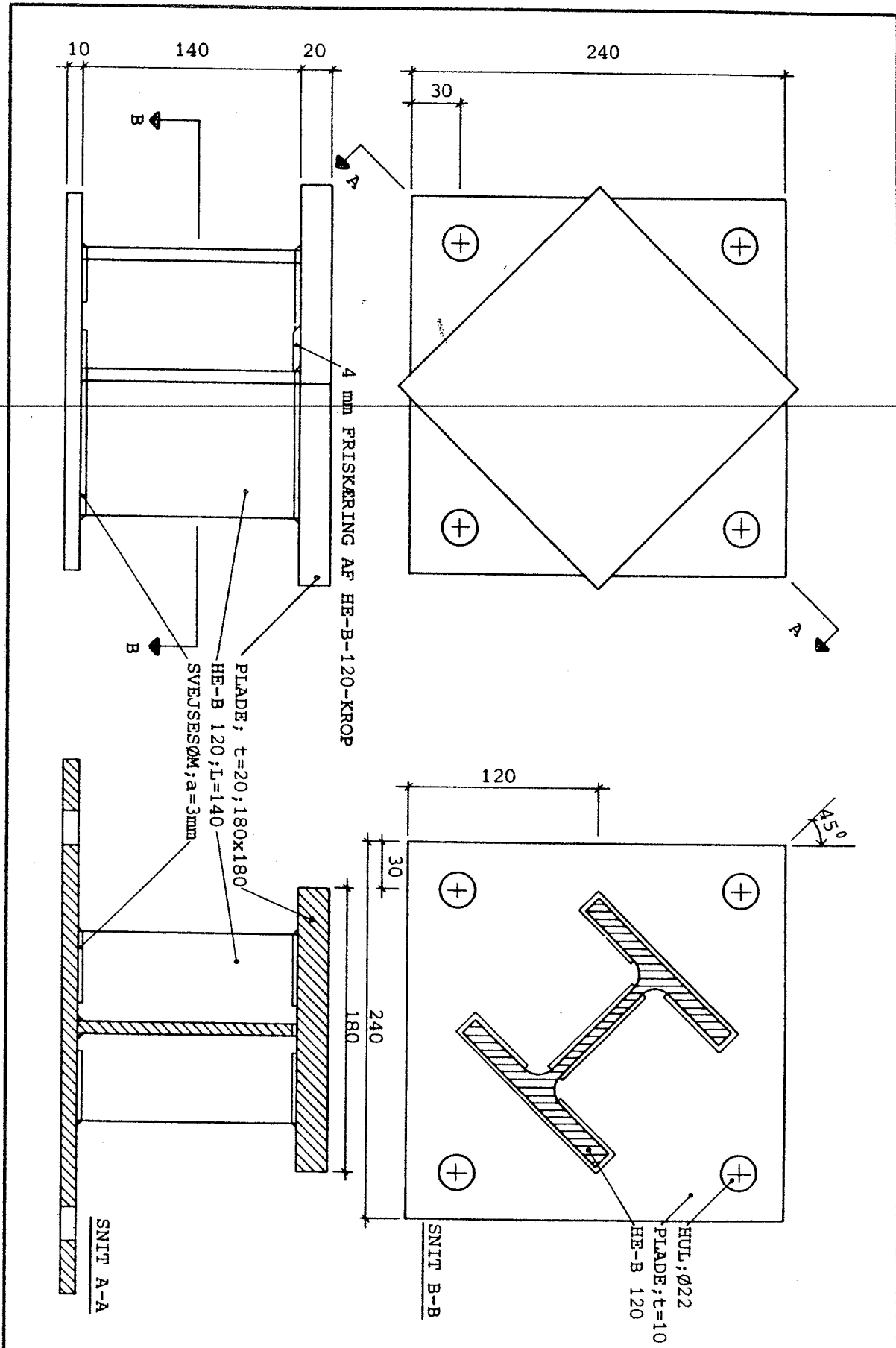
## H.07

Forsøgsopstilling til bæreevnepforsøg med kvadratiske, tværbelastede stres-sed-skin-elementer - figur H.01-H.03. Bagsideopstalt. Snittene A-A og B-B er vist i figur H.08. Stykliste for opstillingen (alm. konstruktionsstål - St42): 6 stk. HE-B-120,  $l = 2250$  mm; 6 stk. UNP-400,  $l = 2250$  mm; 1 stk. vinkel 100 x 50 x 8 mm,  $l = 2100$  mm; 16 gevindstænger  $\varnothing 20$ ,  $l \geq 550$  mm; 66 stk. bolte M20,  $l = 80$  mm; max. 8 stk. kugledelslejer  $\varnothing 62$ ; 4 stk. specialkonstruerede vederlagskonsoller (figur H.09 og H.12); 16 stk. for-ringsrør (vandrør  $\varnothing 30$ ),  $l = 213$  mm; 4 stk. bolte for montering af stolper i gulv; desuden kontraskinner eller hjørnebeslag. Løsrevet fra den under bæreevnepforsøgene kraftpåvirkede viste opstilling etableredes en selvstæn-dig målebroskonstruktion bestående af 2 stk. HE-B-120-stolper påmonteret 3 vandrette målebroer (vinkeljern 100 x 50 x 8 mm). Vedrørende det hydrauliske system til belastningsetableringen: se figur H.10, H.13 og H.14. Vedrørende flytningsmåleropstilling: se figur H.18-H.20.



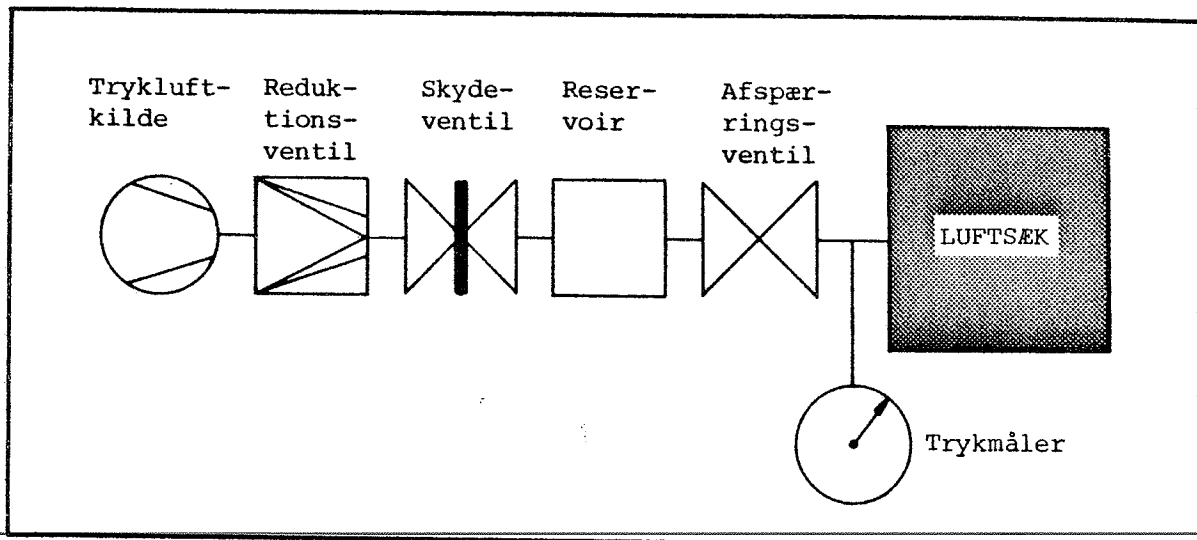
H.08

Lodret og vandret snit i forsøgsopstilling til bæreevnforsøg med kvadratiske, tværbelastede stressed-skin-elementer - se i øvrigt figur H.06 og H.07.



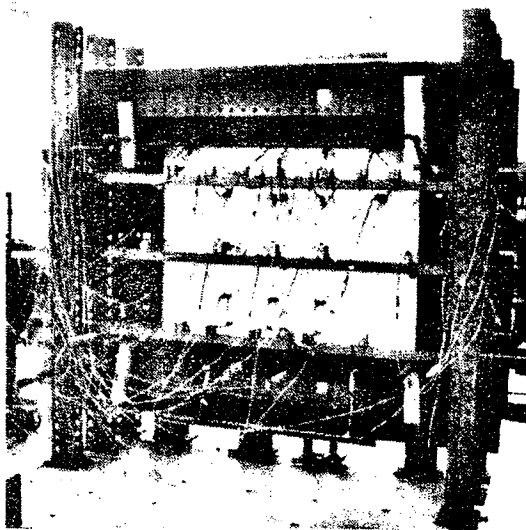
H.09

Opstalt og snit i vederlagskonsol opbygget af HE-B-120-profiler og plader af tykkelse 10 mm og 20 mm. For montage: se figur H.08.



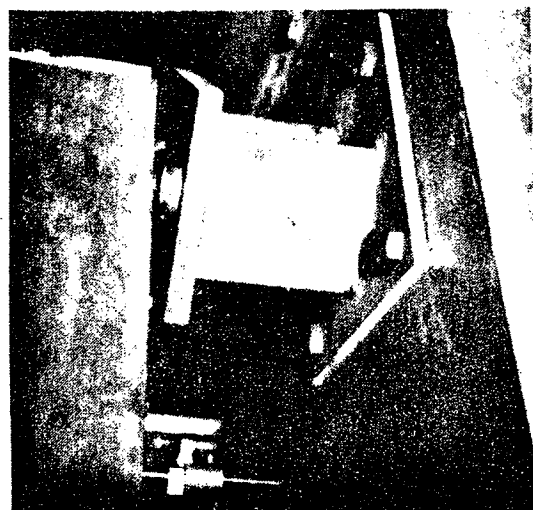
H.10

Principskitse af belastningspåførsel. Princippet i lastpåførslen er overtaget fra den udviklede teknik til tværbelastning af murværkskonstruktioner i [Reeckmann, I. (1983)] genanvendt i [Gregor, J. et al. (1983)]: "Tværbelastningen opnås ved indblæsning af trykluft i luftsækken. Ved hjælp af en reduktionsventil reduceres trykket fra DTH's fælles trykluftsystem til ca. 30 mVS. Idet afspærringsventilen holdes lukket, øges trykket i reservoiret til 25 mVS ved hjælp af skydeventilen. Afspærringsventilen åbnes nu forsigtigt, og der sker trykudligning mellem reservoir og luftsæk. På denne måde påføres trinvist ...." 50-70 mmVS ad gangen [Gregor, J. et al. (1983)] p. 103. Dette system er vist i figur H.13.



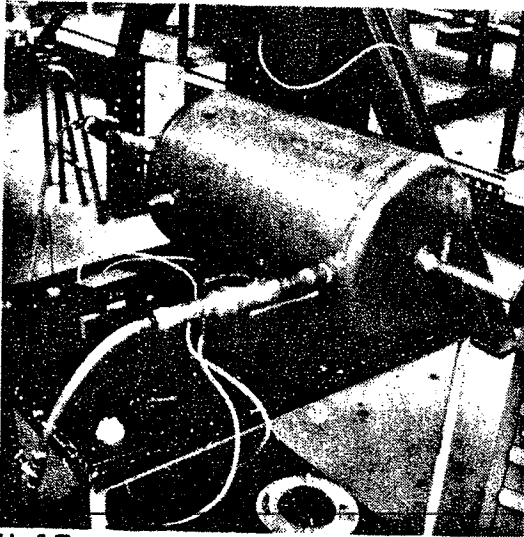
H.11

Forsøgsopstilling, målebro og måleudstyr m.v. til bæreevneforsøg med kvadratiske, tværbelastede stressed-skin-elementer af træ.



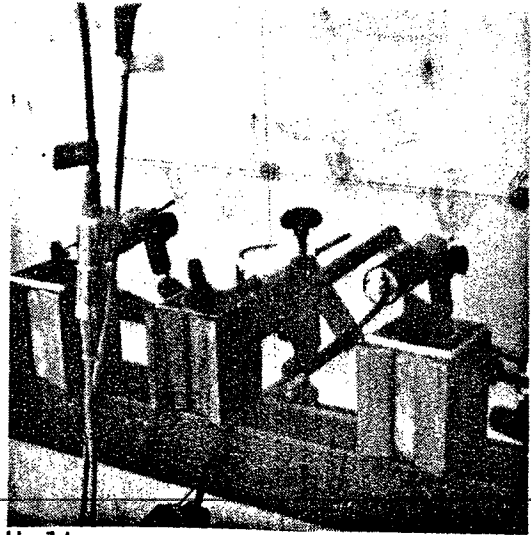
H.12

Vederlagskonsol med kugledels-lejer, der muliggør en ikke-indspændt understøtning af såvel enkelt- og dobbeltspændte som hjørneunderstøttede elementer.



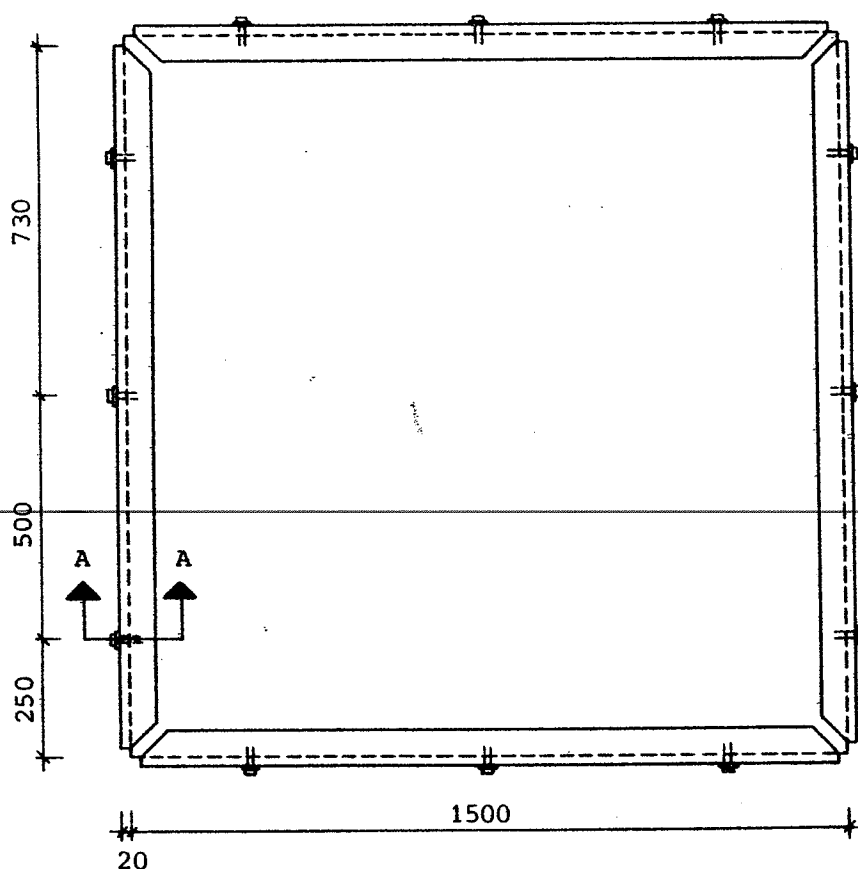
H.13

Trykreservoir med tilhørende ventiler og måleur for manuel aflæsning af lufttryk i trykballon.

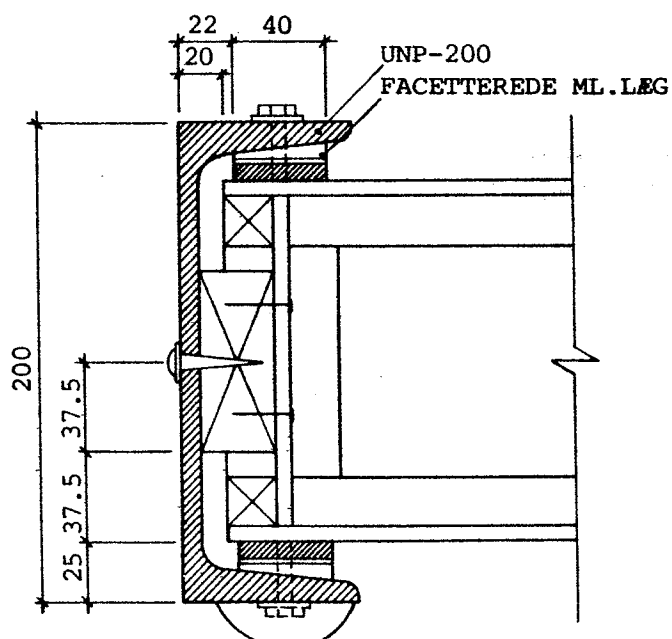


H.14

Flytningsmålere - med automatisk hulstrimmel-lagret aflæsning - og måleur (for manuelle observationer) montret på målebro.

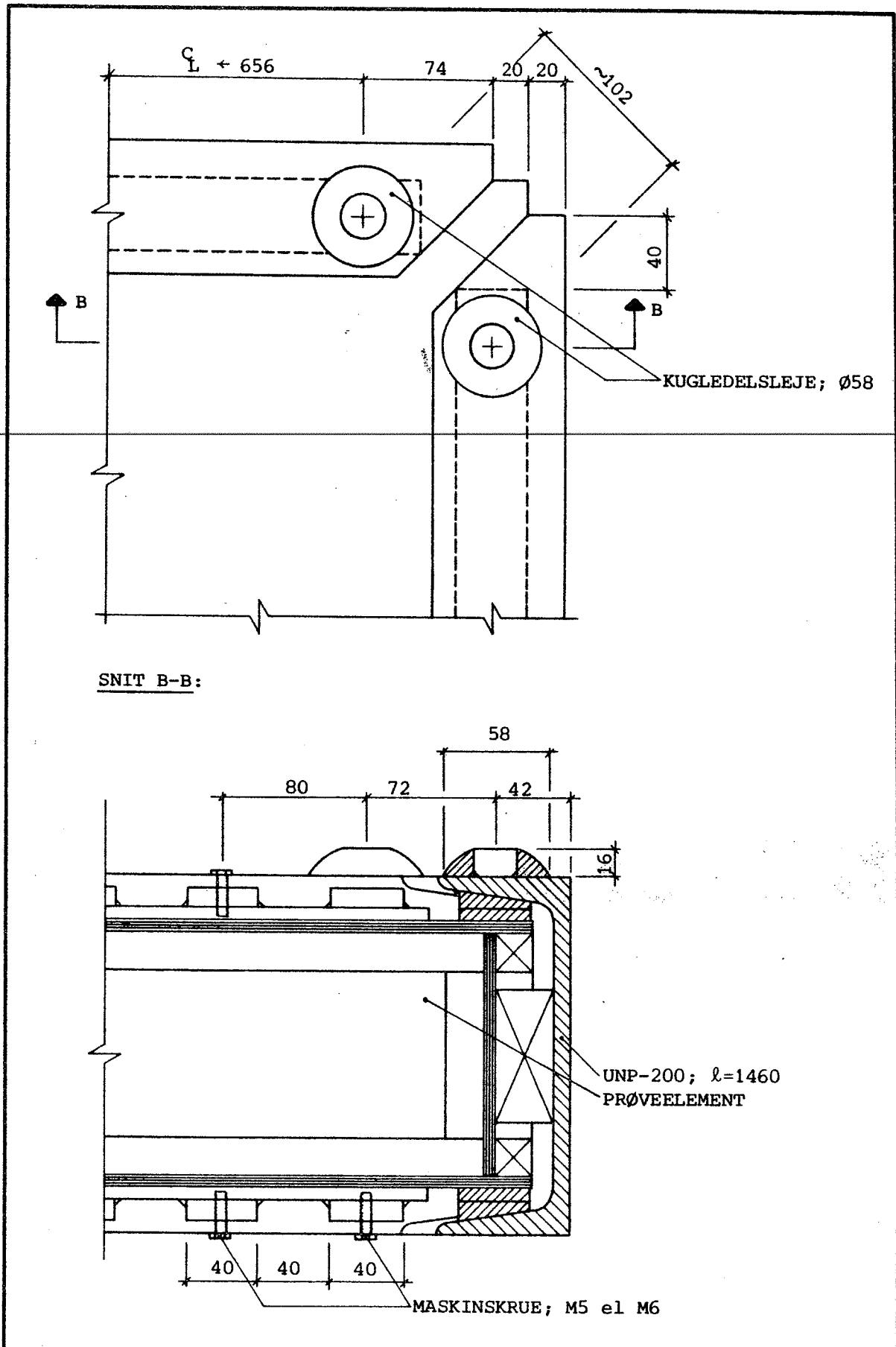


SNIT A-A:



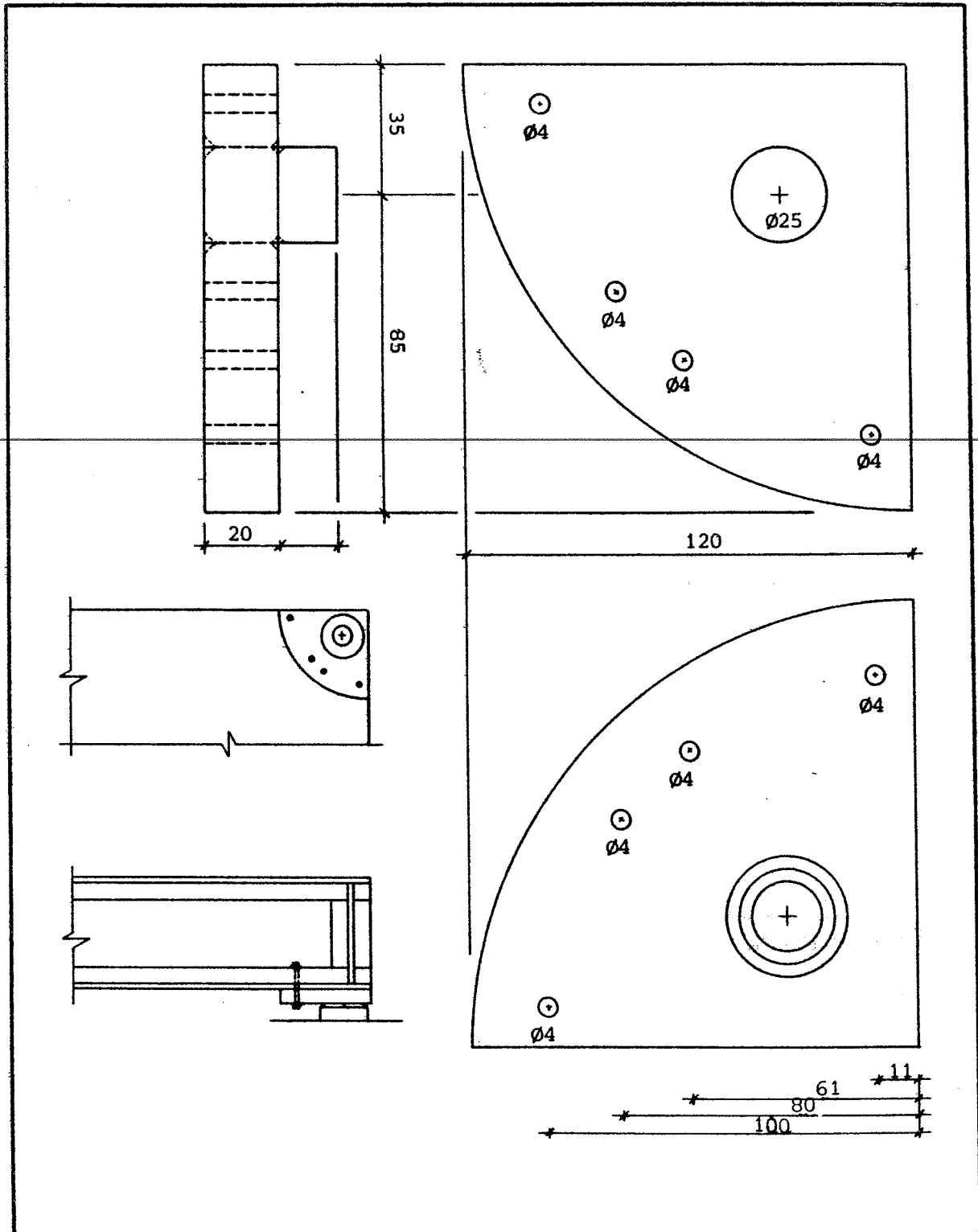
## H.15

Udformning og montering af UNP-200-stålkantskinner på forsøgselement - her det dobbelthærende. Foruden facetterede mellemlægsskiver og 5 mm fladjern ( $\lambda = 1380$  mm) monteret på UNP-profilet med hæftesvejsning og maskinbolte ( $\varnothing 5$  mm) pr. 80 mm er der anvendt franske skruer til montering af kantskinnerne på elementkant, som forlods er forsynet med tykkelseshøvlet træprofil 32.5 x 75 mm ved hjælp af kamsøm 22/35 pr. 100 mm forskudt isømmet indefra. Se i øvrigt figur H.16.



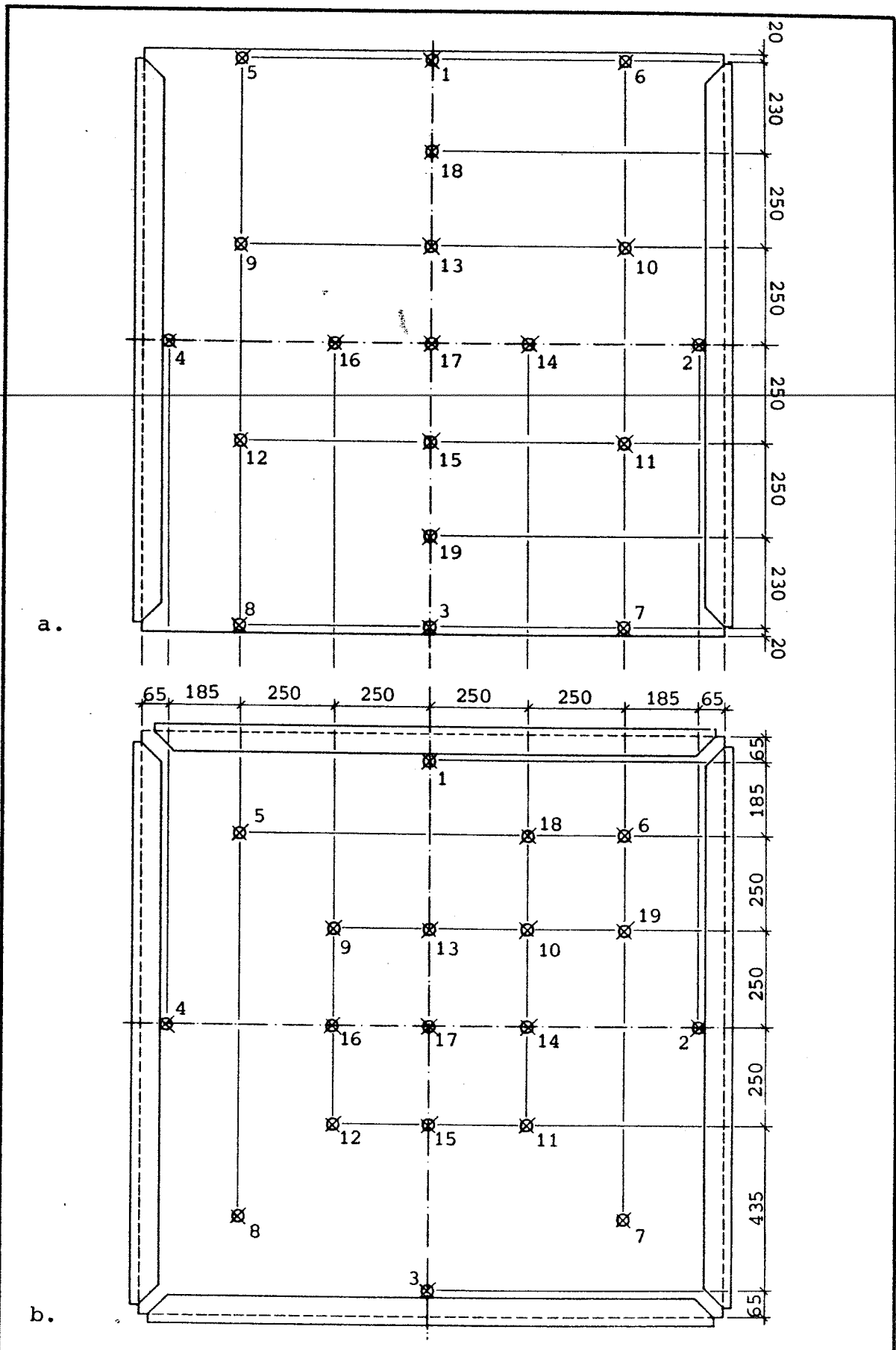
H.16

Udformning og montering af kugledelslejer og kantskinner omkring hjørne på det dobbeltbærende forsøgselement. Se i øvrigt figur H.15.

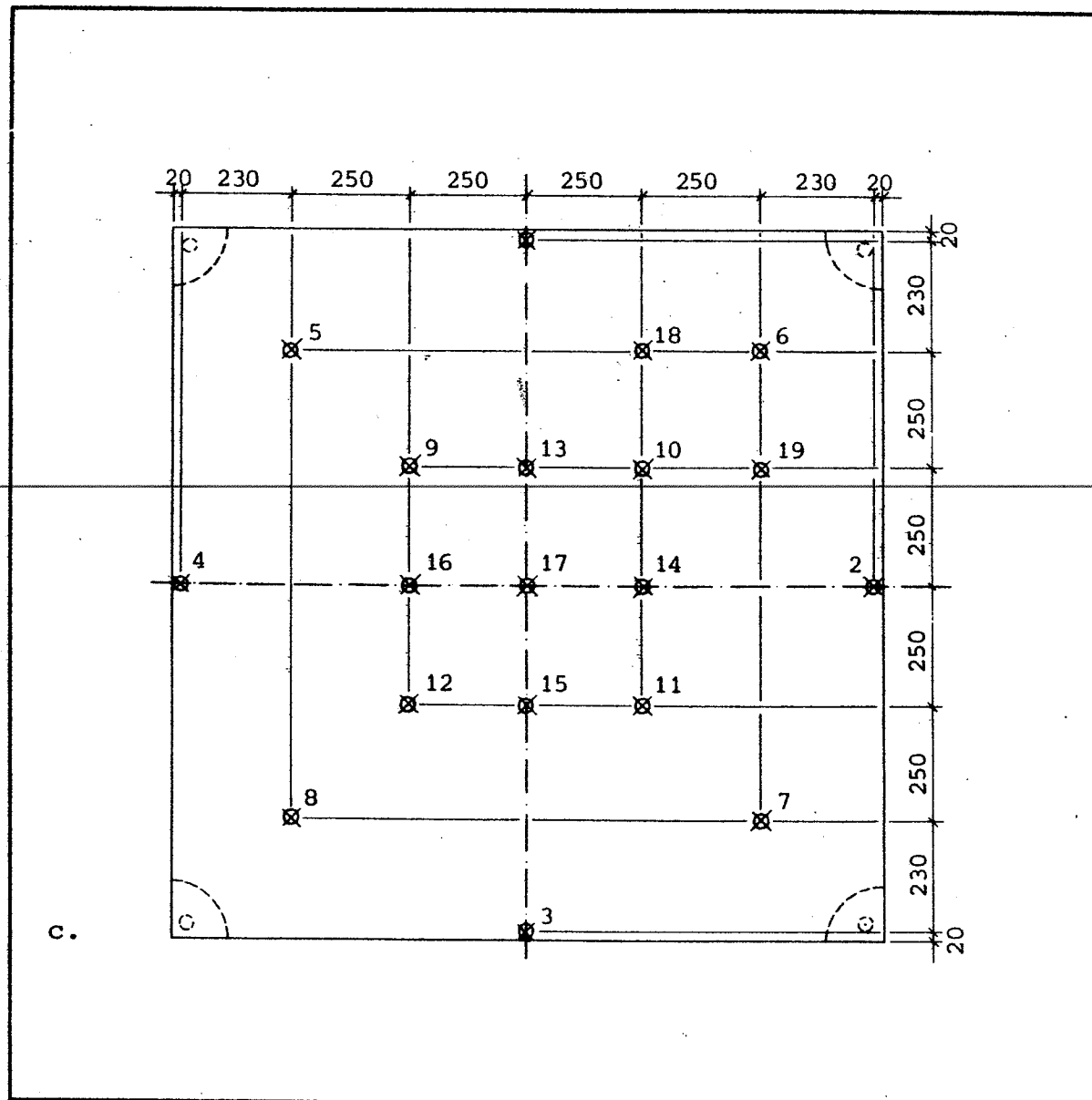


H.17

Udformning og montering af kugledelsleje og hjørnebeslag på det hjørneunderstøttede isostattilnærmede stressed-skin-forsøgselement. Kugledelsleje er løst påsat et rundjernstykke ( $\varnothing 25$ ,  $l = 16$  mm), der på sin side er hæftesvejst til et fladjern ( $t = 20$  mm) udskåret som en kvartcirkel ( $r = 120$  mm).



fortsat

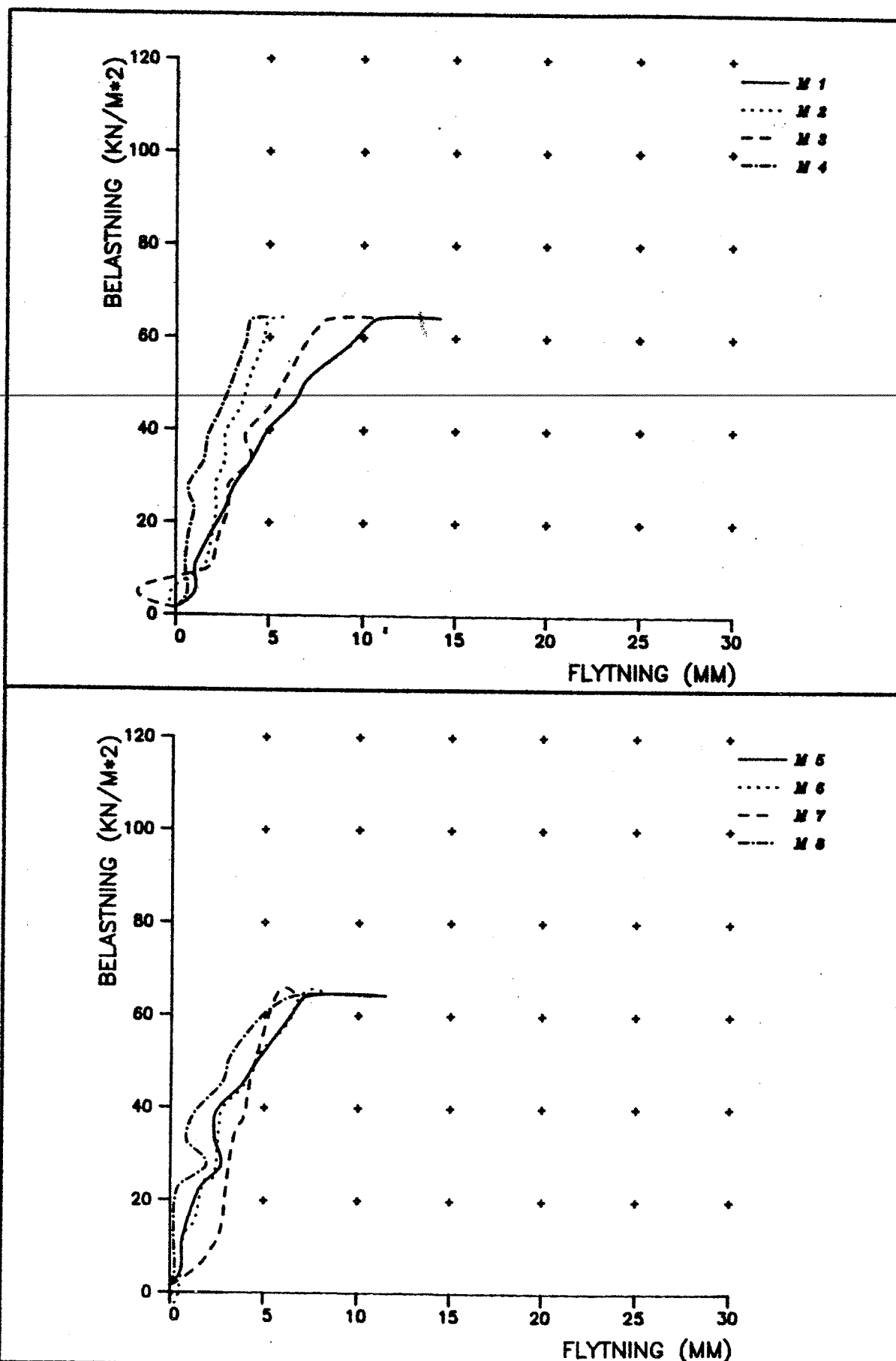


H.18

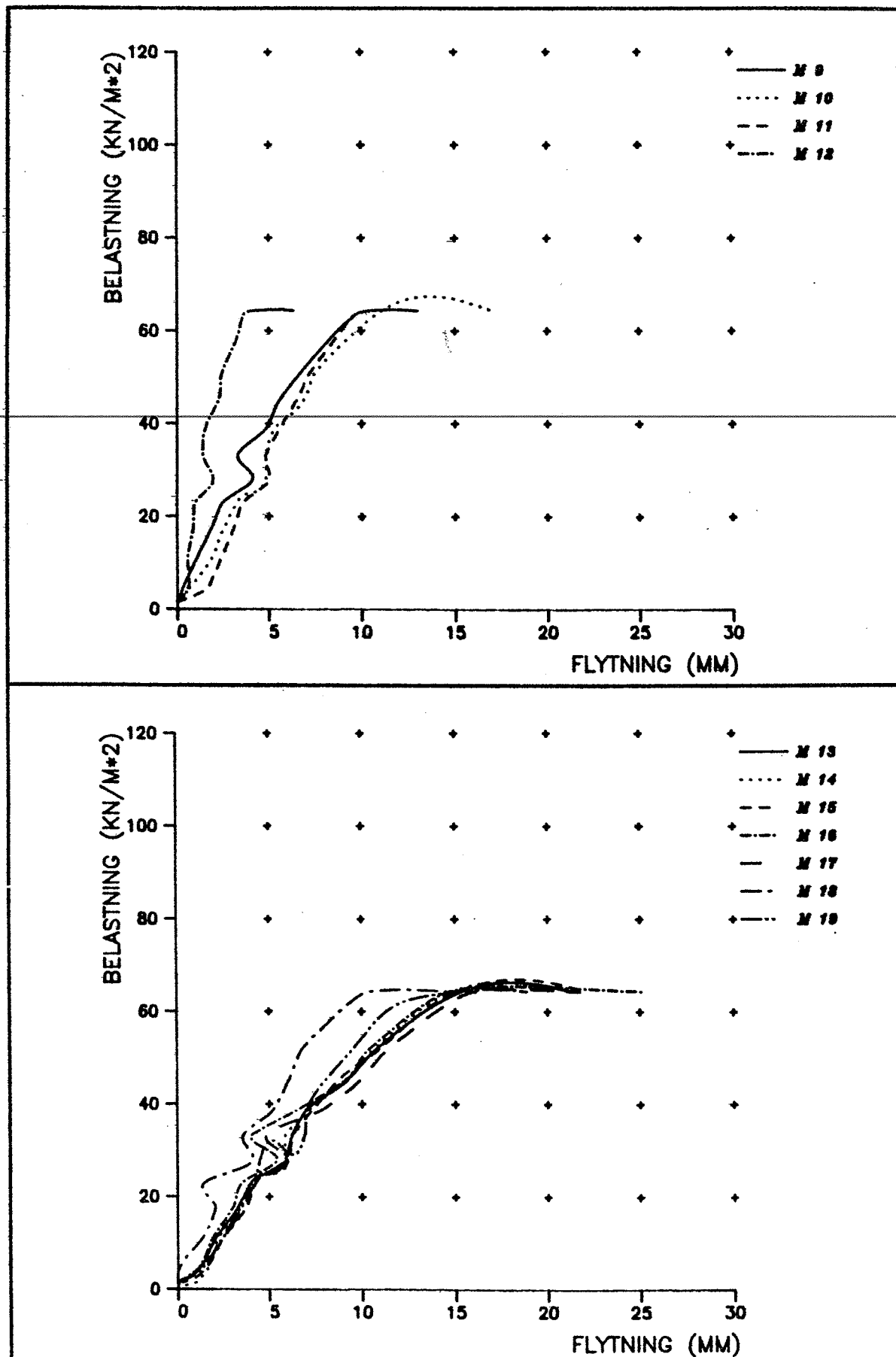
Flytningsmålerplacering (transducere) og -nummerering på

- a. enkeltspændt, kantunderstøttet element.
- b. dobbeltspændt, kantunderstøttet element.
- c. isostattilnærmet, hjørneunderstøttet element.

Nummereringen er gennemgående i figurerne H.19-H.24.

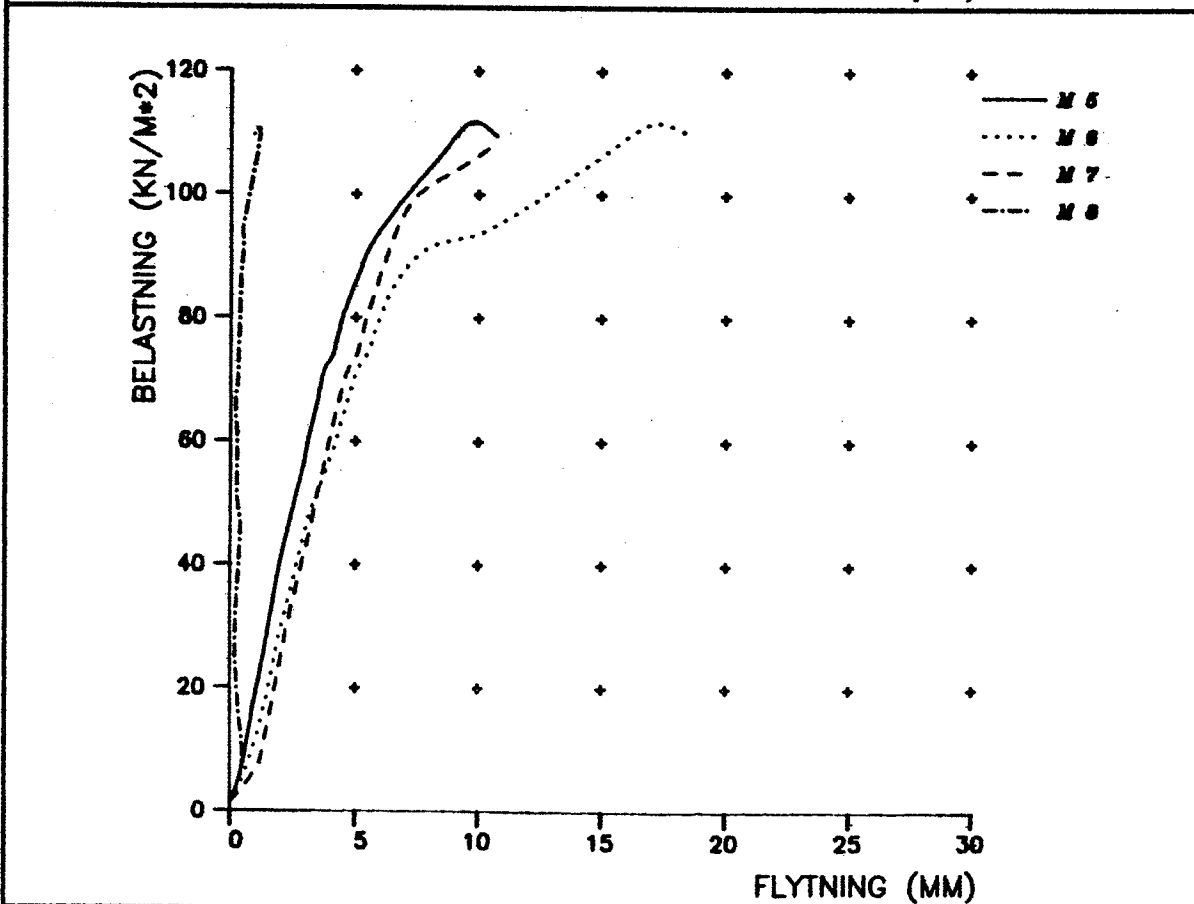
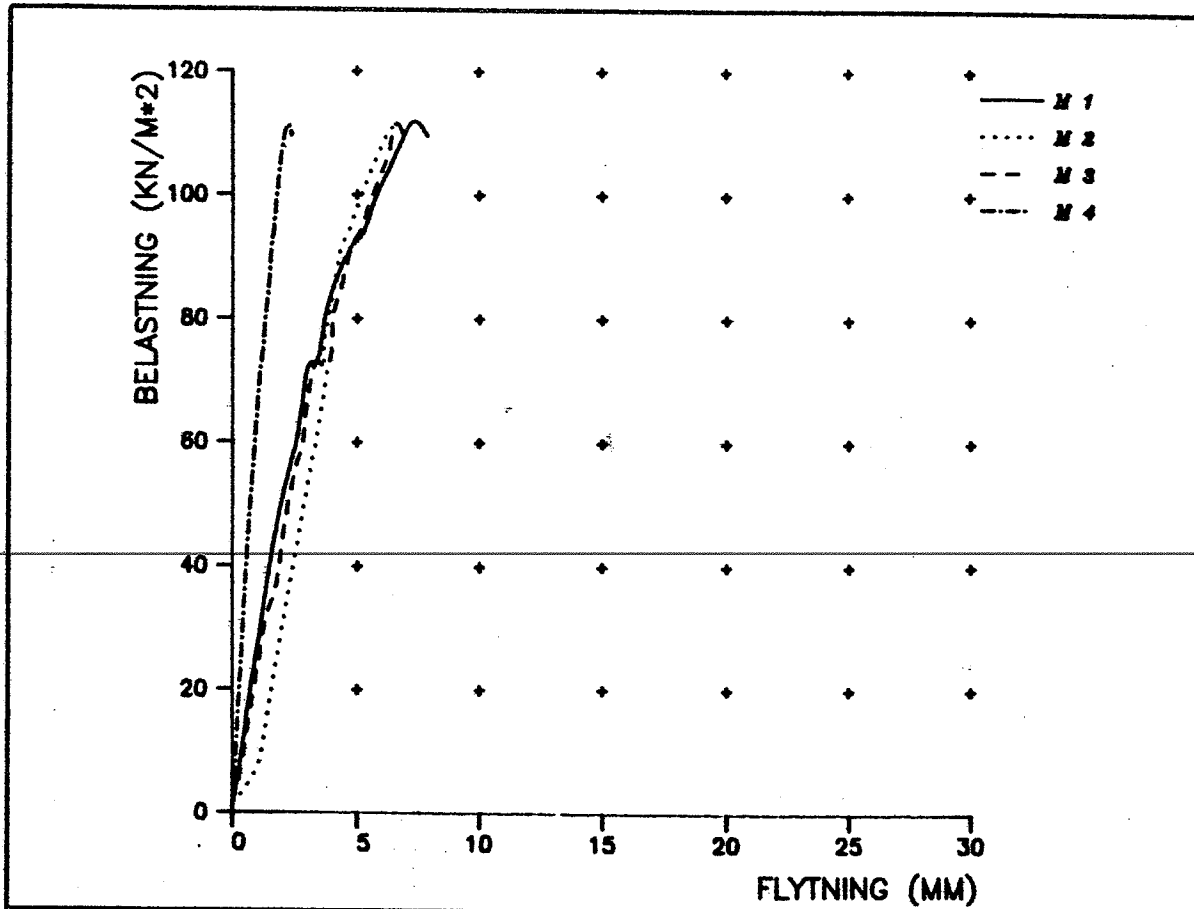


fortsat

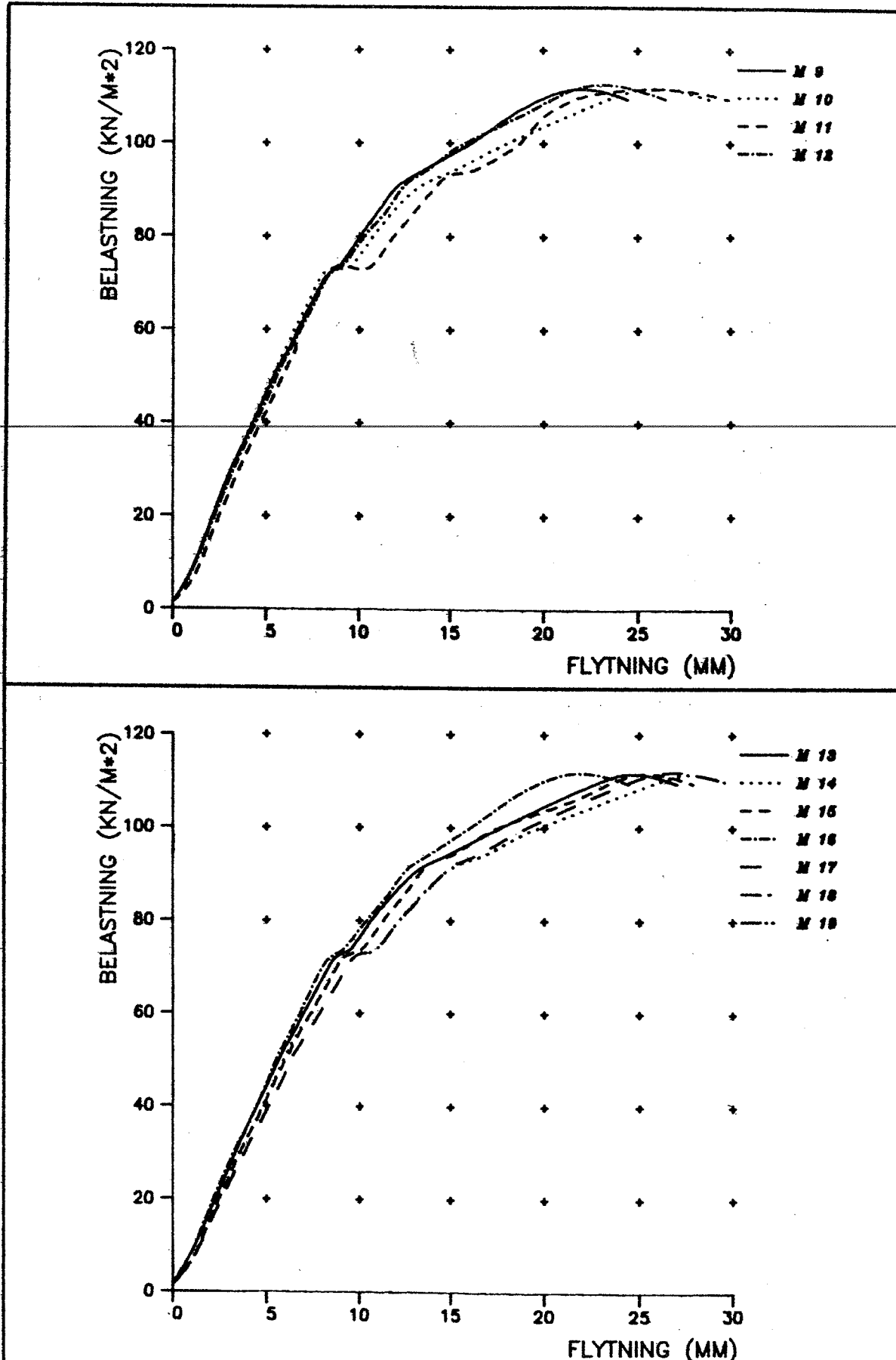


H.19

Arbejdskurver for enkeltbærende, kantunderstøttet stressed-skin-element bestemt ved forsøg. Numrene M1-M19 refererer til flytningsmålnumre, som disse fremgår af figur H.18.a.

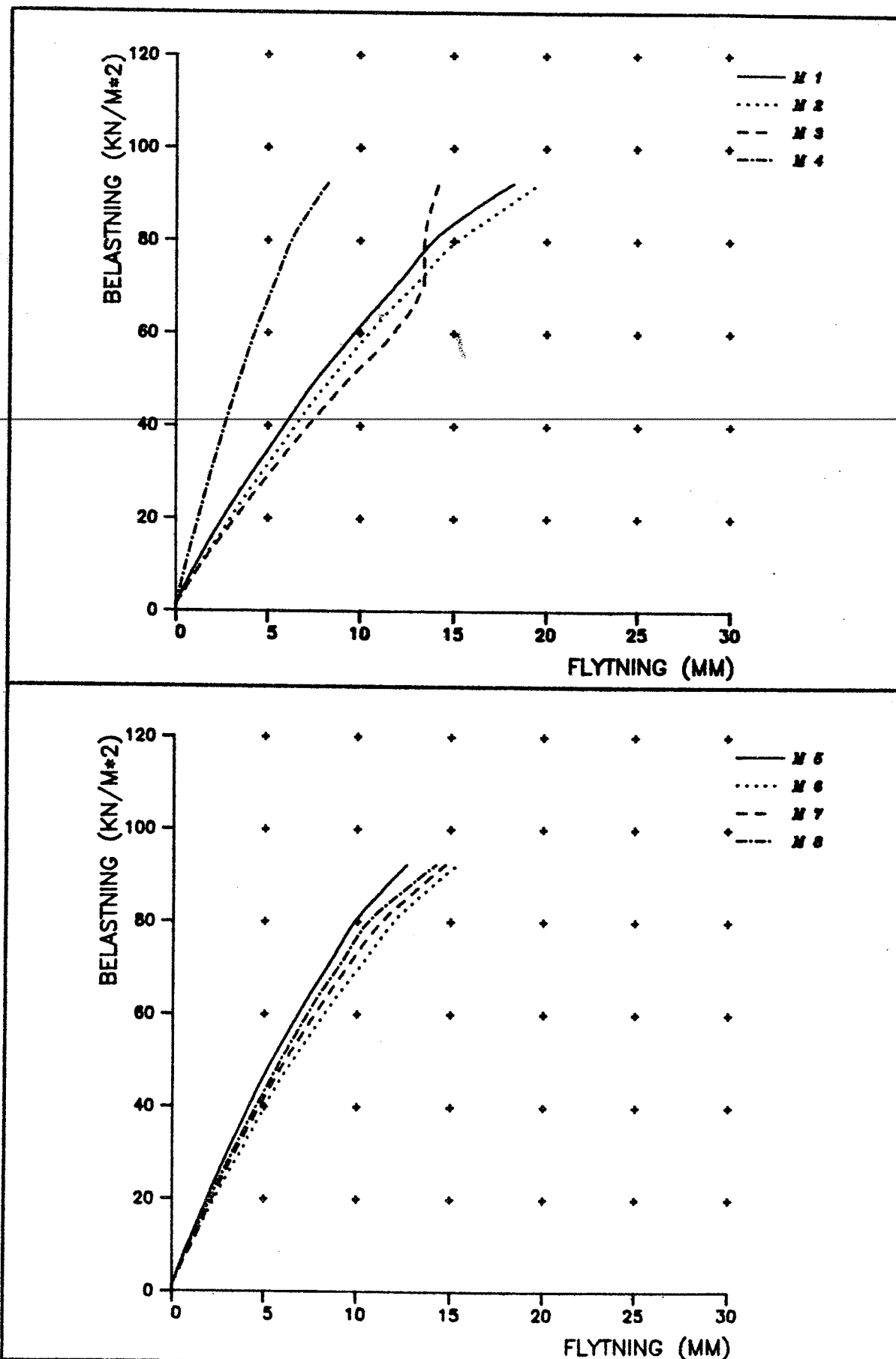


fortsat

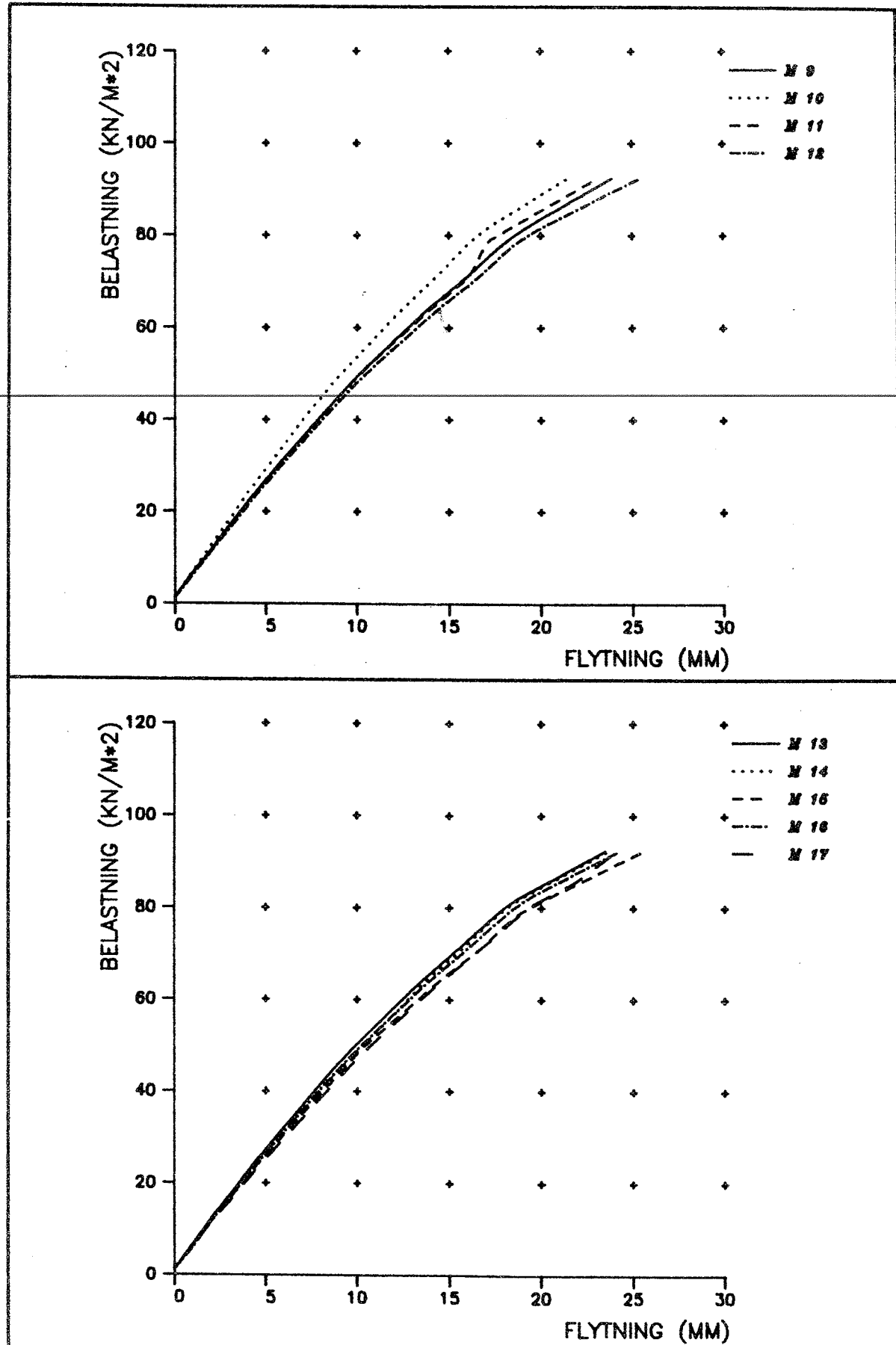


H.20

Arbejdskurver for dobbeltbærende, kantunderstøttet stressed-skin-element bestemt ved forsøg. Numrene M1-M19 refererer til flytningsmålenumre, som disse fremgår af figur H.18.b.

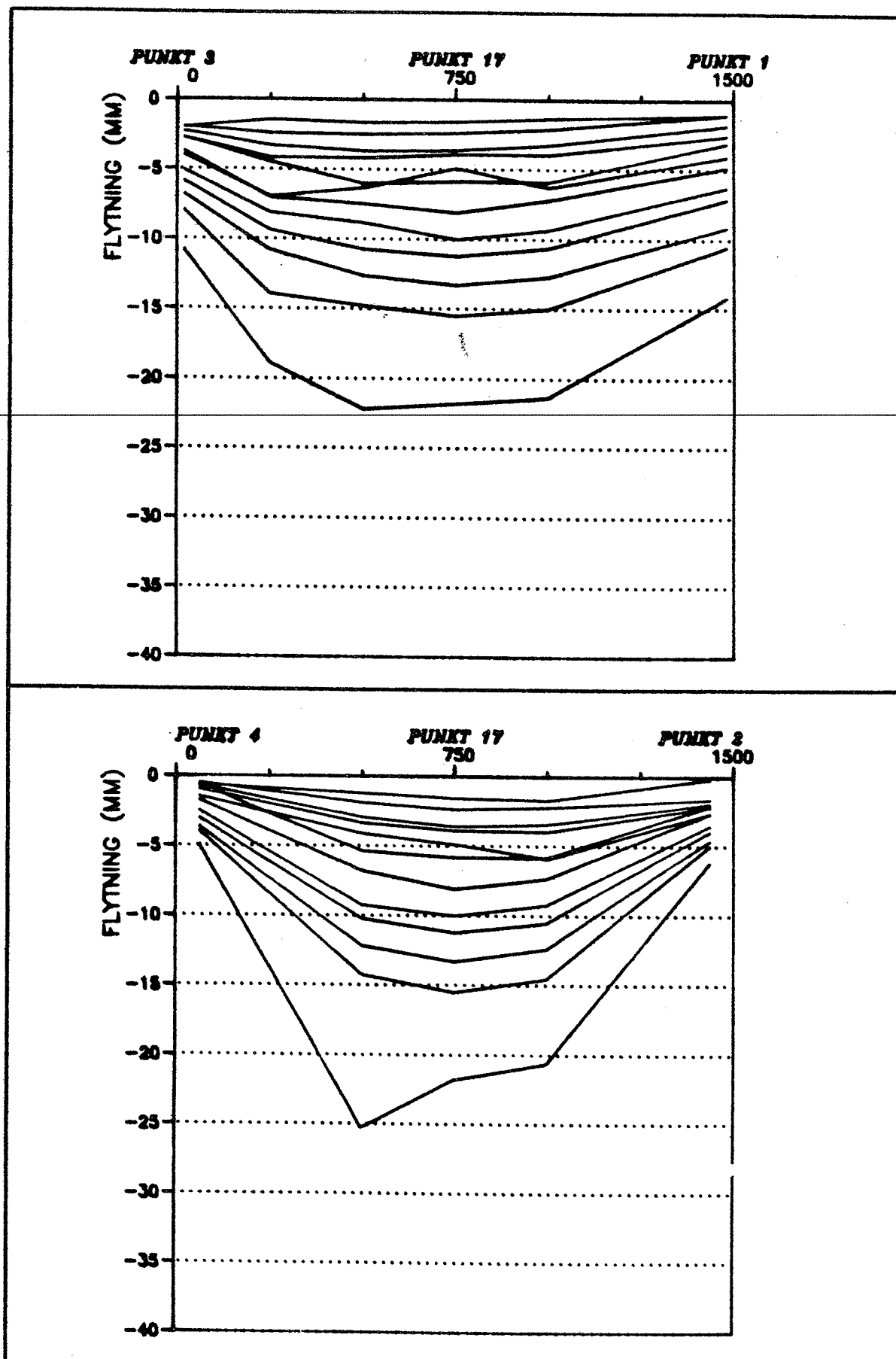


fortsat



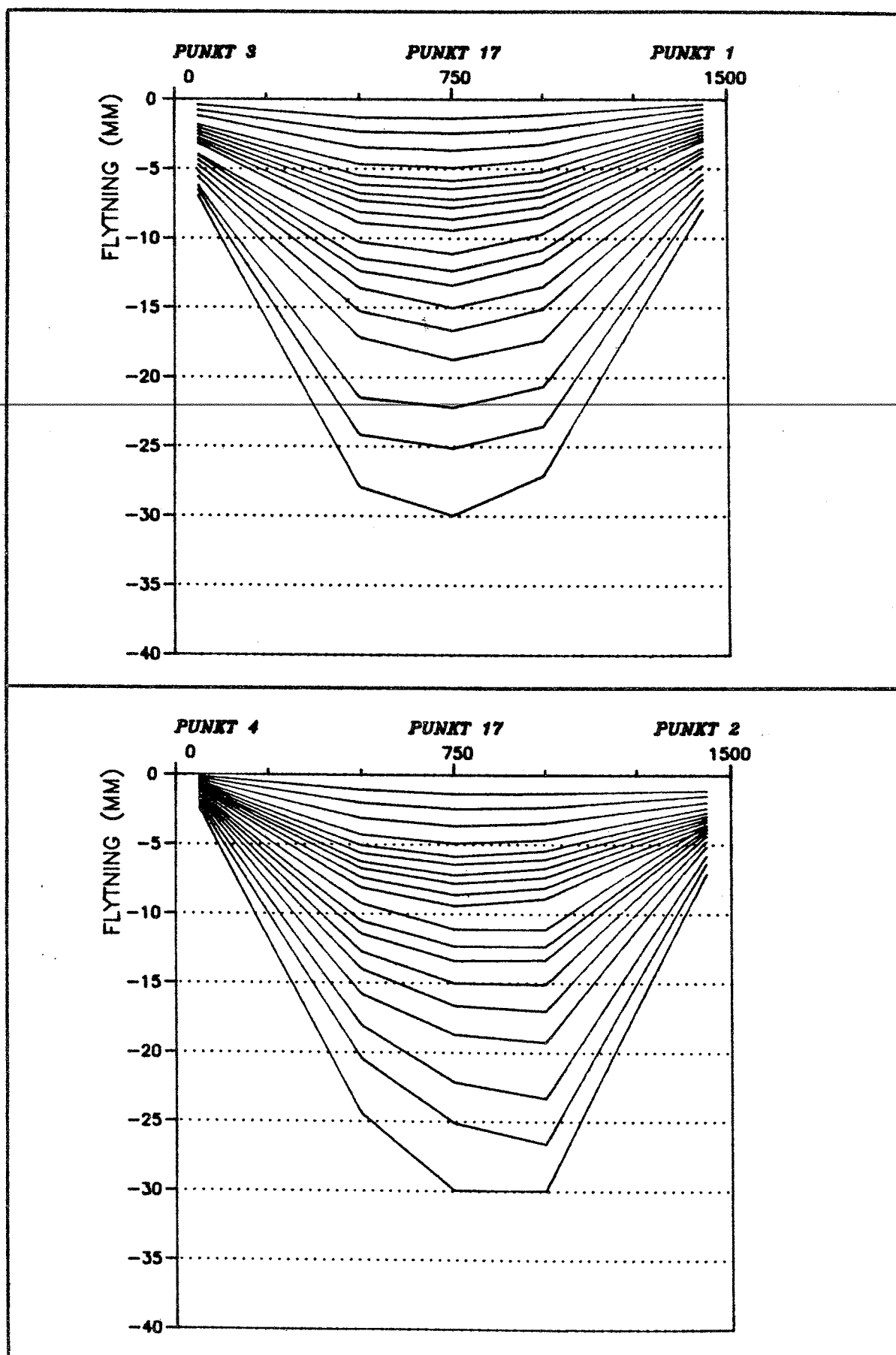
H.21

Arbejdskurver for isostat-stressed-skin-element bestemt ved forsøg. Numrene M1-M17 refererer til flytningsmålnumre, som disse fremgår af figur H.18.c.



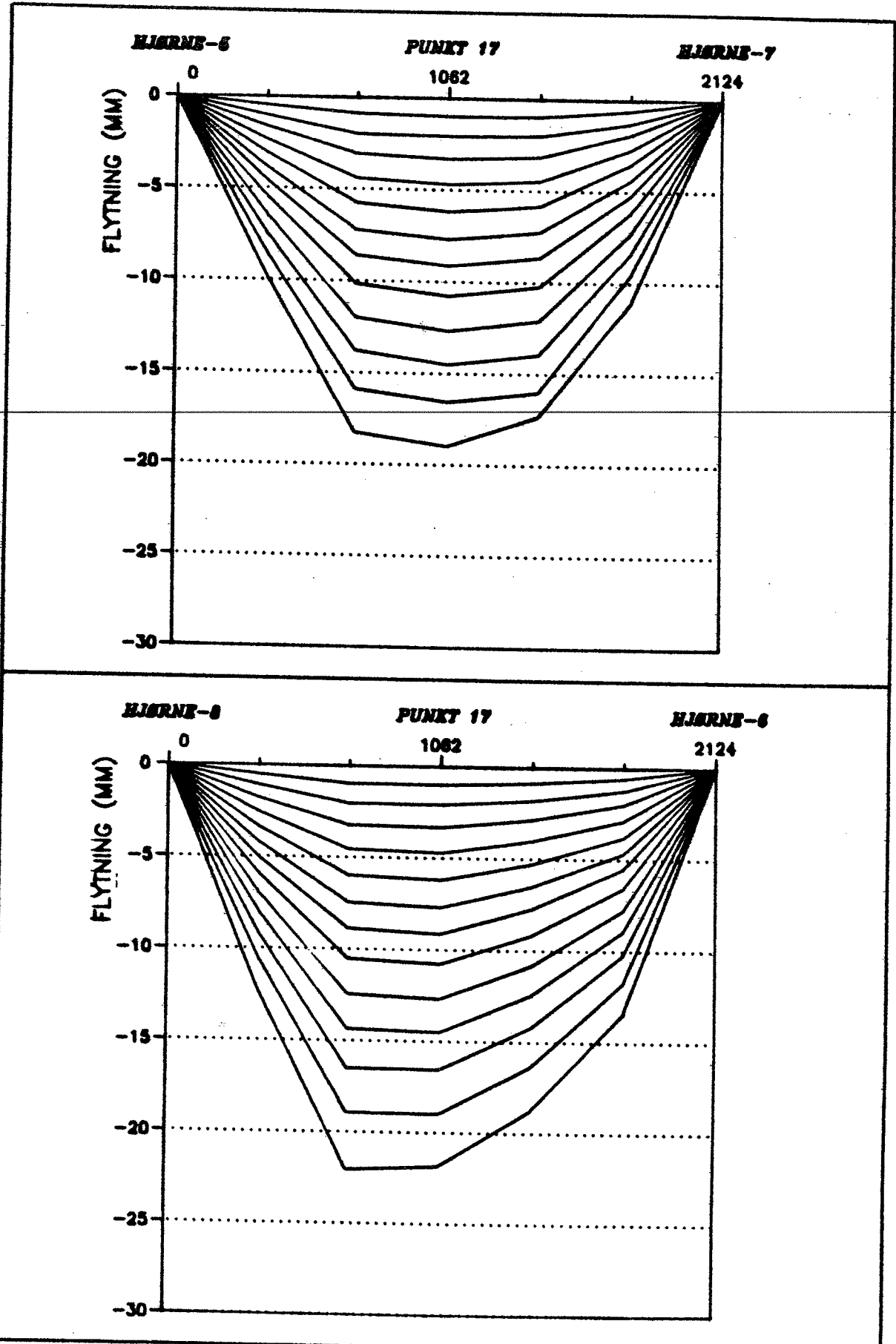
H.22

Nedbøjninger af enkeltbærende element i kantparallelle snit fra målepunkt 3 henholdsvis 4 over punkt 17 til målepunkt 1 henholdsvis 2. I brudtilstanden er nedbøjningsfiguren (b) stærkt asymmetrisk, indikerende bæreevnebestemmende brud imellem punkt 4 og 17.



H.23

Nedbøjninger af dobbeltbærende element i kantparallelle snit fra målepunkt 3 henholdsvis 4 over punkt 17 til målepunkt 1 henholdsvis 2. Inden brud er nedbøjningsfiguren (b) stærkt asymmetrisk. En væsentlig del heraf skyldes forskelle i eftergiveligheden af understøttende kantskiner ved punkt 2 og



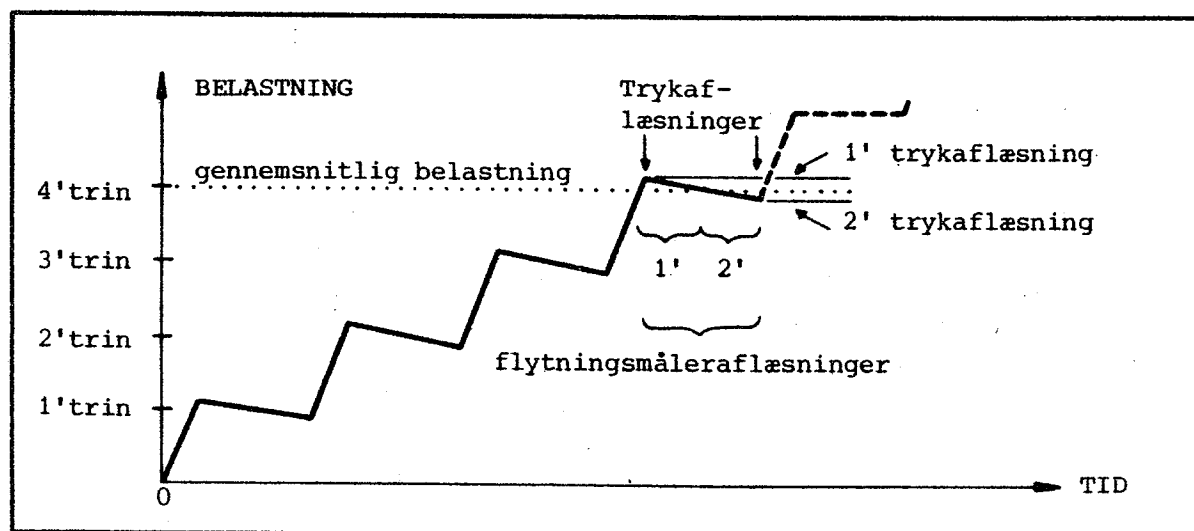
H.24

Nedbøjninger af isostattilnærmet element i diagonalsnit over målepunkterne 5-17-7 henholdsvis 8-17-6. Brud har tydeligvis udviklet sig fra et sted mellem punkt 5 og 8, hvilket ses af de asymmetriske nedbøjningsfigurer.

Følgende belastnings- og aflæsningsprocedure har været anvendt:

På hvert belastningstrin er der foretaget 2 scanninger over flytningsmålere. Efter belastningsforøgelsen er tilendebragt startes 2'nd scanning over flytningsmålere. Sådanne 2 scanninger definerer et belastningstrins tidslige længde - se figur H.25. I hver ende heraf aflæses trykmåleren. Disse aflæsninger fremgår tillige af belastningskolonner i figur H.26.

Ved optegning af figurerne H.19-H.24 er anvendt middelværdier på hvert belastningstrin for såvel belastningsniveau som flytninger, idet der for belastningsniveauernes vedkommende er fratrullet værdien på 1' trin. Dette tryk var nødvendigt for at sikre trykballonens og forsøgselementets forbliven i de ønskede positioner.



H.25

Belastnings- og aflæsningsprocedure for bæreevnepforsøg med jævnt fladebelastede stressed-skinnelementer af træ.

| Tid:min.s<br>Bel.:bar        | ENKELTBÆRENDE       |             | DOBBELTBÆRENDE      |             | HJ.UNDERST. ISOS.   |             |
|------------------------------|---------------------|-------------|---------------------|-------------|---------------------|-------------|
| TRIN                         | Tid                 | Belastning  | Tid                 | Belastning  | Tid                 | Belastning  |
| 0                            | 0                   | 0.017       | 0                   | 0.015       | 0                   | 0.013       |
| 1                            | 0.54                | 0.059-0.053 | 2.35                | 0.097-0.090 | 1.25                | 0.067-0.060 |
| 2                            | 2.21                | 0.119-0.106 | 4.35                | 0.196-0.178 | 2.50                | 0.125-0.112 |
| 3                            | 3.52                | 0.182-0.165 | 6.25                | 0.303-0.276 | 4.14                | 0.184-0.168 |
| 4                            | 5.18                | 0.235-0.215 | 8.33                | 0.406-0.370 | 5.43                | 0.252-0.231 |
| 5                            | 6.46                | 0.290-0.266 | 10.37               | 0.475-0.442 | 7.09                | 0.319-0.295 |
| 6                            | 8.24                | 0.350-0.324 | 12.14               | 0.530-0.496 | 8.36                | 0.386-0.360 |
| 7                            | 9.56                | 0.410-0.380 | 13.50               | 0.579-0.542 | 10.04               | 0.449-0.420 |
| 8                            | 11.28               | 0.473-0.441 | 15.30               | 0.618-0.578 | 11.31               | 0.517-0.486 |
| 9                            | 12.59               | 0.531-0.497 | 17.06               | 0.676-0.634 | 12.59               | 0.590-0.556 |
| 10                           | 14.30               | 0.599-0.565 | 18.40               | 0.731-0.687 | 14.26               | 0.657-0.622 |
| 11                           | 16.07               | 0.661-0.616 | 20.12               | 0.767-0.725 | 15.57               | 0.726-0.690 |
| 12                           | 17.52               | 0.670-0.617 | 21.54               | 0.830-0.770 | 17.27               | 0.806-0.751 |
| 13                           | 20.07               | 0.550-----  | 23.24               | 0.880-0.823 | 19.03               | 0.880-0.837 |
| 14                           | -                   | -           | 25.01               | 0.930-0.901 | 20.44               | 0.949-0.902 |
| 15                           | -                   | -           | 26.30               | 0.978-0.915 | 21.00               | 1.030-----  |
| 16                           | -                   | -           | 28.15               | 1.028-0.961 | -                   | -           |
| 17                           | -                   | -           | 29.59               | 1.079-1.041 | -                   | -           |
| 18                           | -                   | -           | 31.32               | 1.130-1.089 | -                   | -           |
| 19                           | -                   | -           | 33.21               | 1.152-1.040 | -                   | -           |
| 20                           | -                   | -           | 36.50               | 1.116-----  | -                   | -           |
| Relativ<br>luft-<br>fugtigh. | 51 %                |             | 42.5 %              |             | 68 %                |             |
| Tempe-<br>ratur              | 22.5 <sup>0</sup> C |             | 23.0 <sup>0</sup> C |             | 22.0 <sup>0</sup> C |             |
| Dato                         | 29.05.1985          |             | 13.05.1985          |             | 20.08.1985          |             |

Referenceliste - Appendix H

Reckmann, I (1983):

*"Tværbelastet murværk"*

Eksamensprojekt, Instituttet for Husbygning, DTH, Lyngby, 1983

Gregor, I et.al (1983):

*"Tværbelastet murværk med excentrisk normalkraft"*

Eksamensprojekt, Instituttet for Husbygning, DTH, Lyngby, 1983

## APPENDIX J

## GEOMETRISKE FORHOLD I TRÆSØJLEKONSTRUKTIONER

Søjle-/bjælkekonstruktionen i figur 6.03 betragtes: I en uendelig lang, kontinuert bjælke med konstant tværsnit, understøttet ækvidistant med faglængden  $a$  og belastet med den jævnt fordelte linielast  $p$ , optræder maksimalmomentet  $M (= \frac{1}{12} pa^2)$

$$M = f_m W_b \quad (J.01)$$

hvor  $f_m$  betegner bjælkematerialets formelle bøjningsstyrke.

I de understøttende perfekte Eulersøjler med en fri søjlelængde på  $\ell_{sin}$  optræder den centrale tryknormalkraft  $P (= ap)$ :

$$P = \pi^2 EI_s / \ell_{sin}^2 \quad (J.02)$$

hvor  $E$  betegner søjlematerialets elasticitetsmodul.

Idet indeks  $b$  og indeks  $s$  refererer til bjælken henholdsvis en søjle, kan tværsnittene karakteriseres ved formkonstaterne  $k_{Ab}$ ,  $k_{Wb}$ ,  $k_{As}$  og  $k_{Is}$ :

$$\left. \begin{aligned} A_b &= k_{Ab} d_b^2 \\ W_b &= k_{Wb} d_b^3 \\ A_s &= k_{As} d_s^2 \\ I_s &= k_{Is} d_s^4 \end{aligned} \right\} \quad (J.03.a-d)$$

hvor  $A$  er tværsnitsarealet,  $W$  og  $I$  er modstandsmomentet, henholdsvis inertimomentet om svageste bøjningsakse, medens  $d$  er en for tværsnittet fast karakteristisk tværsnitsparameter.

Det nødvendige materialeforbrug  $V_{TOT}$  pr. længdeenhed af den samlede konstruktion andrager:

$$V_{TOT} = A_b + A_s \ell/a \quad (J.04)$$

Det nødvendige modstandsmoment for bøjning i bjælker og det nødvendige inertimoment med hensyn til udknækning af søjlen findes af ligning (J.01) og ligning (J.02), som indsat i ligning (J.03) og ligning (J.04) giver

$$V_{TOT} = k_{Ab} \left( \frac{pa^2}{12 f_m k_{wb}} \right)^{2/3} + \frac{\ell^2 k_s k_{As}}{a\pi} \sqrt{\frac{ap}{k_{Is} E}} \quad (J.05)$$

hvor  $k_s$  betegner forholdet mellem den frie søjlelængde  $\ell_{sin}$  og den geometriske søjlelængde  $\ell$ .

Faglængden  $a$  kan gives en sådan værdi afhængig af de øvrige parametre, så  $V_{TOT}$  antager et minimum. Ved differentiation af ligning (J.05) med hensyn til  $a$  fås

$$\frac{d(V_{TOT})}{da} = \frac{4k_{Ab}}{3} \left( \frac{a}{144} \right)^{1/3} \left( \frac{p}{f_m k_{wb}} \right)^{2/3} - \frac{k_s k_{As} \ell^2}{2\pi a^{3/2}} \sqrt{\frac{p}{k_{Is} E}} \quad (J.06)$$

$$\frac{d(V_{TOT})}{da} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2k_{As}}{3\sqrt[3]{18}} \left( \frac{p}{f_m k_{wb}} \right)^{2/3} a^{11/6} = \frac{k_s k_{As} \ell^2}{2\pi} \sqrt{\frac{p}{k_{Is} E}} \quad (J.07)$$

$$\left( \frac{a}{\ell} \right)_{OPTIMAL} = \left( \frac{\ell}{p} \right)^{1/11} \left[ \frac{3\sqrt[3]{18}}{4\pi} k_s \left( \frac{k_{wb}}{k_{Ab}} \right)^{2/3} \left( \frac{k_{As}}{\sqrt{k_{Is}}} \right) \left( \frac{f_m^{2/3}}{\sqrt{E}} \right) \right]^{6/11} \quad (J.08)$$

Ligning (J.08) udtrykker den optimale hovedgeometri, da det op søgte nulpunkt for  $d(V_{TOT})/da$  svarer til et globalt minimum for højresiden i ligning (J.05).

Ligning (J.08) indeholder faktorer, der beskriver

- 1) - den absolutte konstruktionstørrelse ( $\ell$ )
- 2) - belastningsintensiteten ( $p$ )
- 3) - søjlernes instabilitetsfølsomhed ( $k_s$ ) - heri kunne eventuelt indarbejdes hensyn til imperfektioner
- 4) - bjælkens materialeøkonomiske egenskaber med hensyn til bøjning  $(k_{wb}/k_{Ab})^{2/3}$

- 5) - søjlernes materialeøkonomiske egenskaber med hensyn til ud-  
knækning ( $k_{As}/\sqrt{k_{Is}}$ ), og
- 6) - konstruktionsmaterialets mekaniske egenskaber ( $f_m^{2/3}/\sqrt{E}$ ).

Tænkes søjle-bjælke-systemet at udgøre en dækunderstøttende træ-  
konstruktion i en bygning med boliglignende formål kan angives  
grove intervaller for parameterverdier:

- Ad 1)  $3000 \text{ mm} \leq l \leq 5000 \text{ mm}$  (rumhøjden).
- Ad 2)  $6 \text{ N/mm} \leq p \leq 24 \text{ N/mm}$  (svarende til mellem  $1.5 \text{ kN/m}^2$  og  
 $3.0 \text{ kN/m}^2$  over spændvidder mellem 4 og 8 mellem de dæk-  
understøttende søjle-bjælke-konstruktioner).
- Ad 3)  $0.7 \leq k_s \leq 2.0$  ( $k_s = 0.7, 1.0$  eller  $2.0$  for en indspændt  
søjle, en simpel pendulsøjle og en søjle fri til vandret-  
te bevægelser i toppunktet).
- Ad 4)  $0.25 \leq (k_{wb}/k_{Ab})^{2/3} \leq 1.00$  (man får værdien  $0.25$  for en  
massiv cirkulær tværsnitsform og  $1.0$  for en rektangulært  
tværnit på højkant med kantlængdeforhold på 6).
- Ad 5)  $1.15 \leq (k_{As}/\sqrt{k_{Is}}) \leq 3.5$  (Man får værdien  $3.5$  for en mas-  
siv cirkulær tværsnitsform og  $1.15$  for et cirkulært rør  
med et forhold mellem yderdiameter og vægtykkelse på ca.  
 $20$ ).
- Ad 6)  $0.072 \leq (f_m^{2/3}/\sqrt{E}) \leq 0.100$  (Største værdier fås for de  
bedste materialekvaliteter - for det anførte interval  
kan henregnes nåletræ af styrkeklasserne L40, L30, K30,  
K24 og K18 - [Larsen, H.J. et al. (1983)] pp. 64-66).

Indsættes de betydende faktorerers intervalmuligheder - se oven-  
stående i ligning (J.08) - kan det ad numerisk vej ses, at  
 $(a/l)_{OPT}$  vil andrage værdier i et interval mellem ca.  $0.1$  og ca.  
 $1.0$ . Det normale vil imidlertid ikke være en kombination af in-  
tervallernes "modsatte" intervaller. Til en meget materialeøko-  
nomisk søjle bør høre en meget materialeøkonomisk bjælke formet  
af et materiale af høj kvalitet - og omvendt.

En materialeforbrugende søjle-bjælke-konstruktion kan på optimal

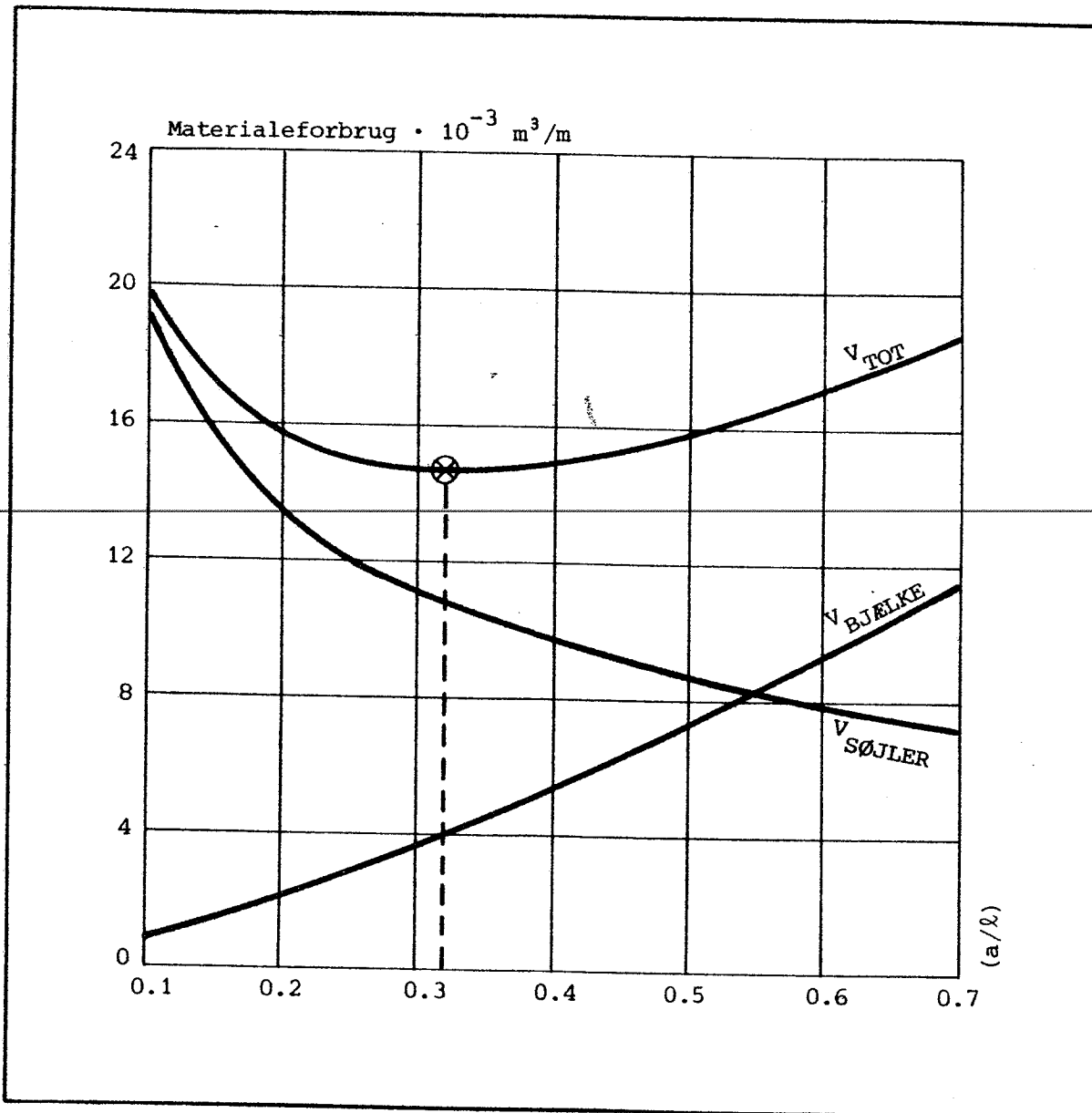
vis formes således, at

$$(a/\ell)_{\text{OPT}} = (3000/10)^{1/11} [3\sqrt[3]{18 \cdot 10 \cdot 0.25 \cdot 3.5 \cdot 0.072 / 4\pi}]^{6/11} \\ \approx 0.29.$$

For en materialeøkonomisk søjle-bjælke-konstruktion kan på optimal vis formes således, at

$$(a/\ell)_{\text{OPT}} = (3000/10)^{1/11} [3\sqrt[3]{18 \cdot 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.15 \cdot 0.1 / 4\pi}]^{6/11} \\ \approx 0.33.$$

For en konstruktion med massive, kvadratiske tværsnit overalt og belastet med  $p = 10 \text{ N/mm}$ , er det nødvendige materialeforbrugs variation med  $(a/\ell)$  optegnet i figur J.01, idet det yderligere er forudsat, at  $\ell_{\text{sin}} = \ell = 3000 \text{ mm}$  for søjlerne. Materialet er nåletræ hørende til styrkeklasse K18, for hvilket der er anvendt karakteristiske styrke- og stivhedstal [Larsen, H.J. et al. (1983)] p. 64.



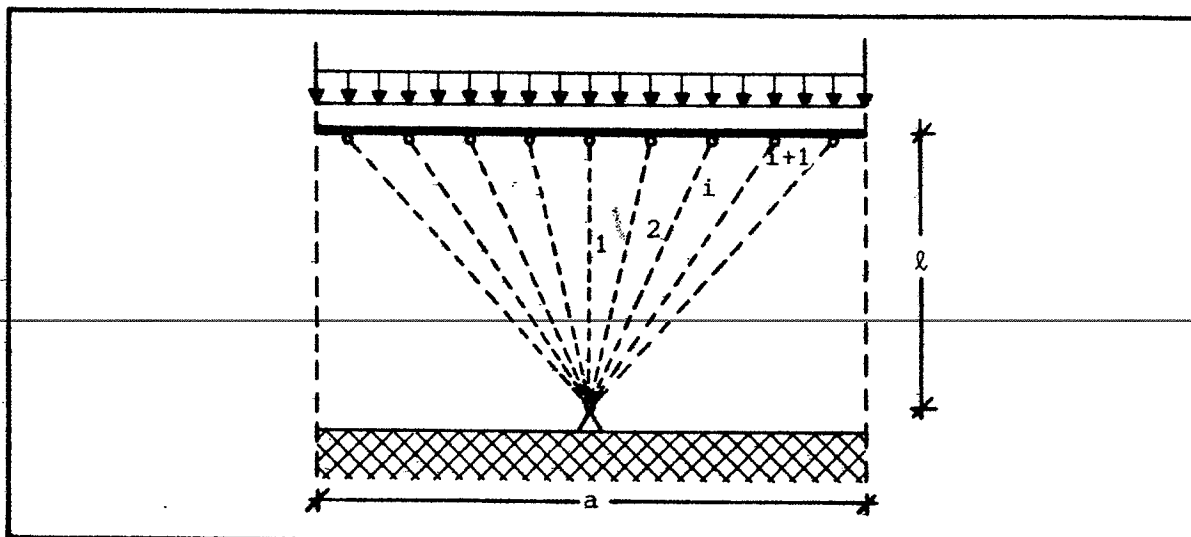
J.01

(a/l)<sub>OPTIMAL</sub> ≈ 0.32

$\ell = 3000 \text{ mm}$ ;  $f_c = 18 \text{ MPa}$ ;  $E = 9000 \text{ MPa}$ ; kvadratisk bjælke, kvadratiske søjler;  $p = 10 \text{ N/mm}^2$ ;  $\ell_{\sin} = \ell$ .



## APPENDIX K

FORHOLD I GRENEDE TRÆSØJLE-KONSTRUKTIONER UNDERSTØTTENDE KONTI-  
NUERT BJÆLKE

K.01

Der betragtes det i figur K.01 viste fag af en uendelig lang, ækvidistant søjleunderstøttet, kontinuert bjælke. For søjle-bjælke-konstruktionen anvendes følgende benævnelser:

- $m$  , antallet af søjler forløbende til samme punktfundament
- $p$  , den angribende, jævnt fordelte krafts størrelse
- $a$  , strukturens vandrette udbredelse
- $l$  , strukturens højde
- $d_b$  , bjælkens tværsnitsparameter
- $d_{si}$  , den  $i$ 'te søjles tværsnitsparameter
- $A_b, W_b$  , bjælkens tværsnitsareal og modstandsmoment
- $A_{si}, I_{si}$  , den  $i$ 'te søjles tværsnitsareal og inertimoment.

Strukturens søjler og bjælke antages lineært elastiske til brud. Materialet karakteriseres ved:

- $f_t$  , trækstyrken
- $f_c$  , trykstyrken
- $f_m$  , bøjningsstyrken
- $E$  Youngs elasticitetsmodul

Bjælke og søjler behandles særskilt:

### 1. Bjælke:

For bjælken skal gælde, idet denne tænkes kontinuert fastholdt mod udbøjninger vinkelret på strukturplanen:

$$\frac{\sum_{i=1}^m N_i}{f_t A_b} + \frac{M_{\max}}{f_m \cdot W_b} \leq 1,0 \quad (K.01)$$

Idet der som nævnt anlægges en materialeøkonomisk betragtningsmåde, konverteres ulighedstegnet til et lighedstegn, således at bjælken akkurat er i brudtilstand.

I øvrigt indføres:

$$A_b = k_{Ab} \cdot d_b^2 \quad (K.02)$$

og

$$W_b = k_{Wb} \cdot d_b^3 \quad (K.03)$$

For  $m = 1$ :  $N = 0$

$$\left. \begin{aligned} \text{For } m \text{ lige: } \sum_{i=1}^m N_i &= \frac{a^2 p}{8\ell} \\ \text{For } m \text{ ulige: } \sum_{i=1}^m N_i &= \left( \frac{m-1}{2} \right) \cdot \frac{a^2 p}{m^2 \ell} \end{aligned} \right\} \quad (K.04.a-c)$$

Det maksimale moment i bjælken fås over en søjleunderstøtning til:

$$M_{\max} = \frac{a^2 p}{12 m^2} \quad (K.05)$$

For bjælken haves altså følgende styrende ligninger:

$$m = 1: \quad \frac{a^2 p}{12 W_b} = f_m \quad (K.06.a)$$

$$\begin{aligned}
 m \text{ lige: } & \frac{a^2 p}{8 \ell f_t A_b} + \frac{a^2 p}{12 m^2 W_b f_m} = 1 \\
 m \text{ ulige: } & \left( \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} i \right) \cdot \frac{a^2 p}{m^2 \ell A_b f_t} + \frac{a^2 p}{12 m^2 f_m W_b} = 1
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} m \text{ lige: } \\ m \text{ ulige: } \end{aligned}} \right\} (K.06.b-c)$$

Dette ligningssæt omformes til:

$$\begin{aligned}
 m = 1: & \quad d_b = \sqrt[3]{\frac{a^2 p}{12 f_m \cdot k_{wb}}} \\
 m \text{ lige: } & \quad d_b = \ell k_{Ab} f_t \left( \frac{8 d_b^3}{a^2 p} - \frac{2}{f_m 3 m^2 k_{wb}} \right) \\
 m \text{ ulige: } & \quad d_b = \frac{k_{Ab} \ell f_t}{\left( \frac{m-1}{2} \right)} \left( \frac{k_{wb} d_b^3 m^2}{a^2 p} - \frac{1}{12 f_m} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} m = 1: \\ m \text{ lige: } \\ m \text{ ulige: } \end{aligned}} \right\} (K.07.a.-c)$$

$k_{wb} \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} i$

hvoraf bjælketværsnitsparameteren  $d_b$  itereres.

Bjælkens volumen, idet tværsnittet antages konstant, er da:

$$V_b = k_{Ab} \cdot d_b^2 \cdot a \quad (K.08)$$

## 2. Søjler:

Idet søjlerne understøtter bjælken med ækvidistant afstand, belastes hver søjle med en central trykkraft af størrelsen

$$p_i = \frac{ap}{m \cos \varphi_i} \quad (K.09)$$

hvor  $\varphi_i$  betegner søjleaksens vinkel med strukturens symmetrilinie. Disse søjlekræfter ækvivaleres med de respektive eulerlaste:

$$\frac{\pi^2 EI_{si}}{\ell_{\sin}^2} = \frac{ap}{m \cos \varphi_i} \quad (K.10)$$

hvor  $\ell_{\sin}$  betegner den i'te søjles frie søjlelængde, som for disse simple pendulsøjler sættes lig den geometriske søjlelængde  $\ell_{si}$ :

$$\ell_{si} \cos \varphi_i = \ell \quad (K.11)$$

D.v.s.

$$\frac{\pi^2 EI_{si}}{\ell^2} = \frac{ap}{m \cos^3 \varphi_i} \quad (K.12)$$

Idet  $A_{si} = k_{Asi} \cdot d_{si}^2$  og  $I_{si} = k_{Isi} \cdot d_{si}^4$  fås den i'te søjles volumen  $V_{si}$  til:

$$V_{si} = k_{Asi} \sqrt{\frac{a \ell^4 p}{k_{Isi} \pi^2 m E \cdot \cos^5 \varphi_i}} \quad (K.13)$$

For  $m = 1$ :

$$V_{s,TOT} = \frac{k_{Asi} \ell^2}{\pi} \sqrt{\frac{ap}{k_{Isi} E}} \quad (K.14.a)$$

For  $m$  lige kan  $\varphi_i$  udtrykkes som:

$$\varphi_1 = \arctan\left(\left(\frac{2i-1}{2m}\right)\frac{a}{\ell}\right)$$

$$\text{og idet } \cos(\arctan u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\cos \varphi_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2i-1}{2m} \cdot \frac{a}{\ell}\right)^2}}$$

For  $m$  lige fås således et udtryk til bestemmelse af det samlede søjlevolumen:

$$V_{s,TOT} = 2 \sum_{i=1}^{(m/2)} \left[ \frac{k_{Asi} \ell^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{ap}{m E k_{Isi}}} \cdot \left(1 + \left(\left(\frac{2i-1}{2m}\right)\frac{a}{\ell}\right)^2\right)^{5/4} \right] \quad (K.14.b)$$

For  $m$  ulige fås tilsvarende:

$$V_{s,TOT} = 2 \sum_{i=2}^{\left(\frac{m+1}{2}\right)} \left[ \frac{k_{Asi} \ell^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{ap}{mEk_{Isi}}} \cdot \left( 1 + \left( \frac{(i-1)}{m} \cdot \frac{a}{\ell} \right)^2 \right)^{5/4} \right] \\ + \left[ \frac{k_{As1} \ell^2}{\pi} \sqrt{\frac{ap}{k_{Is1} mE}} \right] \quad (K.14.c)$$

### 3. samlede konstruktion:

Det samlede nødvendige konstruktionsvolumen  $V_{TOT}$  udgør

$$V_{TOT} = V_b + \sum_{i=1}^m V_{si}$$

