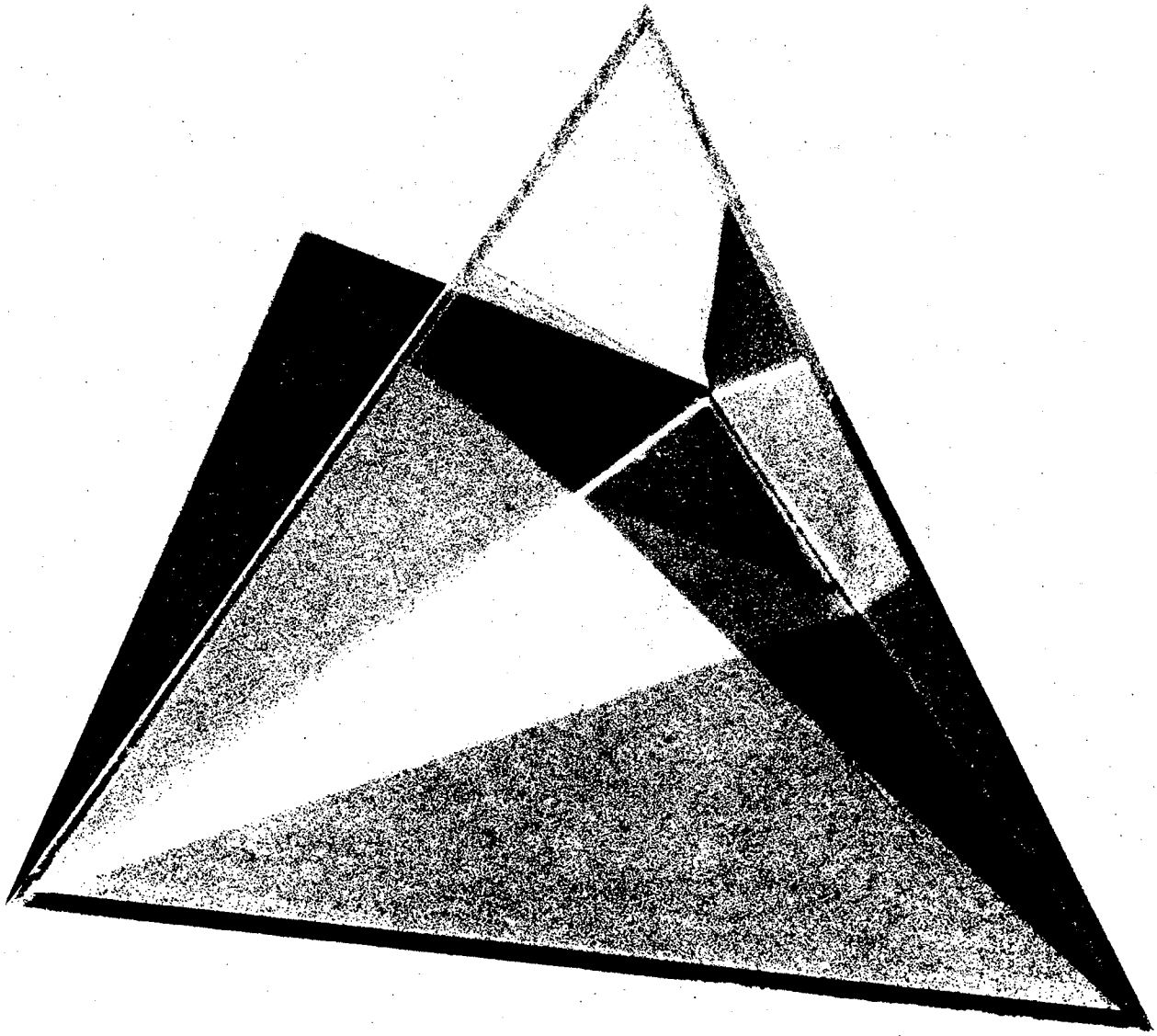
INSTITUTTET FOR HUSBYGNING

Rapport nr. **157**



FRITS GRAVESEN

FORMPRINCIPPER

Den polytekniske Læreanstalt, Danmarks tekniske Højskole

Lyngby 1981

INDHOLDSFORTEGNELSE

Forord..... 1
To-dimensionale former..... 3
Tre-dimensionale former..... 11
Formdannelse..... 92
Konstruktion og form..... 117
Litteraturhenvisninger..... 122

FORORD

Et fællestræk for bygningskunst, billedhugger- og malerkunst er de tre områders forhold til og ansvar for formbehandlingen.

De anvender alle tre formsproget direkte, så det som udtryk er tilgængeligt for brugeren eller beskueren.

Plan- og rumgeometrien er et objektivt redskab, der kan bruges ved beskrivelsen af næsten enhver form. Den har tillige gennem tiderne i større eller mindre udstrækning været en del af grundlaget for den formgivende proces.

Formgivning i kunstnerisk øjemed kan og skal imidlertid ikke gøres til en ren geometrisk opgave.

I geometrien eksisterer former kun som abstraktioner. De skal som minimum for subjektiv bearbejdning i maleri, skulptur og bygningskunst omsættes til ét eller andet materiale.

De geometriske former er menneskeskabte og appelerer derfor i modsætning til naturformer til stillingtagen.

Overfor naturens former er det meningsløst at være kritisk. Disse kan inspirere til stiliserede gengivelser og i den version kan de berettige spørgsmålene: Er resultatet godt? Kan det gøres bedre?

Efterfølgende afsnit er en beskrivelse af de simpleste plan- og rumgeometriske former, der gennem tiderne forekommer som grundlag for komposition og proportionering. De optræder sjældent eller aldrig matematisk rendyrket i maleri, skulptur eller bygningskunst. Afledninger, kombinationer eller størrelsesforhold, der refererer til de viste former forekommer derimod ofte.

En beskrivelse af de geometriske former må derfor anses for at kunne være et godt redskab i arbejdet med formgivning.

Den geometriske beskrivelse er suppleret med en summarisk gennemgang af formgivning fra forskellige perioder, samt med et kort afsnit om samspillet mellem konstruktion og form.

Arkitekter og ingeniører på instituttet for husbygning har gennem diskussioner og gennemsyn af rapporten støttet mit arbejde. I denne sammenhæng ønsker jeg især at takke Søren Koch, Kristian Hertz og Vilhelm Trier Frederiksen for inspirerende vejledning og gode råd. Jeg ønsker ligeledes at takke Mette Flagstad og Lars Arnt, der har rentegnet rapportens illustrationer og Flemming Kondrup, der med enestående omhu har udført et omfattende modelarbejde. Hanne Hindsgaul har renskrevet rapporten og Niels Hansen har forestået trykning og indbinding. Endelig ønsker jeg at takke Eigil Borchersen for hjælp ved databehandling af enkelte af de viste rumlige former og Chr. Bramsen for hjælp ved fotoarbejde.

I anonym form blev rapporten og de udførte modeller indsendt til det Neuhausenske Legats Konkurrence: "Del og Helhed", der var åben for billedhuggere, malere og arkitekter. Forslaget blev præmieret og udtaget til kunstnernes forårsudstilling på Charlottenborg, marts 1981.

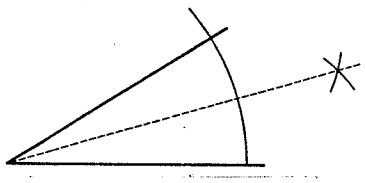
Frits Gravesen.

KONSTRUKTION AF REGULÆRE POLYGONER

Klassisske konstruktioner.

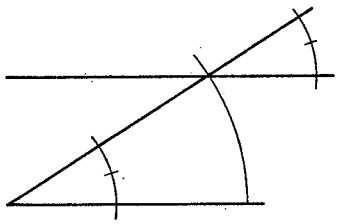
For ethvert naturligt tal n>2 findes en regulær n-kant.

Enhver af vinklerne i en regulær n-kant er $\frac{n-2}{n} \cdot 180$, d.v.s. $180 - \frac{360}{n}$. Problemet er derfor at konstruere en vinkel på $\frac{360}{n}$.



vinkelhalvering

Ved hjælp af lineal og passer kan man halvere en vinkel, d.v.s. hvis man kan konstruere en vinkel på $\frac{360}{n}$ kan man også konstruere en vinkel på $\frac{360}{2n}$ og dermed konstruere en regulær 2n-kant.

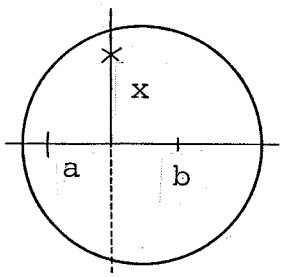


parallelforskydning

Euklid konstruerede regulære trekanter, firkanter, femkanter, sekskanter, ottekanter, tikanter, femtenkanter og mange flere.

Men han kunne ikke konstruere regulære syv- eller ni-kanter.

Reglen for hvilke regulære polygoner, der kan konstrueres ved hjælp af lineal og passer, er fremsat af den tyske matematiker C.F. Gaus (1777-1855) og eftervist af Wantzel i 1837.



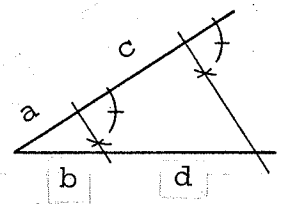
mellemproportional

$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

Gaus viste, at hvis de ulige primfaktorer i n er forskellige Fermat-primtal, så kan man konstruere en regulær n-kant, og Wantzel viste, at denne betingelse også var nødvendig.

Da 7 ikke er et Fermat-primtal, og da de ulige primfaktorer i 9 ikke er forskellige, kan man hverken konstruere en regulær 7-kant eller en regulær 9-kant.

Ved et Fermat-tal forstås ethvert helt tal af formen 1 + 2, opløftet i potensen 2^n, d.v.s. $1 + 2^{2n}$, hvor n = 0.1.2.3.... De fem første Fermat tal er 3, 5, 17, 257 og 65.537.



fjerdeproportional

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Der er en nær sammenhæng mellem cirklen og regulære polygoner. Enhver regulær polygon har såvel en indskreven som en omskreven cirkel. Disse er koncentriske og deres fælles centrum ligger i polygonens centrum.

Ved at forbinde centret med vinkelspidserne kan man opdele den regulære polygon i kongruente, ligebenede trekanter. Topvinklen i disse er $\frac{360^o}{n}$.

Formlen: $r = a \cos\left(\frac{180^o}{n}\right)$ udtrykker den indskrevne cirkels radius r ved den omskrevne cirkels radius a.

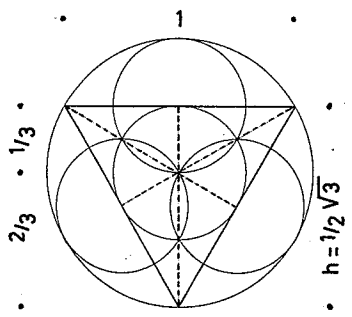
En polygonside har længden

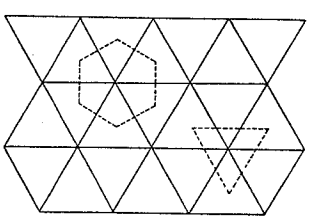
$$2\,r\,\mathrm{tg}\left(\frac{180^o}{n}\right) = 2\,a\,\sin\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

og omkredsen n gange denne størrelse.

Arealet er lig med den halve omkreds, multipliceret med r, altså

$$nr^2\,\mathrm{tg}\left(\frac{180^o}{n}\right)$$





Ligesidet trekant

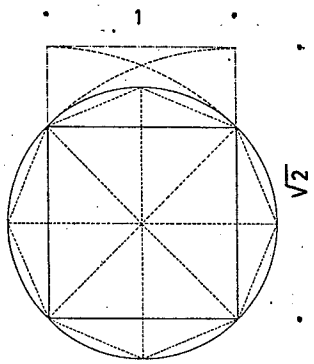
Vinklerne er 60°. Hvis siderne er 1, er højden bestemt ved Pythagoras $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$.

Trigonometrisk er $\sin 60 = \frac{h}{1} = 0{,}866$ eller $h = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,60 = 0.866$.

Vinkelhalveringslinierne skærer hinanden i centret for den ligesidede trekants omskrevne og indskrevne cirkel.

Vinkelhalveringslinierne er samtidig højder og midtnormaler og deler hinanden i forholdet 1:2.

Højdernes fodpunkter er centre for tre cirkler, der hver i ét punkt berører den omskrevne cirkel og går gennem trekantens centrum.

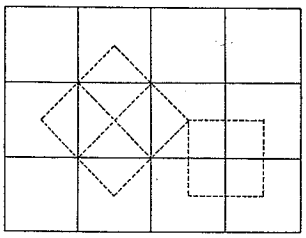


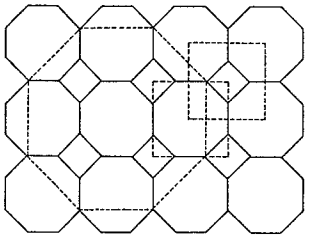
Kvadratet og ottekanten

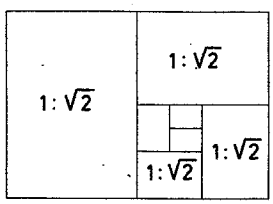
To diagonaler i en cirkel, vinkelret på hinanden, skærer cirklen i fire punkter, der er hjørner i et kvadrat.

Et supplerende diagonalpar under 45° til det første angiver ved skæring med cirklen den regulære ottekants hjørner. Vinklerne i ottekanten er 135°.

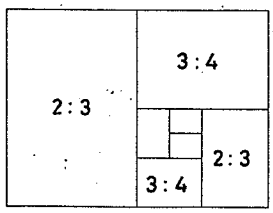
Sættes siderne i kvadratet til 1, er diagonalerne $\sqrt{2} = 1.414$.



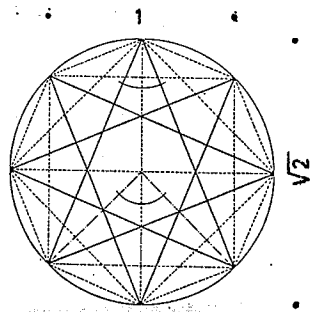




Forholdet $1:\sqrt{2}$, der er anvendt på standardbrevpapirformaterne A_1 - A_{12}, har den egenskab, at formatet foldet over den korte akse, reproducerer et nyt format i samme forhold mellem bredde og højde.



Til sammenligning er folioformaterne skiftevis i forholdet 3:4 og 2:3, afhængig af, om det er enkelt eller dobbelt ark.

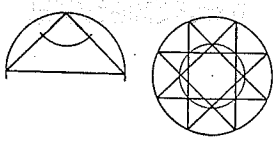


Ottestjernen

Forbindes hver tredie hjørne i en ottekant fremkommer ottestjernen. Hver spids i stjernen spænder over en vinkel på 45° - pereferivinklen.

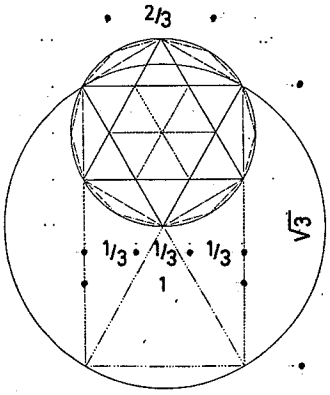
Ved skæring med den omskrevne cirkel dannes en ligebenet trekant som i forbindelse med målforhold i gotisk byggeri betegnes ottestjerne-trekanten.

Centervinklen i ottestjernen er 90°.



Sekskanten

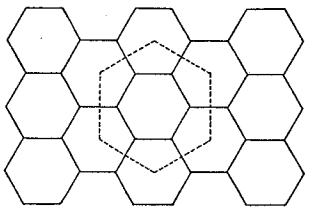
Længden af en regulær sekskants sider er lig den omskrevne cirkels radius. Forbindelseslinierne mellem modstående vinkelspidser går gennem sekskantens centrum og deler den i seks kongruente ligesidede trekanter.



Hexagrammet

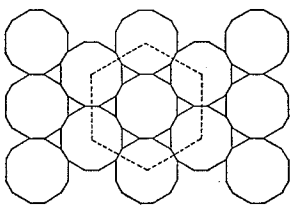
Forbinder man hver anden af sekskantens vinkelspidser, fremkommer to kongruente ligesidede trekanter, det såkaldte hexagram, seksstjernen eller Davidstjernen.

Forlænger man benene i en af trekanterne ud over en vinkelspids og med vinkelspidsen som centrum og tegner en cirkel, fremkommer en ny trekant, kongruent med den første.



Når de to trekanters frie vinkelspidser forbindes, fremkommer et rektangel, hvis bredde og længde forholder sig til hinanden som 1: $\sqrt{3}$. Konstruktionen har i ældre tid været brugt til afsætning af rette vinkler på byggepladsen på tilsvarende måde som de pythagoræiske tal 3, 4 og 5 endnu bruges på byggepladser i forbindelse med afsætning af rette vinkler (murhjørner, retning på tagplader etc.).

Tolvkanten

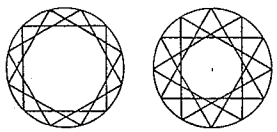


Tolvkanten kan konstrueres ved halvering af sekskantens sider. Andre konstruktionsmåder, der har været anvendt i praksis er:

1) Indskrivning af 4 ligesidede trekanter i en cirkel

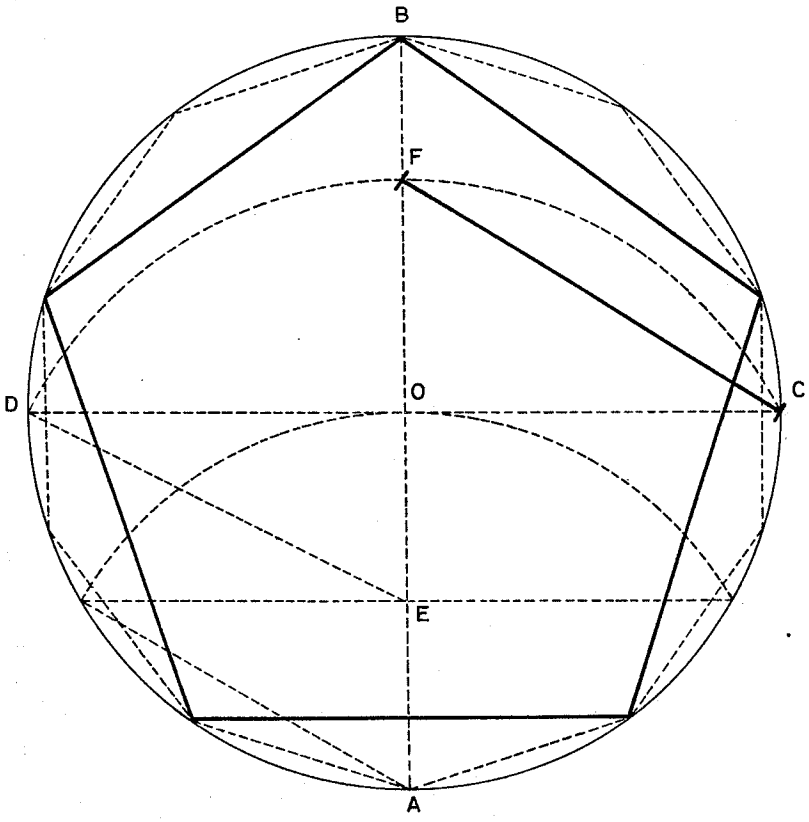
2) Indskrivning af 3 kvadrater i en cirkel

I begge tilfælde betjener man sig kun af 30^{o} og 60^{o}-vinkler ved drejning af de indskrevne figurer.



Det vil sige, at konstruktionen nemt har kunnet anvendes på værksted og byggeplads.

Vinklerne i tolvkanten er 150^{o}.



Femkanten

Kantlængden i en regulær femkant, indskrevet i en given cirkel, findes således:

O er cirklens centrum. AB og CD er to på hinanden vinkelrette diametre. Radius AO halveres. Med halveringspunktet E som centrum tegnes en cirkelbue med EC som radius. Buen skærer OB i F. FC er den søgte kant i femkanten. FO er kant i den regulære tikant, der kan indskrives i samme cirkel. F deler OB i det gyldne snits forhold.

Et liniestykke er delt i det gyldne snits forhold, når det er delt i to ulige lange dele, således at den mindste del forholder sig til den større, ligesom den store del forholder sig til hele stykket.

Kaldes liniestykkerne for henholdsvis a og b, skal a altså forholde sig til b ligesom b til a + b.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a + b}$$

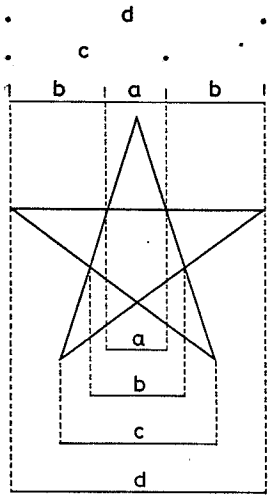
b er med andre ord mellemproportional til a og hele liniestykket.

Sættes b til 1, er $a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} \div 1\right) = 0.618...$

Sættes a til 1, er $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) = 1.618...$

Det gyldne snits ligning er altså:

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



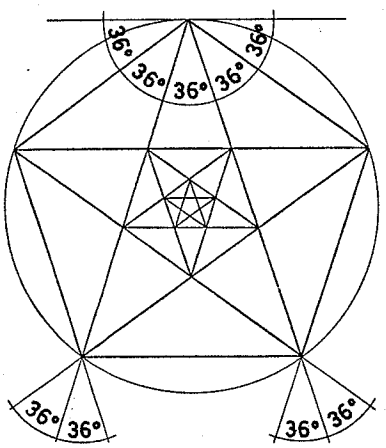
d : c = c : b = b : a = 1 : 0,618

Det gyldne snits forhold kan konstrueres, men ikke angives med rationelle tal. Det er derimod muligt at opstille talrækker, hvis forhold nærmer sig det gyldne snit, f.eks. 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123.....

Ethvert led dannes ved sammenlægning af de to nærmest foregående. Jo højere man kommer i talrækken, jo mere nærmer man sig det præcise udtryk for det gyldne snits forhold. Dette gør sig også gældende i Fibonaccis talfølge: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.....

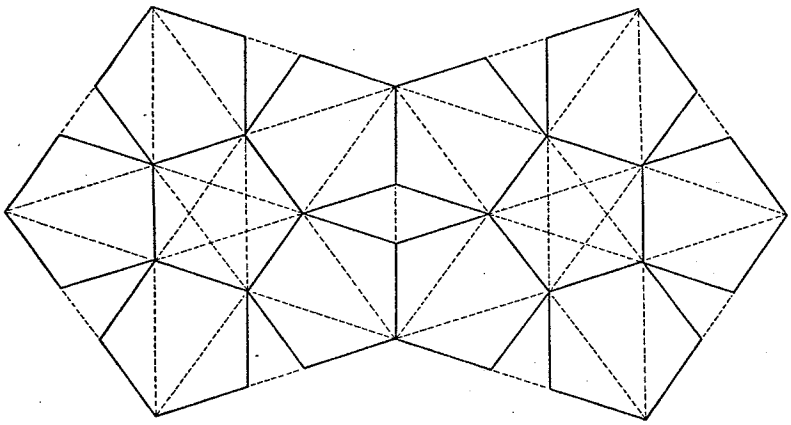
Talrækken, der har mange usædvanlige egenskaber, har fået navn efter Leonardo Fibonacci - eller Leonardo af Pisa - en fremtrædende matematiker fra det trettende århundrede.

Han øvede stor indflydelse ved Europas omstilling fra det romerske til det hinduarabiske titalsystem.



Femstjernen eller pentagrammet

Forbindes hvert hjørne med de to modstående hjørner i en regulær femkant, dannes femstjernen. Der kan tillige iagttages 5 ligebenede trekanter, hvis topvinkel er 36° og to øvrige vinkler er 72°.

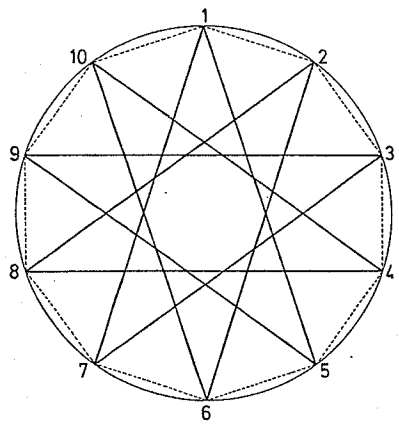


Femstjernen, indskrevet i en given regulær femkant, danner i sin midte en mindre regulær femkant.

Skæringspunkterne mellem den oprindelige femkant og forlængelsen af den mindre femkants indskrevne femstjerne er hjørner i fem nye femkanter, som er ligedannede med den "mindre" femkant.

De ialt 6 mindre femkanter danner 1/2 dodekaeder udfoldet.

Tikanten og tistjernen

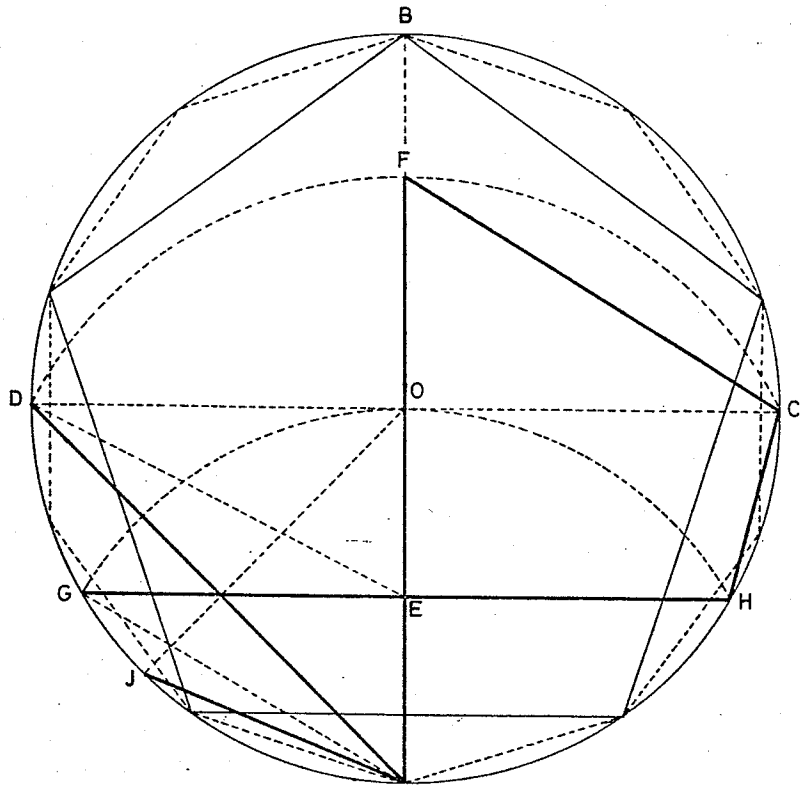


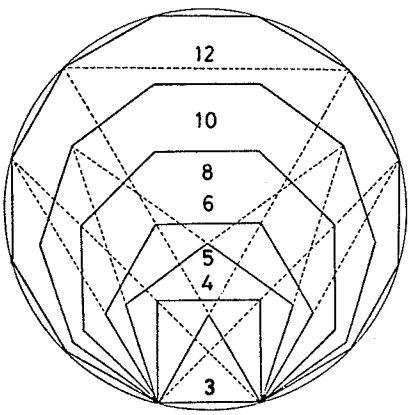
Ved konstruktionen af den regulære femkant, indskrevet i en given cirkel, blev cirklens radius delt i det gyldne snits forhold.

Det længste af stykkerne er kanten i den regulære ti-kant, indskrevet i samme cirkel.

Tikantens vinkler er $180\frac{10 \cdot 2}{10} = 144^{\circ}$.

Benævnes hjørnerne i den regulære ti-kant med fortløbende numre fra 1-10, fremkommer tistjernen ved at forbinde hjørne nr. 1 med hjørnerne 5 og 7, hjørne nr. 2 med 6 og 8, hjørne nr. 3 med 7 og 9 o.s.v.

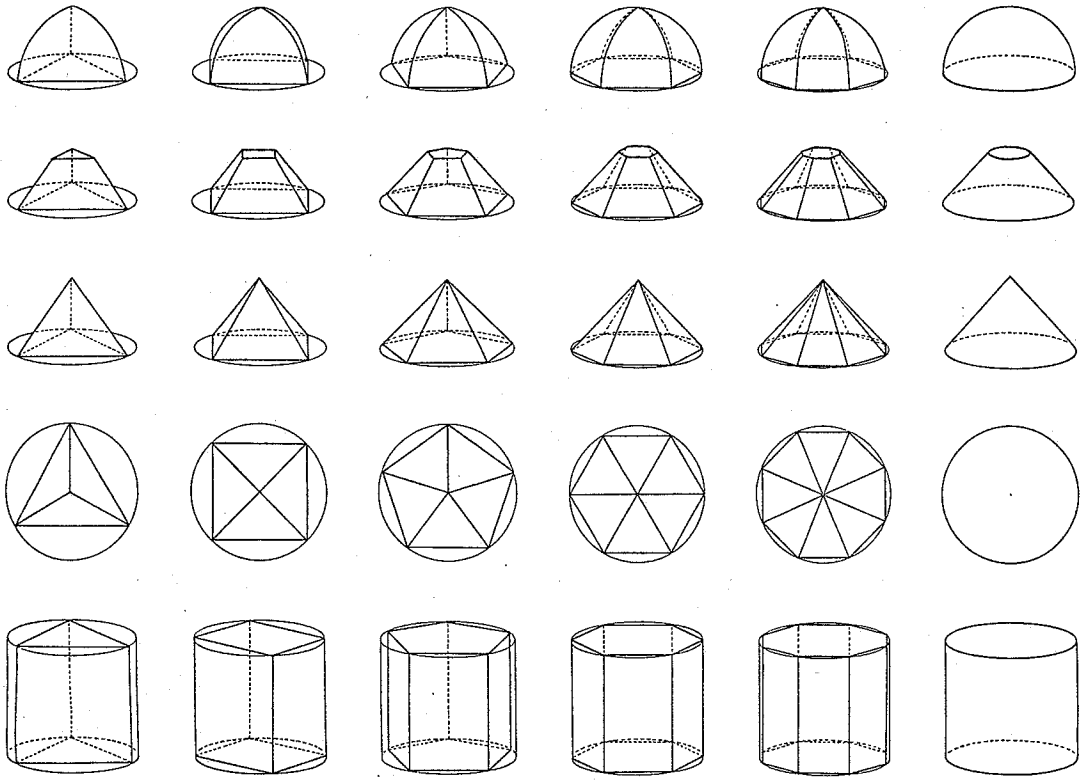


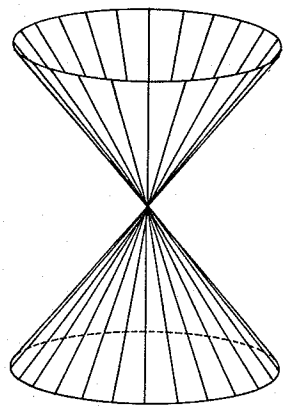


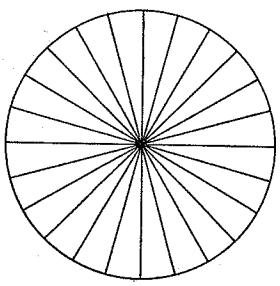
Konstruktionen af den regulære femkant, indskrevet i en given cirkel, indeholder samtidig en række andre liniestykker, der angiver kanter på andre regulære polygoner, indskrevet i samme cirkel.

GH, der er E's projektion på cirklen, er kant i den ligesidede trekant. AD er kant i kvadratet. FC er kant i den regulære femkant. OA er kant i den regulære sekskant. AJ er kant i den regulære ottekant. J er skæringspunktet mellem cirklen og OI's forlængelse. I er skæringspunktet mellem AD og GH. FO er kant i den regulære tikant. CH er kant i den regulære tolvkant.

Rumlige former







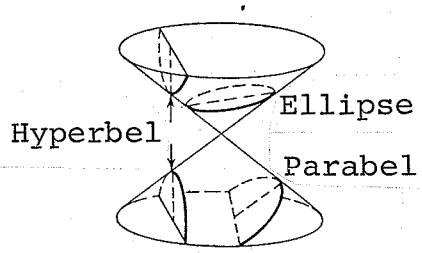
Til de to-dimensionale figurer svarer en række tredimensionale. Af fire trekanter kan der dannes et tetraeder, som er regulær, hvis alle fire trekanter er ligesidede.

Samtlige regulære polygoner kan danne grundflade i pyramider, som er regulære, hvis siderne er ligebende.

Hvis siderne i pyramiden skal være ligesidede trekanter og grundfladen en regulær polygon, er mulighederne begrænset til tre, nemlig den tresidede, firesidede og femsidede pyramide, hvoraf den første i sig selv er et regulært polyeder, og de to andre er dele af regulære polyedre.

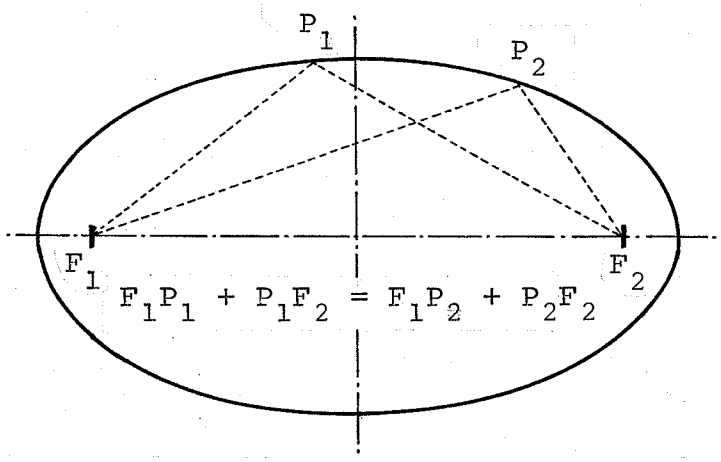
Den firesidede pyramide er halvdelen af et oktaeder, og den femsidede pyramide en del af ikosaederet.

Når antallet af den regulære grundflades kanter går mod uendelig - bliver til en cirkel - er tilsvarende "pyramide", en kegle.

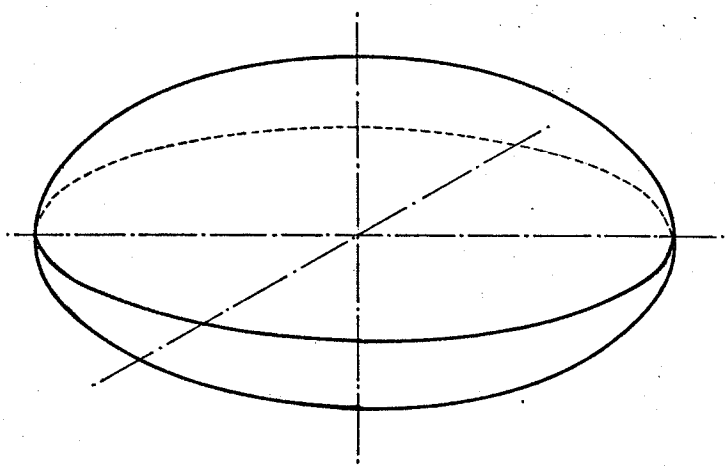


Der findes tre interessante keglesnit: ellipsen, parablen og hyperblen.

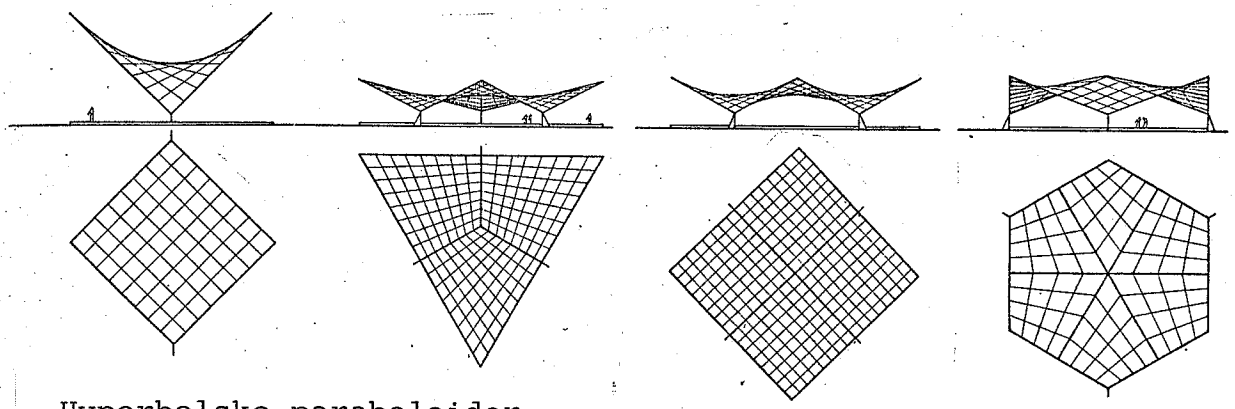
Ellipsen er en lukket kurve uden dobbeltpunkter og med to brændpunkter. Parablen er en uendelig kurve med ét brændpunkt. Hyperblen har to adskilte grene og to brændpunkter.



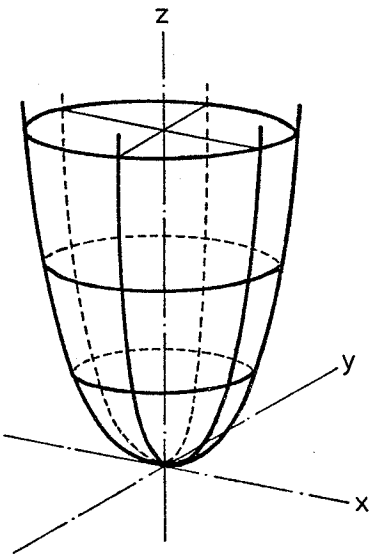
Summen af afstandene fra ethvert punkt på ellipsen til brændpunkterne F_1 og F_2 er konstant.



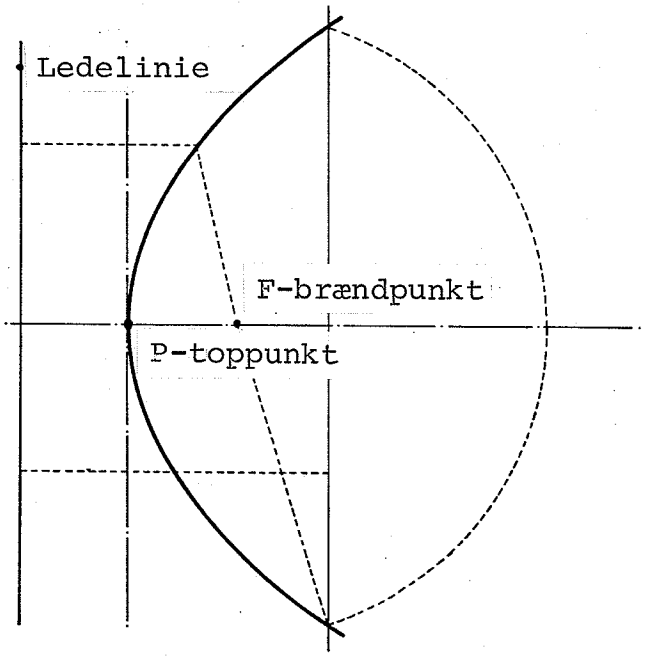
Drejer man en ellipse i rummet om én af dens akser, fremkommer en omdrejningsellipsoide. Drejes ellipsen om sin storakse, bliver ellipsoiden langstrakt (cigarformet), mens den bliver fladtrykt, dersom ellipsen drejer om lilleaksen.



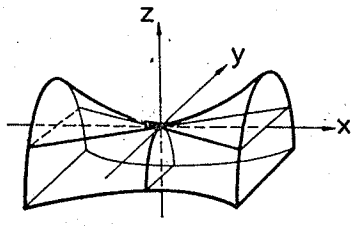
Hyperbolske paraboloider



Elliptisk paraboloide



Parabel

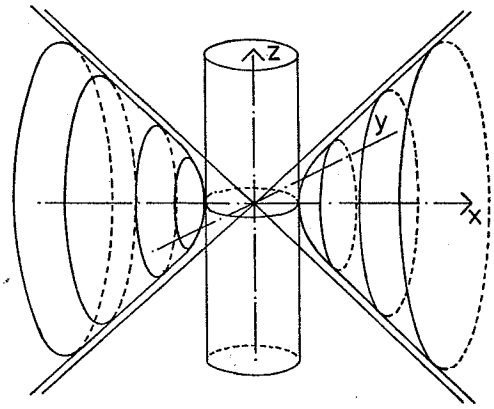


Hyperbolsk paraboloide

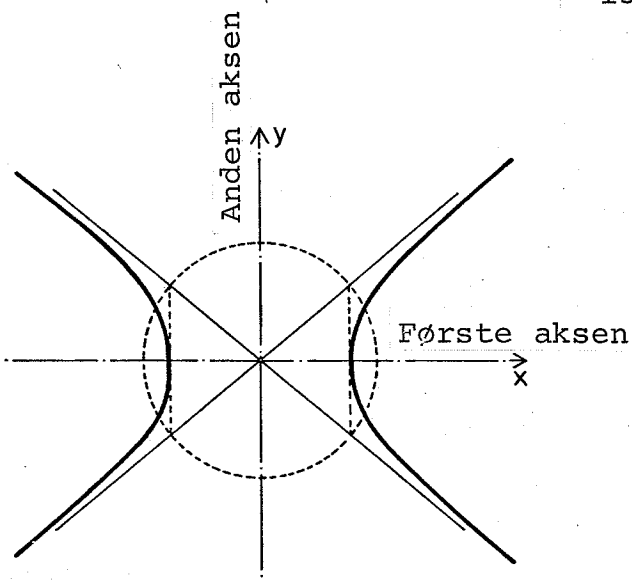
Drejes en parabel omkring sin akse, fremkommer en paraboloide. I den elliptiske paraboloide er alle plane snit vinkelret på z-aksen ligedannede ellipser.

I den hyperbolske paraboloide er plane snit, vinkelret på z-aksen, ligedannede hyperbler, mens plane snit, vinkelret på de andre akser, er parabler.

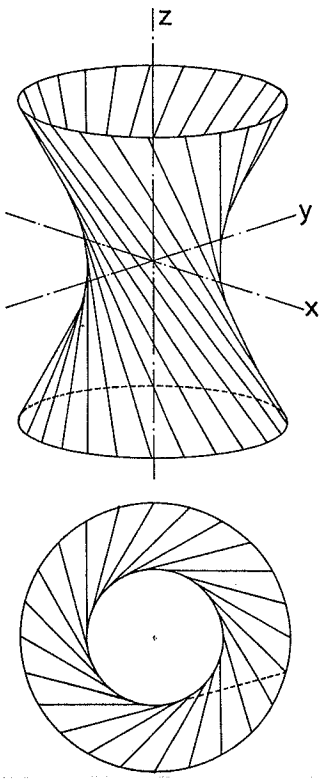
En af de egenskaber, der har gjort den hyperbolske paraboloide særlig anvendelig i forbindelse med jernbeton og trækonstruktioner er, at den kan dækkes fuldstændig af et system af rette linier på to forskellige måder.



Hyperboloide med 2 net (hyperbolsk hyperboloide)



Hyperbel



Hyperboloide med 1 net (elliptisk hyperboloide)

Drejes en hyperbel omkring en af sine akser, fremkommer en hyperboloide.

Når hyperblen drejes om andenaksen, har hyperbolaiden ét net, når hyperblen drejes om førsteaksen, har hyperboloiden to net.

I ét nets hyperbolider er plane snit, parallelle med xy-planen, cirkler og plane snit, parallel med xz - eller med yz-planerne, er hyperbler.

I to nets hyperboloiden giver de tilsvarende plane snit ligeledes cirkler og hyperbler.

Hyperboloiden med ét net har, ligesom den hyperbolske paraboloide, den bemærkelsesværdige egenskab, at fladen kan dækkes fuldstændig med et system af rette linier på to forskellige måder, hvilket er med til at gøre ét nets hyperboloiden praktisk anvendelig i byggeriet.

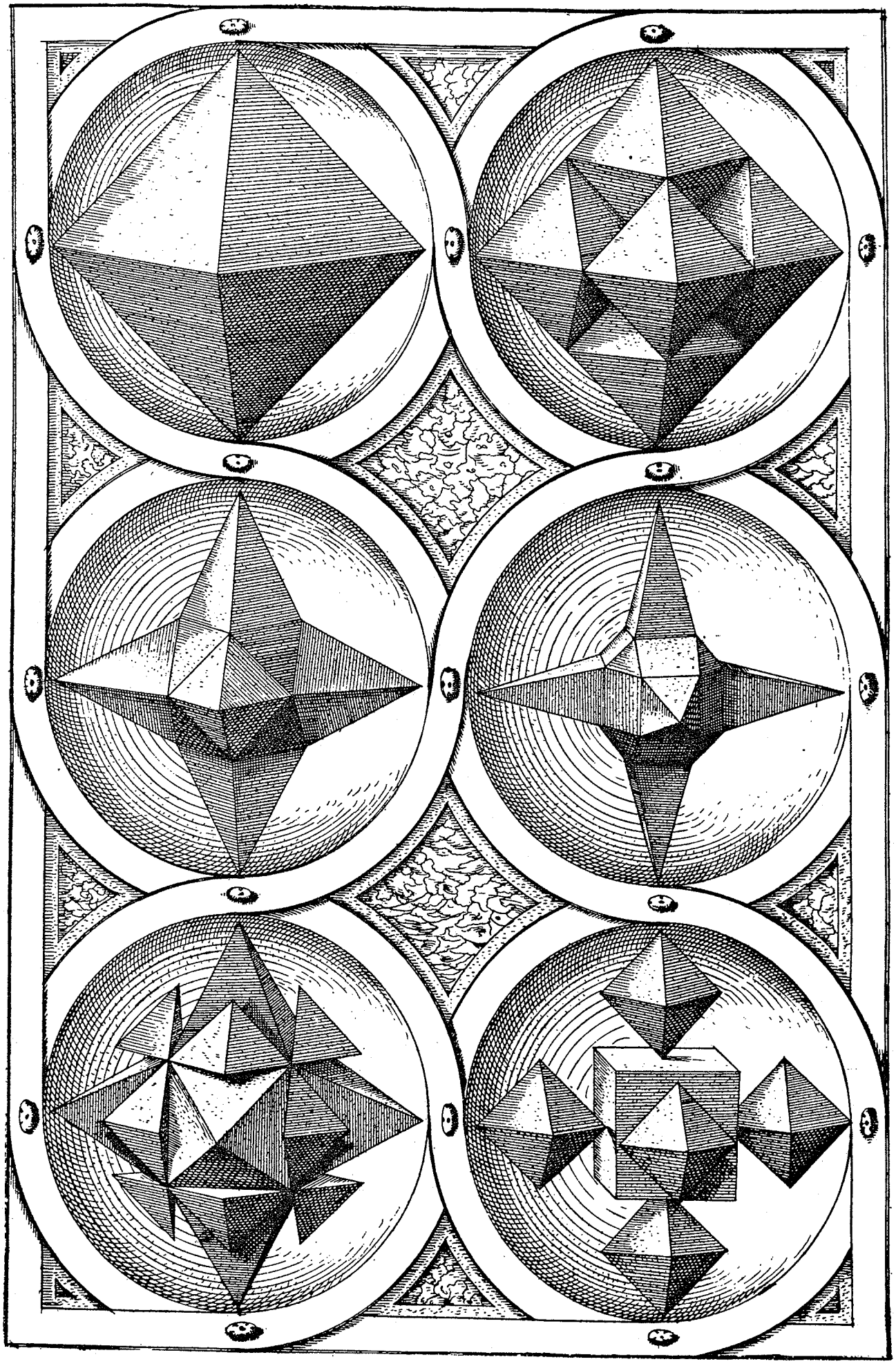
Keglesnittene, som er [illegible] for de nævnte dobbeltkrumme omdrejningslegemer: ellipsoiden, paraboloiden og hyperboloiden, blev oprindelig defineret af den græske geometriker Apollonius i det tredie århundrede før vor tidsregning.

Keglesnittenes form forekommer i mange sammenhænge. Et bemærkelsesværdig eksempel er bevægelsen af planeterne og andre astronomiske objekter.

De er dermed fænomener, som det til alle tider har tiltrukket mennesker at registrere og studere. De må i kraft af deres natur betragtes som hævet over enhver snæver synsmåde.

En anden sag er, at de har forskellige egenskaber, som i forskellige forbindelser kan være mere eller mindre på sin plads.

Noget ganske tilsvarende kan anføres om de regulære polyedre, der har fængslet fra oldtid til nyere tid.



Regulære polyedre, generelt

Ægypterne har sandsynligvis kendt til nogle af de regulære polyedres eksistens. Et af dem - dodekaederet - kan man dog med nogenlunde stor sikkerhed sige, at de ikke har kendt, da intet tyder på, at de har kendt til konstruktionen af den regulære femkant, der er grundlaget for dodekaederet.

Hos grækerne udvikles matematikken kolossalt i tiden 500-200 før vor tidsregning:

I den periode falder undersøgelsen af de regulære polyedre i specielt tre afsnit, der hver knytter sig til et af græsk videnskabs største navne.

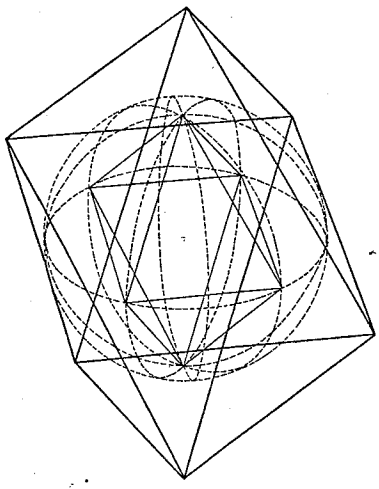
Pythagoras (ca. 500 f.v.t.) vides at have kendt alle de regulære konvekse polyedre, og han anses for opdageren af dodekaederet.

En særlig rolle kom de regulære polyedre for Pythagoras til at spille i det filosofiske system, som grundformer for verdenselementerne: ild, luft, jord, vand.

Matematikken var dog på Pythagorases tid ikke så udviklet, at han kan have haft et særlig dybtgående kendskab til de regulære polyedre.

Platon (429-348 f.v.t.) fortsatte Pythagorases anvendelse af polyedrene i det filosofiske system. Af den grund kaldes de også de platoniske legemer.

Platon og hans elever på "Akademiet" dyrkede matematikken, men det er dog først hos Euklid (300 f.v.t.) - i dennes værk "Elementerne" - man kan tale om en samlet og fyldestgørende undersøgelse af de regulære konvekse polyedre.

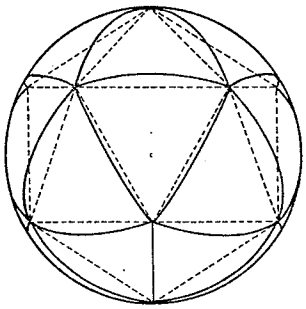


En polyeder er regulært, når det er begrænset af kongruente, regulære polygoner, som danner kongruente, regulære hjørner.

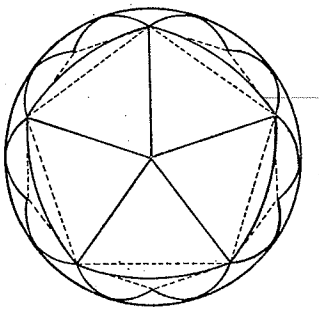
Et regulært polyeder har en omskreven og en indskreven kugle, der begge har centerfællesskab med polyederet.

Den omskrevne kugles overflade rummer alle polyederets hjørner. Den indskrevne kugle berører alle polyederets fladecentre.

Projekterer man de regulære polyedres kanter ud eller ind, på henholdsvis den omskrevne eller indskrevne kugle, således at alle projektionslinier har retning mod centrum, vil kugleoverfladen nu blive opdelt i konvekse, regulære, kongruente, sfæriske polygoner, hvis kanter alle er den korteste storcirkelbue mellem de to punkter, de forbinder.



Sfæriske polygoner kan analogt med plane polygoner opdeles i sfæriske trekanter ved diagonaler, der - ligesom kanterne - er de korteste storcirkelbuer.



En sfærisk trekant er bestemt, når én af følgende kombinationer er kendt:

1) To sider og den mellemliggende vinkel
2) To vinkler og den mellemliggende side
3) Tre sider
4) To sider og den modstående vinkel til én af dem
5) To vinkler og den modstående side til én af dem
6) Tre vinkler

De fem første tilfælde er de samme, som gælder for trigonometrisk beregning af plane trekanter. Den 6) derimod er speciel for de sfæriske trekanter.

Specielt for disse er også, at vinkelsummen ikke er den samme for alle trekanter. Vinkelsummen kan være et hvilket som helst tal mellem 180° og 540°.

Man betegner sfæriske trekanter som spidsvinklet, stumpvinklet, ligebenet, ligesidet og retvinklet med tilsvarende betydning som for plane trekanter, men der findes sfæriske trekanter med både to og tre rette vinkler.

Et eksempel på den sidstnævnte type er oktaederets sfæriske trekant.

En sfærisk vinkels gradtal er gradtallet for to-plansvinklen mellem de storcirkelbuers planer, der begrænser vinklen.

D.v.s. en sfærisk vinkel er lig med gradtallet for den bue, som vinkelbenene afskærer på en storcirkel med vinkelspidsen som toppunkt.

Arealet af en sfærisk trekant er lig med

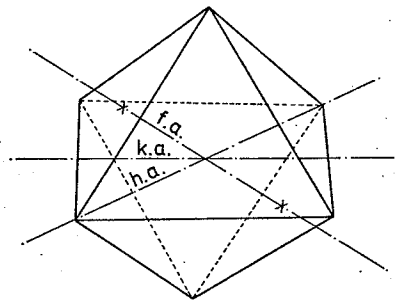
$$\frac{E \cdot \pi \cdot r^2}{180}$$

hvor E er den sfæriske eksces, der for en sfærisk trekant er forskellen mellem dennes vinkelsum og 180°, og hvor r er den omskrevne kugles radius.

Rumfanget af en sfærisk pyramide, d.v.s. det legeme, der begrænses af en sfærisk polygon og linier fra polygonhjørnerne til kuglens centrum (kugleradier), er

$$\frac{E \pi \cdot r^3}{540}$$

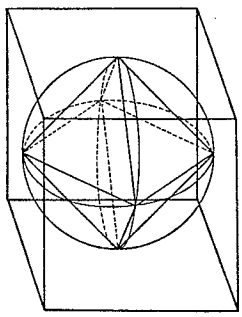
Dette svarer til udtrykket for en sædvanlig pyramides rumfang - 1/3 højde gange grundfladen.



f.a. = flade akse
k.a. = kant akse
h.a. = hjørne akse

I regulære polyedre er siderne parvis parallelle, undtagen i tilfældet, hvor antal kanter i en sideflade er lig antallet af kanter i et hjørne, som det er tilfældet i tetraederet.

En fladeakse forbinder via polyederets centrum to modstående sidefladers centre. I tetraederet ligger fladeaksen og hjørneaksen i hinandens forlængelse.



I de øvrige regulære polyedre går hjørneakserne gennem centret og to modstående hjørner. Kantaksen går gennem centret og midtpunkter af modstående kanter.

Lægges tangentplaner til den omskrevne kugle i hjørnespidserne, begrænser disse et nyt regulært polyeder, der er det indskrevne polyeders reciprokke polyeder.

Det mulige antal regulære, konvekse polyedre

For at vise, at der kun findes fem regulære, konvekse polyedre, sættes

h = antallet af hjørner ialt

k = antallet af kanter ialt

f = antallet af sideflader ialt

m = antallet af kanter i hvert hjørne

n = antallet af kanter i hver sideflade

Da mh = 2k og nf = 2k, idet antallet af kanter medregnes 2 gange i henholdsvis mh og nf, fås

$$h = 2k:m$$

$$f = 2k:n$$

Indsættes disse størrelser i Eulers polyederformel, h - k + f = 2, fås

$$\frac{2k}{m} - k + \frac{2k}{n} = 2$$

hvoraf følger

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$$

For både m og n gælder, at de skal være >2 og <6, da m og/eller n skal være 3, findes der kun følgende kombinationsmuligheder for de to størrelser m og n:

3,3 ~ tetraeder

3,4 ~ kubus (hexaeder)

4,3 ~ oktaeder

3,5 ~ dodekaeder

5,3 ~ ikosaeder

BESKRIVELSE AF DE FEM REGULÆRE, KONVEKSE POLYEDRE

I efterfølgende beskrivelse af de regulære polyedre opremses indledningsvis antallet af flader, hjørner og kanter med tilhørende akser.

Desuden anføres kantlængden a, og længden af den omskrevne og den indskrevne kugles radius R og r, der er afstanden fra henholdsvis et hjørne og et flademidtpunkt til polyederets centrum.

ka angiver tilsvarende afstanden fra midtpunktet af en kant til polyederets centrum.

Endelig angives radierne i en sideflades om- og indskrevne cirkel Rf og rf, polyedrets overflade, O, og volumen V, samt polyedrets to-plansvinkel, mærket v_t, v_h, v_o, v_i og v_d.

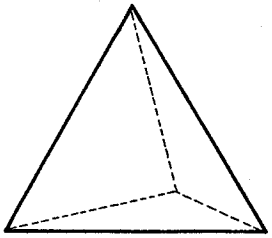
Skitserne i forbindelse med de enkelte polyedre er grundlaget for beregningen af de ønskede størrelser, og viser ved de (skraverede) planer, bl.a. symmetriakserne, radierne og to-plansvinklen.

Som udgangspunkt for de anførte mål sættes den omskrevne kugles radius R = 1.

Med henblik på grafisk fremstilling og databehandling er der for hvert af polyedrene anført et sæt koordinater, der refererer til et treretvinklet koordinatsystem.

Som udgangspunkt for de valgte størrelser er de enkelte polyedre forudsat indskrevet i et regulært hexaeder, hvis indskrevne kugles radius r = 1.

Tetraederet



4 flader - 4 fladeakser
4 hjørner - 4 hjørneakser
6 kanter - 3 kantakser

R(hjørneakse) = 1 = $\frac{2a}{3} \vee \frac{2}{3}$

r(fladeakse) = $\frac{1}{3} = \frac{a}{3} \vee \frac{2}{3}$

ka(kantakse) = $\frac{1}{3} \vee 3 = \frac{a}{2} \vee \frac{1}{2}$ = 0,5773503

a(kantlængde) = $\frac{2}{3} \vee 6$

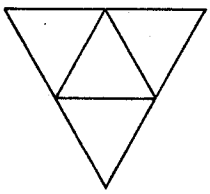
Rs(store fladecirkel) = $\frac{2}{3} \vee 2$

rs(lille fladecirkel) =

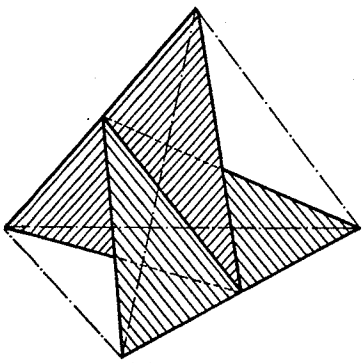
O(overflade) = $2\frac{2}{3} \vee 3$

V(rumfang) = $\frac{8}{27} \vee 3$

v_t(to-plansvinkel) = 70.528779°



udfoldning

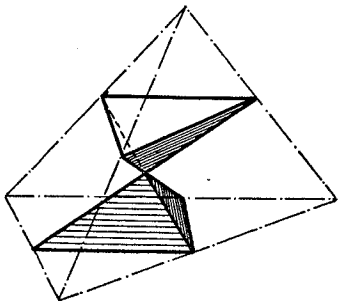


hjørne-, flade- og kantakseplaner; kantlængder: a og $a\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Højden i et tetraeder er lig med R + r.

Hjørner og hjørneakserne. Hvert hjørne begrænses af tre flader, og hjørneakserne danner vinkler på 70.53° (109.47°) med hinanden.

Fladeakserne ligger i hjørneaksernes forlængelse og danner indbyrdes de samme vinkler, som disse.



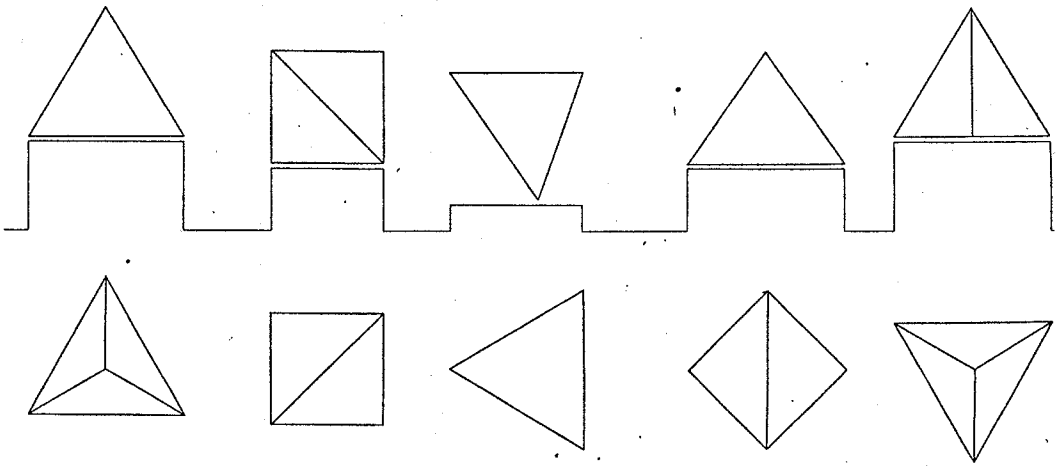
kantakseplaner

Kantakserne skærer hinanden i rette vinkler.

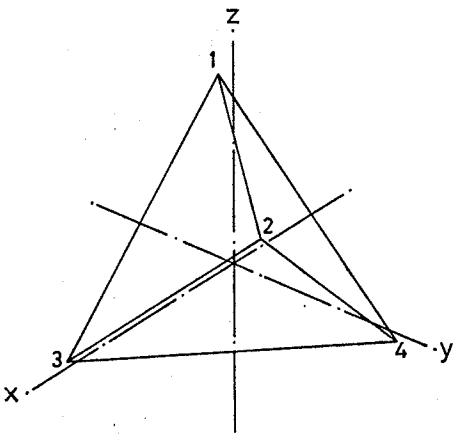
Kanter (a)

En vilkårlig kant står vinkelret på én, og danner vinkler på 60° med de øvrige kanter.

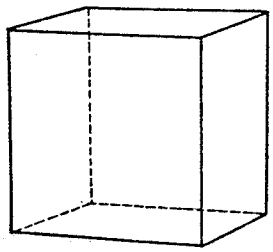
Tetraeder

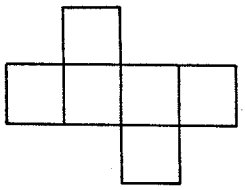


Retvinklet projektion af tetraeder placeret på flade, kant og hjørne



Tetraeder	X	Y	Z
T_1	÷ 1	÷ 1	1
T2	1	1	1
T3	1	÷ 1	÷ 1
T4	÷ 1	1	÷ 1





udfoldning

Hexaederet

6 sideflader - 3 fladeakser
8 hjørner - 4 hjørneakser
12 kanter - 6 kantakser

R(hjørneakse) $= 1$

r(fladeakse) $= \frac{1}{3}\sqrt{3}$

k_a(kantakse) $= \frac{1}{3}\sqrt{6}$

a(kantlængde) $= \frac{2}{3}\sqrt{3}$

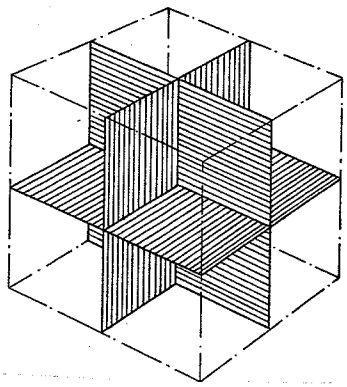
R_s(stor fladecirkel) $= \frac{1}{3}\sqrt{6}$

r_s(lille fladecirkel) $= \frac{2}{3}\sqrt{2}$

O(overflade) $= 8$

V(rumfang) $= \frac{8}{9}\sqrt{3}$

v_h(to-plansvinkel) $= 90^o$



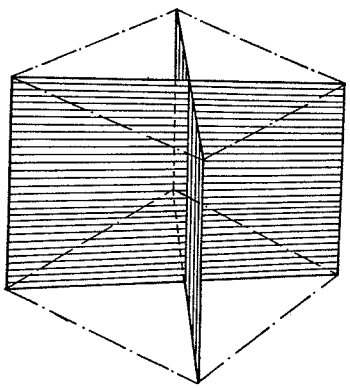
flade- og kant-akseplaner a x a

Flader og fladeakser

En vilkårlig flade er parallel med én, og vinkelret på de øvrige flader. Fladeakserne danner rette vinkler med hinanden.

Kanter og kantakser

En vilkårlig kant er parallel med 3 og står vinkelret på de øvrige kanter. Kantakserne står vinkelret på hinanden og er parvis vinkelrette med fladeakserne.

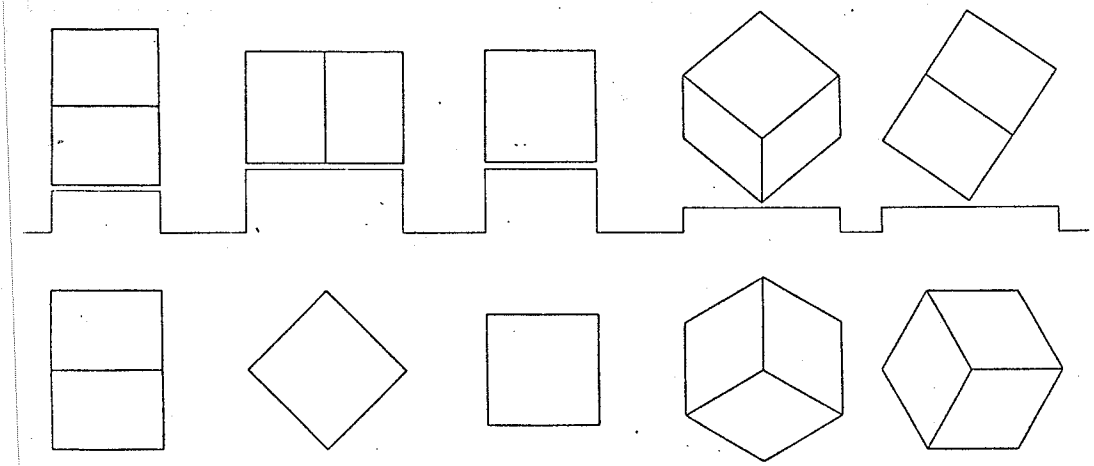


hjørneakseplaner a x $a\sqrt{2}$

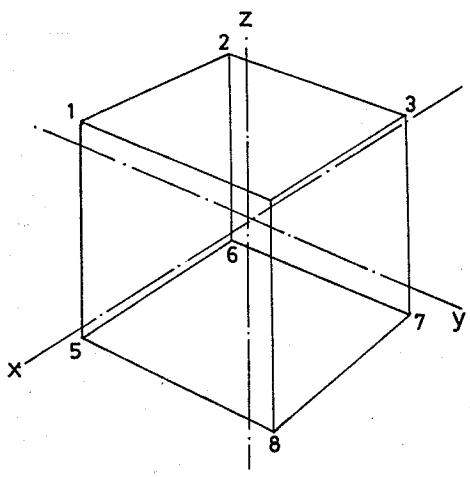
Hjørner og hjørneakser

Hvert hjørne begrænses af tre flader, og hjørneakserne danner vinkler på 70.53^o (109.53^o) med hinanden.

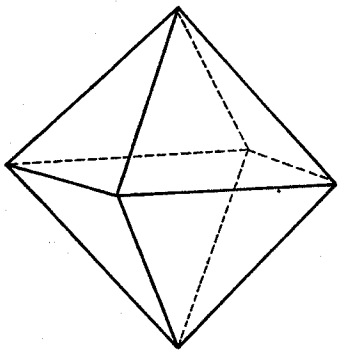
Hexaeder

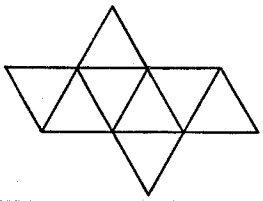


Retvinklet projektion af hexaeder placeret på kant, flade og hjørne.



Hexaeder	X	Y	Z
H1	1	÷ 1	1
H2	÷ 1	÷ 1	1
H3	÷ 1	1	1
H4	1	1	1
H5	1	÷ 1	÷ 1
H6	÷ 1	÷ 1	÷ 1
H7	÷ 1	1	÷ 1
H8	1	1	÷ 1





udfoldning

Oktaederet

8 sideflader - 4 fladeakser

6 hjørner - 3 hjørneakser

12 kanter - 6 kantakser

R(hjørneakse) = 1

r(fladeakse) = $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

k_a(kantakse) = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

a(kantlængde) = $\sqrt{2}$

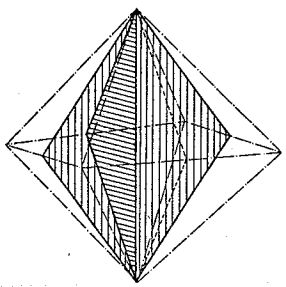
R_s(stor fladecirkel) = $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

r_s(lille fladecirkel)=

O(Overflade) = $4\sqrt{3}$

V(rumfang) = $1\frac{1}{3}$

v_o(to-plansvinkel) = 109.47122^o



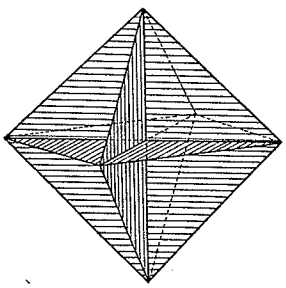
flade- og hjørneakseplaner: kantlængde: $a\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Hjørner og hjørneakser

Hvert hjørne begrænses af fire flader. Hjørneakserne skærer hinanden i rette vinkler.

Flader og fladeakser

En vilkårlig flade er parallel med én, og danner vinkler på 109.47^o med de øvrige flader.



kant- og hjørneakseplaner: a x a

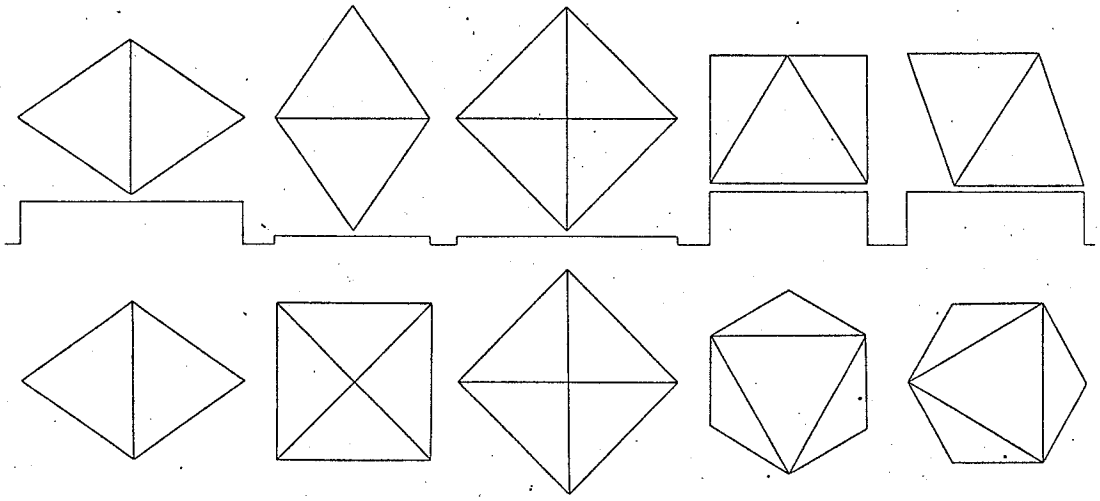
Kanter og kantakser

En vilkårlig kant er parallel med én, vinkelret på to og danner vinkler på 60^o med de øvrige kanter.

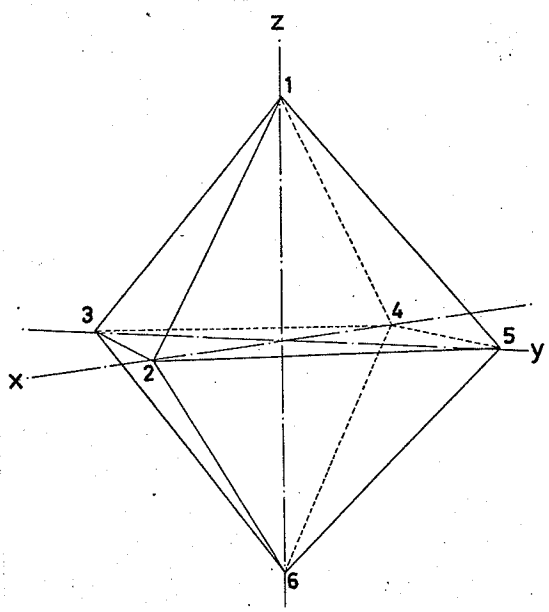
Kantakserne står parvis vinkelret på hjørneakserne.

Oktaederet kan på 3 måder deles op i 2 regulære, firesidede pyramider med fælles kvadratisk grundflade.

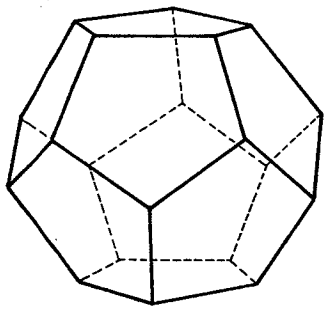
Oktaeder



Retvinklet projektion af oktaeder placeret på kant, hjørne og flade.



Oktaeder	X	Y	Z
O1	0	0	1
O2	1	0	0
O3	0	÷1	0
O4	÷1	0	0
O5	0	1	0
O6	0	0	÷1



Dodekaederet

20 hjørner - 10 hjørneakser

30 kanter - 15 kantakser

12 flader - 6 fladeakser

R(hjørneakse) = 1

r(fladeakse) = $\sqrt{\frac{1}{15}}(5 + 2\sqrt{5})$

k (kantakse) = $\frac{1}{6}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$

a(kantlængde) = $\frac{1}{3}(\sqrt{15} \div \sqrt{3})$

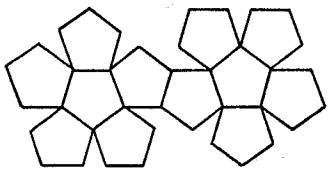
R_s(stor fladecirkel) = $\sqrt{\frac{1}{15}}(10 \div 2\sqrt{5})$

r_s(lille fladecirkel) =

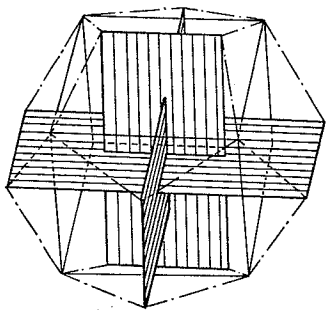
O(Overflade) = $\sqrt{40}(5 \div \sqrt{5})$

V(rumfang) = $\frac{2}{9}(5\sqrt{3} + \sqrt{15})$

v_d(to-plansvinkel) = 116.57°



udfoldning



kant- og hjørneakseplaner: a x (a + 1,618a)

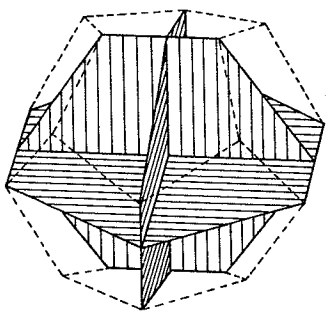
Hjørner og hjørneakser

Hvert hjørne begrænses af tre flader. En vilkårlig hjørneakse danner vinkler på 109.47° (70.53°) med tre, og på 41.81 (138.189°) med de øvrige hjørneakser.

Kanter og kantakser

En vilkårlig kant er parallel med én, og danner vinkler på 36° med 8, 60° med 8, 72° med 8, og 90° med de fire øvrige kanter.

Kantakserne står 3 og 3 vinkelret på hinanden.



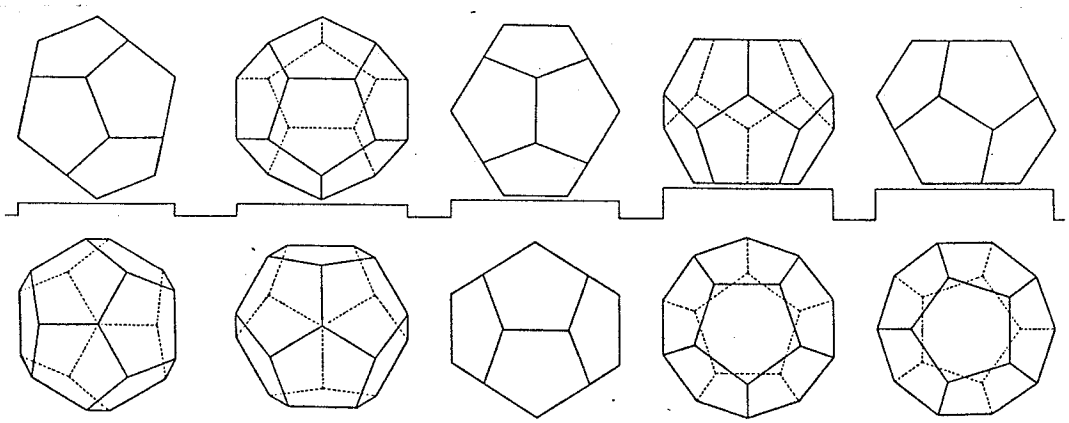
fladeakseplaner

Flader og fladeakser

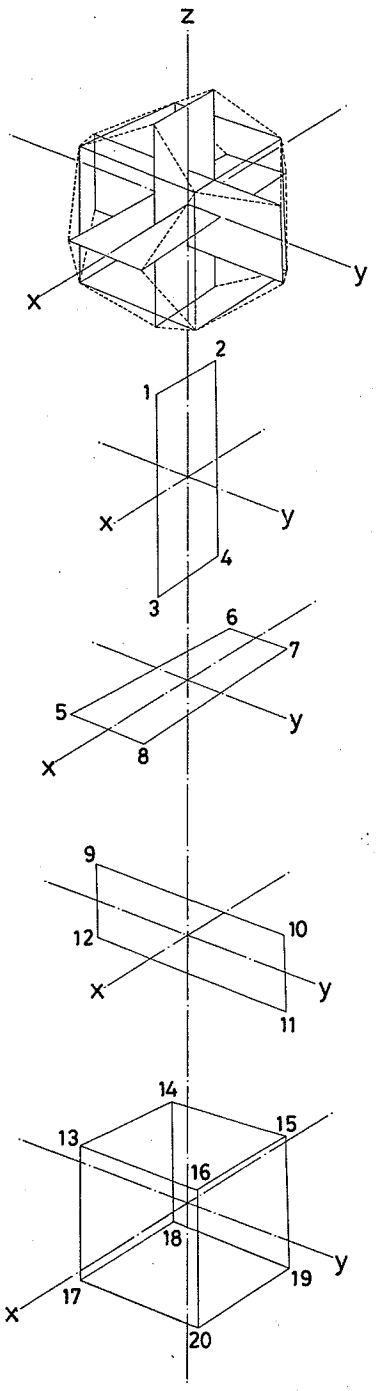
En vilkårlig flade er parallel med én, og danner vinkler på 116.57° (63.43°) med alle de øvrige.

Alle fladeakserne skærer hinanden i vinkler på 116.57°.

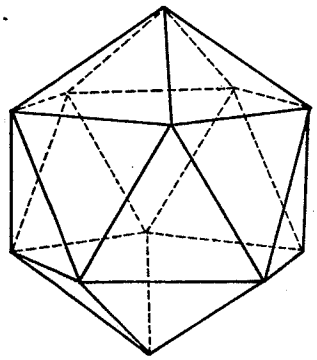
Dodekaeder



Retvinklet projektion af dodekaeder placeret på hjørne, kant og flade.



Dodekaeder	X	Y	Z
D1	0,382	0	1
D2	÷ 0,382	0	1
D3	0,382	0	÷ 1
D4	÷ 0,382	0	÷ 1
D5	1	÷ 0,382	0
D6	÷ 1	÷ 0,382	0
D7	1	0,382	0
D8	1	0,382	0
D9	0	÷ 1	0,382
D10	0	1	0,382
D11	0	1	÷ 0,382
D12	0	÷ 1	÷ 0,382
D13	0,618	÷ 0,618	0,618
D14	0,618	0,618	0,618
D15	0,618	0,618	0,618
D16	0,618	0,618	0,618
D17	0,618	÷ 0,618	÷ 0,618
D18	÷ 0,618	÷ 0,618	÷ 0,618
D19	÷ 0,618	0,618	÷ 0,618
D20	0,618	0,618	÷ 0,618



Ikosaederet

20 flader - 10 fladeakser
30 kanter - 15 kantakser
12 hjørner - 6 hjørneakser

R(hjørneakse) $= 1$

r(fladeakse) $= \sqrt{\frac{1}{15}}(5 + 2\sqrt{5})$

k_a(kantakse) $= \sqrt{\frac{1}{10}}(5 + \sqrt{5})$

a(kantlængde) $= \sqrt{\frac{1}{5}}(10 - 2\sqrt{5})$

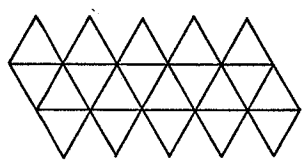
R_s(stor fladecirkel $= \sqrt{\frac{1}{15}}(10 - 2\sqrt{5})$

v_s(lille fladecirkel)

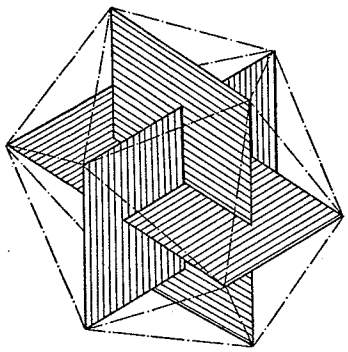
O(Overflade) $= 10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}$

V(rumfang) $= \frac{2}{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

v_i(to-plansvinkel) $= 138.18333^\circ$



udfoldning



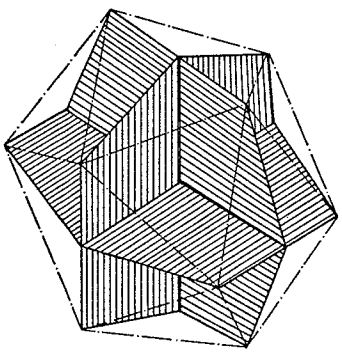
hjørne- og kantakseplaner:
a x 1,618a

Hjørner og hjørneakser

Hvert hjørne begrænses af fem flader. Alle hjørneakserne danner vinkler på 116.57° (63.43°) med hinanden.

Flader og fladeakser

En vilkårlig flade er parallel med én, og danner vinkler på 138.19° (41.81°) med seks, og 70.53° (109,47°) med de tolv øvrige kantakser.



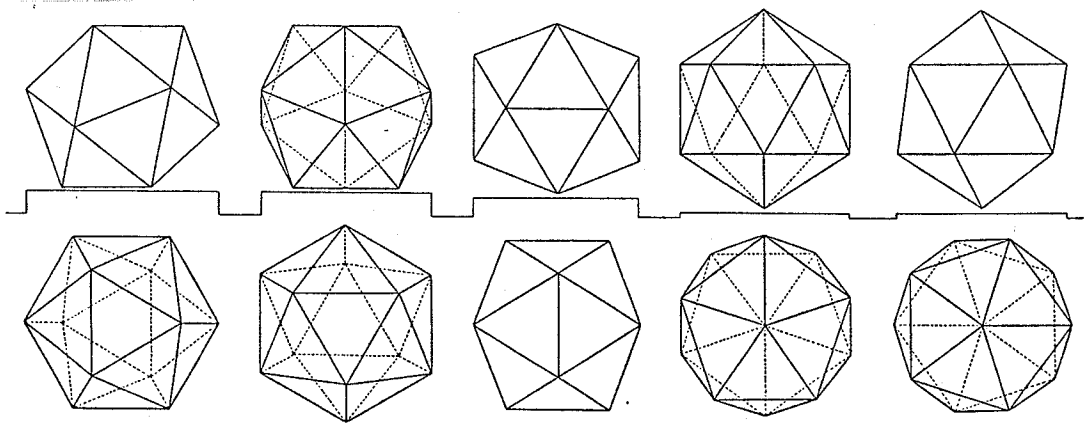
fladeakseplaner

Kanter og kantakser

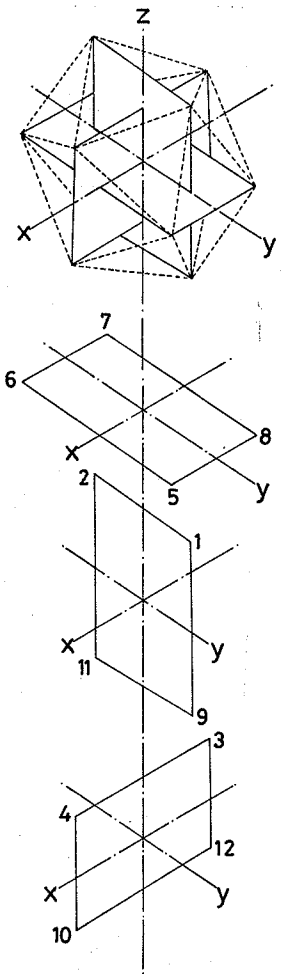
En vilkårlig kant er parallel med én, og danner vinkler på 36° med 8, 60° med 8, 72° med 8, og 90° med de øvrige 4 kanter.

Kantakserne står 3 og 3, vinkelret på hinanden.

Ikosaeder



Retvinklet projektion af ikosaeder placeret på flade, kant og hjørne.



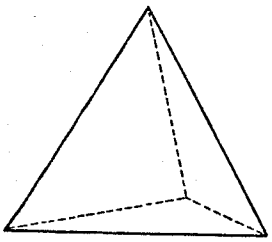
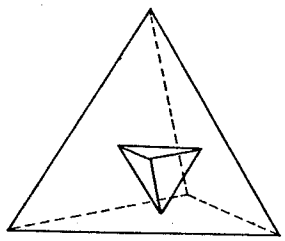
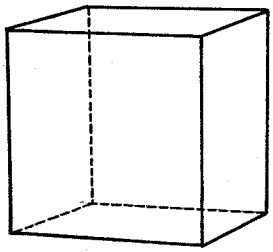
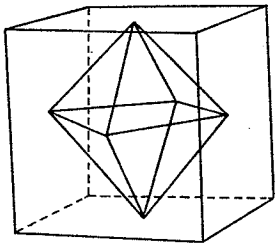
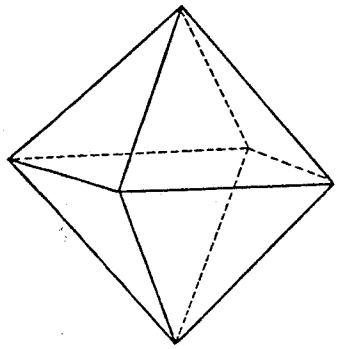
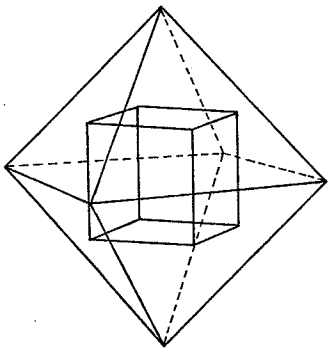
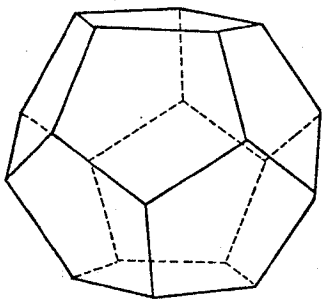
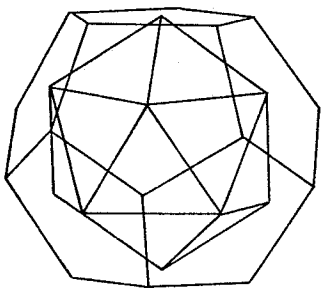
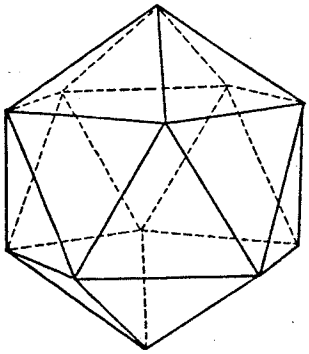
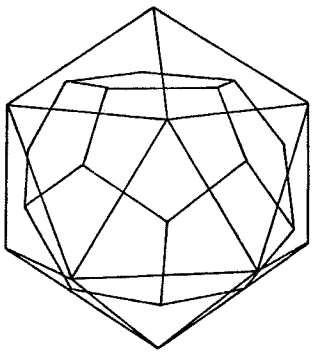
Ikosaeder	X	Y	Z
I 1	0	0,618	1
I 2	0	÷ 0,618	1
I 3	÷ 1	0	0,618
I 4	1	0	0,618
I 5	0,618	1	0
I 6	0,618	÷ 1	0
I 7	÷ 0,618	÷ 1	0
I 8	÷ 0,618	1	0
I 9	0	0,618	÷ 1
I10	1	0	÷ 0,618
I11	0	÷ 0,618	÷ 1
I12	÷ 1	0	÷ 0,618

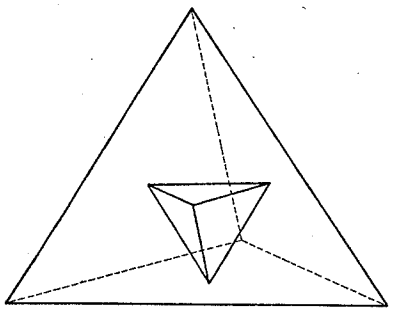
REGULÆRE, KONVEKSE, POLYEDRE

AKSEANTAL OG SKÆRINGSVINKLER

RECIPROKKE POLYEDRE

Flade-akser	Kant-akser	Hjørne-akser
4	3	4
70,53° (109,47°)	90°	70,53° (109,47°)
tetraeder		
3	6	4
90°	90°	70,53° (109,47°)
hexaeder		
4	6	3
70,53° (109,47°)	90°	90°
oktaeder		
6	15	10
63,43° (116,57°)	90° (3 og 3)	70,53° (109,47°) 41,81° (138,19°)
dodekaeder		
10	15	6
70,53° (109,47°) 41,81° (138,19°)	90° (3 og 3) 36,0° (144,0°)	63,43° (116,57°)
ikosaeder		

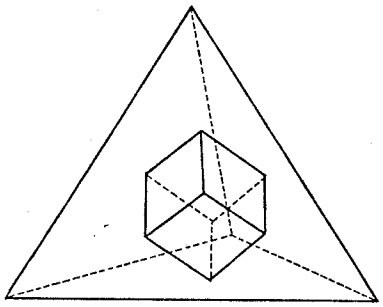













Indskrivning i tetraederet

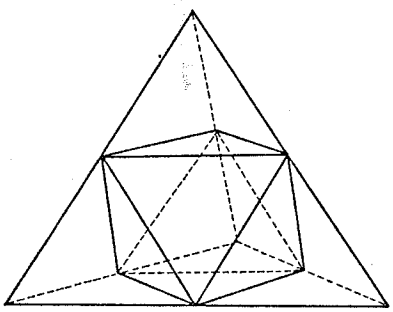
Et tetraeder kan indskrives i et andet tetraeder med et hjørne i hver af det omskrevne tetraeders fladecentre.

De to tetraedre har fælles kantakser. Hjørneakserne i det ene tetraeder er fladeakser i det andet.

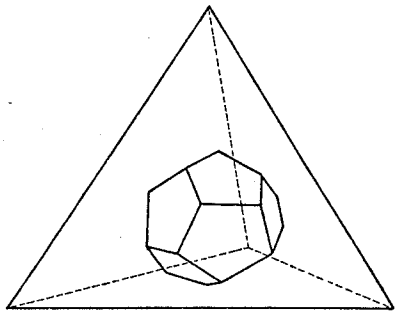


Et hexaeder kan indskrives i et tetraeder med 4 hjørnespidser i hver af tetraederets fladecentre.

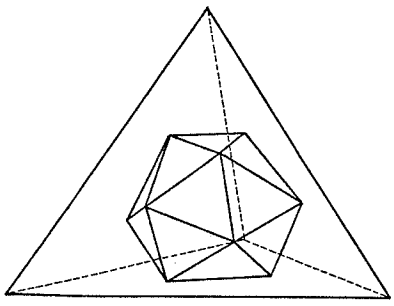
De 4 øvrige hjørner ligger, hvor tetraederets hjørneakser skærer tetraederets indskrevne kugle. Tetraederets hjørne- og fladeakser bliver hjørneakser i hexaederet. Tetraederets kantakser bliver fladeakser i hexaederet.



Et oktaeder kan indskrives i et tetraeder med sine 6 hjørner i midtpunktet af tetraederets 6 kanter. Tetraederets kantakser bliver hjørneakser i oktaederet. 4 af oktaederets fladeakser er sammenfaldende med tetraederets fladeakser. Oktaederets 4 øvrige fladeakser er sammenfaldende med tetraederets hjørneakser.

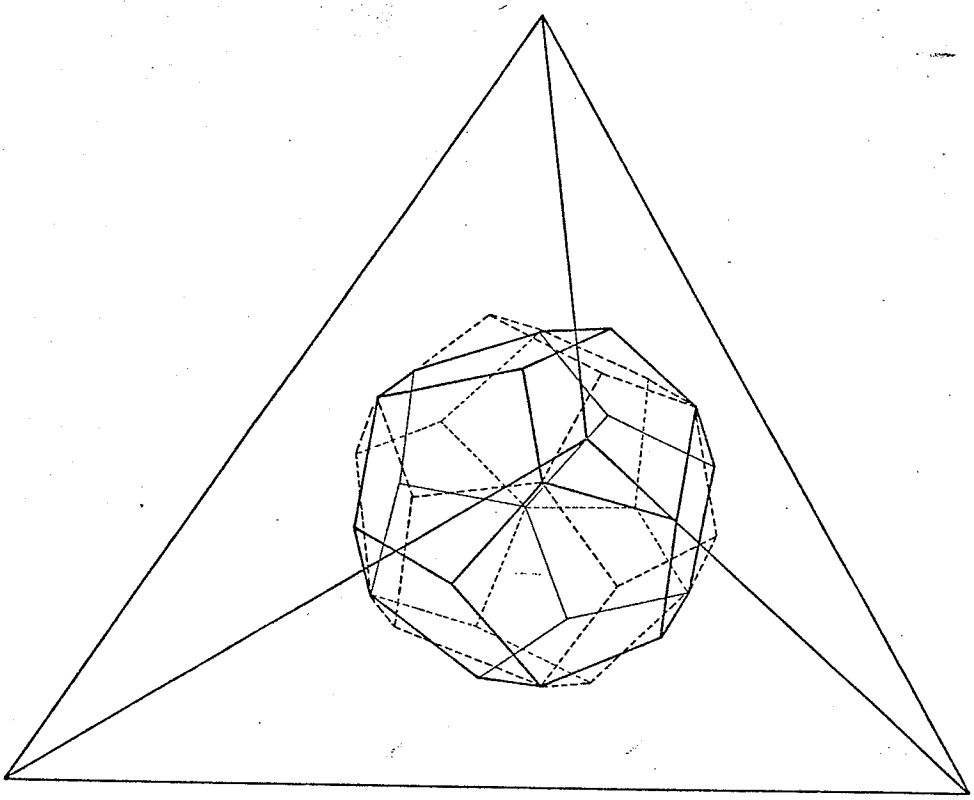


Et dodekaeder kan indskrives i et tetraeder med 4 af dets hjørner i tetraederets fladecentre, og med 3 af dets kantakser sammenfaldende med tetraederets kantakser. Det indskrevne dodekaeder kan drejes i to forskellige stillinger.

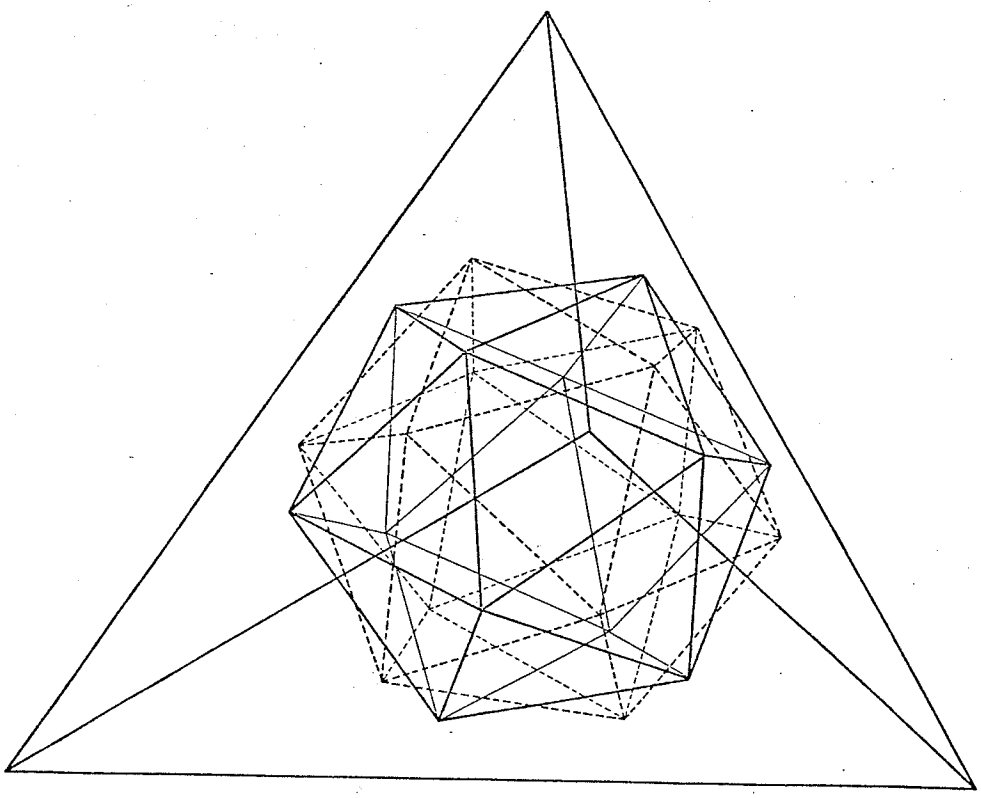


Et ikosaeder kan indskrives i et tetraeder med 4 af dets flader i plan med tetraederets flader (fælles fladeakser). 3 af ikosaederets kantakser er sammenfaldende med tetraederets kantakser. Det indskrevne ikosaeder kan drejes i to forskellige stillinger.

Alle de regulære polyedre kan således indskrives i et regulært tetraeder.

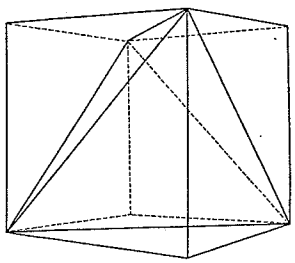


2 dodekaedre indskrevet i et tetraeder



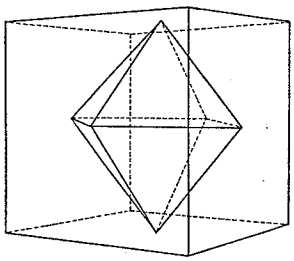
2 ikosaedre indskrevet i et tetraeder

Indskrivning i hexaederet

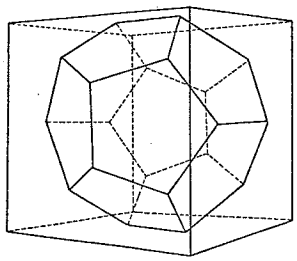


Et tetraeder kan indskrives i et hexaeder med dets 4 hjørner i 4 af hexaederets hjørner (fælles hjørneakser). Hexaederets kantakser bliver fladeakser i tetraederet.

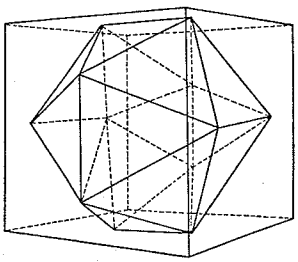
Der kan på denne måde indskrives 2 tetraedre i et hexaeder. Hexaederet og det indskrivne tetraeder har samme omskrevne kugle.



Et oktaeder kan indskrives i et hexaeder med dets 6 hjørner i hexaederets fladecentre. Hexaederets hjørneakser er sammenfaldende med oktaederets fladeakser. De har fælles kantakser. Oktaederet er indskrevet i hexaederets indskrevne kugle.

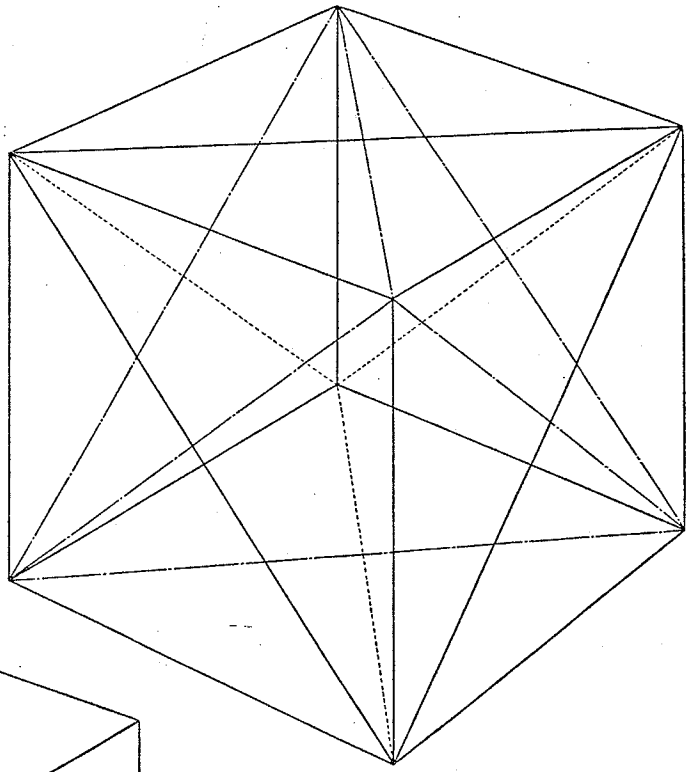


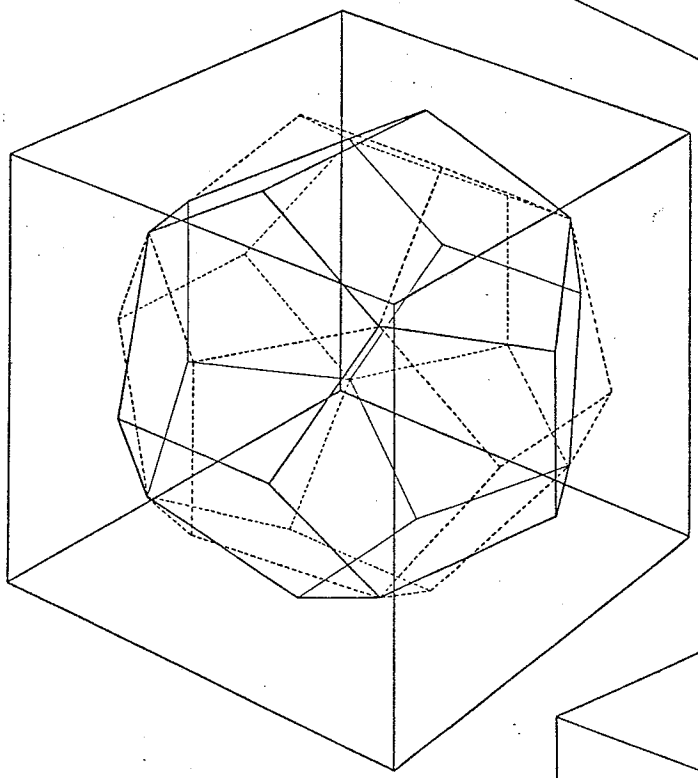
Et dodekaeder kan indskrives i et hexaeder med 6 kanter i hexaederets 6 flader. Hexaederets fladeakser er kantakser i dodekaederet. Hexaederets hjørneakser er ligeledes hjørneakser i dodekaederet og hexaederets kantakser er fladeakser i dodekaederet. Dodekaederet kan drejes i to forskellige stillinger.



Et ikosaeder kan indskrives i et hexaeder med 6 af dets kanter i hexaederets 6 flader. Hexaederets fladeakser er kantakser i ikosaederets og hexaederets hjørneakser er fladeakser i ikosaederet. Ikosaederet kan drejes i to forskellige stillinger.

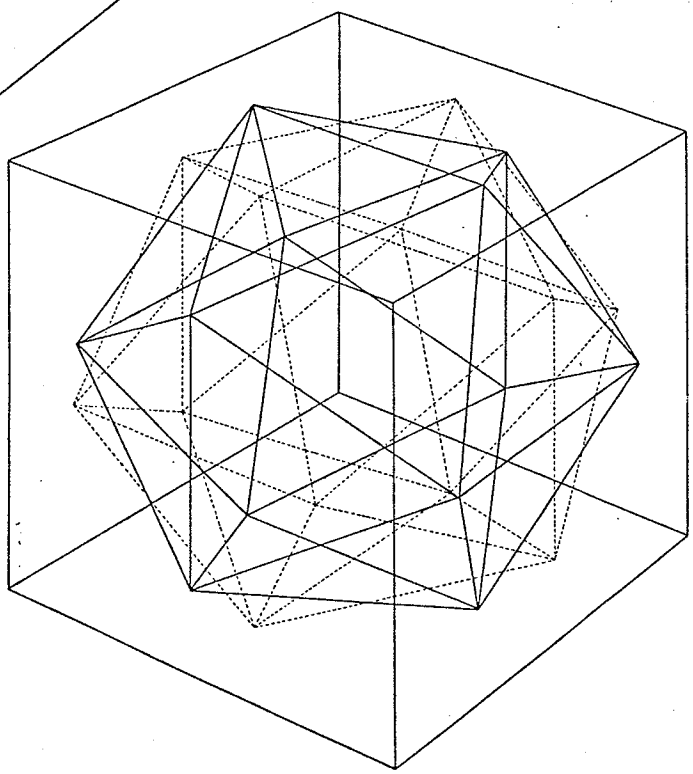
2 tetraedre
indskrevet i
et hexaeder

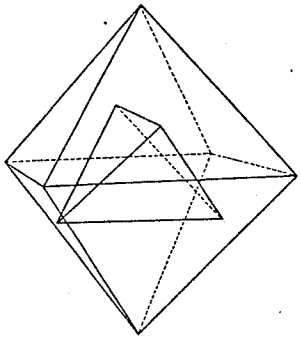




2 dodekaedre
indskrevet i
et hexaeder

2 ikosaedre
indskrevet i
et hexaeder

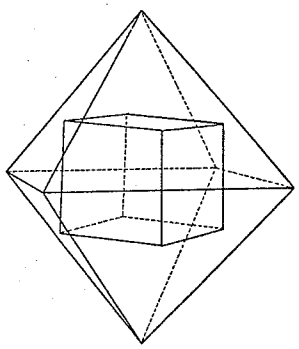




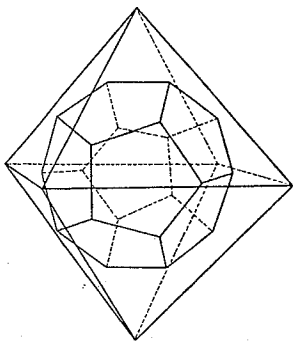
Indskrivning i oktaederet

Et tetraeder kan indskrives i et oktaeder med dets 4 hjørner i 4 af oktaederets fladecentre. Tetraederet er således indskrevet i oktaederets indskrevne kugle. Tetraederets fladeakser er sammenfaldende med oktaederets fladeakser.

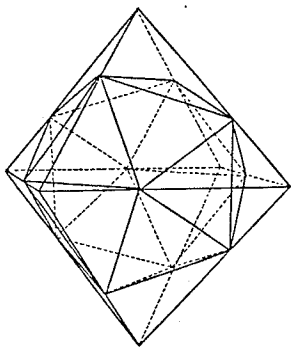
Der kan på denne måde indskrives 2 tetraedre i oktaederet.



Et hexaeder kan indskrives i et oktaeder med et hjørne i hver af oktaederets fladecentre. Hjørneaksen i det ene polyeder er fladeakse i det andet. Kantakserne er sammenfaldende. Hexaederet er indskrevet i oktaederets indskrevne kugle.



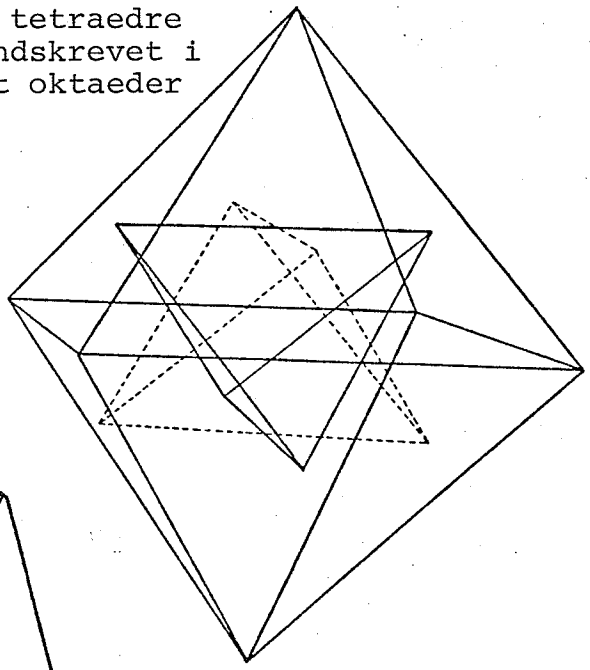
Et dodekaeder kan indskrives i et oktaeder i to forskellige stillinger. I begge stillinger med 4 hjørneakser sammenfaldende med oktaederets fladeakser og med 3 kantakser sammenfaldende med oktaederets hjørneakser.



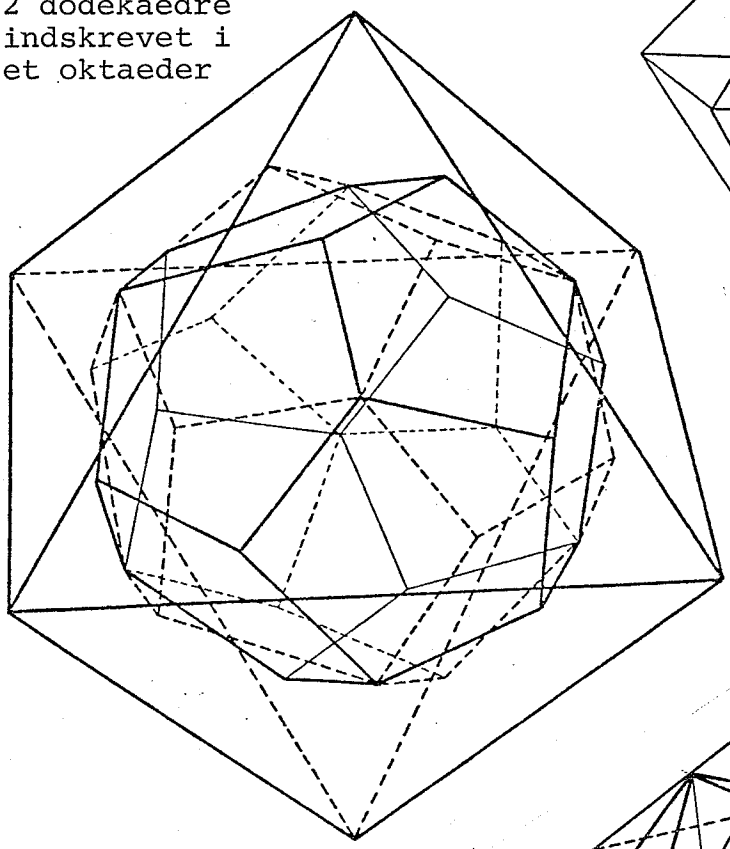
Et ikosaeder kan i to forskellige stillinger indskrives i et oktaeder med en flade i hver af oktaederets flader.

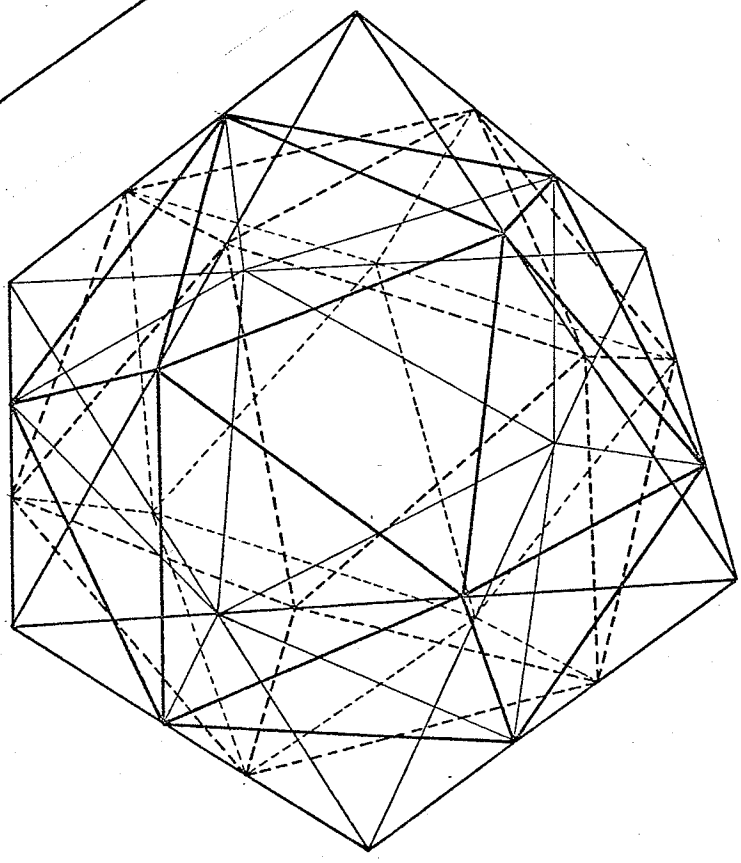
I hver stilling får de to polyedre 4 sammenfaldende fladeakser, og 3 af ikosaederets kantakser er sammenfaldende med oktaederets hjørneakser.

2 tetraedre
indskrevet i
et oktaeder

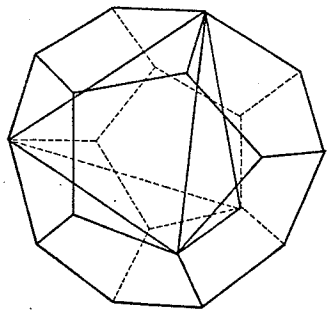


2 dodekaedre
indskrevet i
et oktaeder



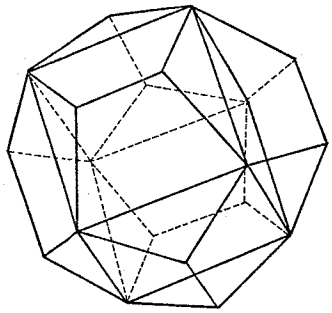


2 ikosaedre
indskrevet i
et oktaeder

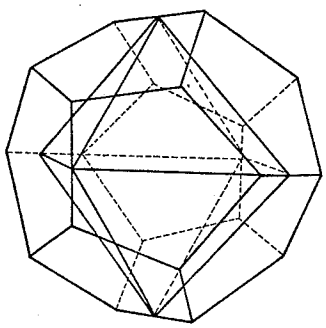


Indskrivning i dodekaederet

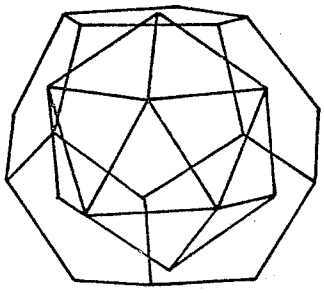
Et tetraeder kan indskrives i dodekaederet i 10 forskellige stillinger. I hver stilling ligger tetraederets hjørner i 4 af dodekaederets hjørner, og tetraederets kantakser er sammenfaldende med 3 af dodekaederets kantakser.



Et hexaeder kan indskrives i dodekaederet i 5 forskellige stillinger. I hver stilling ligger hexaederets hjørner i 8 af dodekaederets hjørner, og hexaederets fladeakser er sammenfaldende med 3 af dodekaederets kantakser.

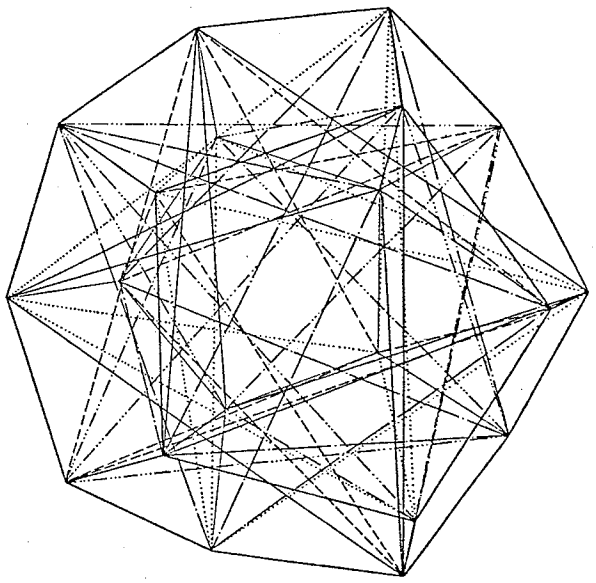


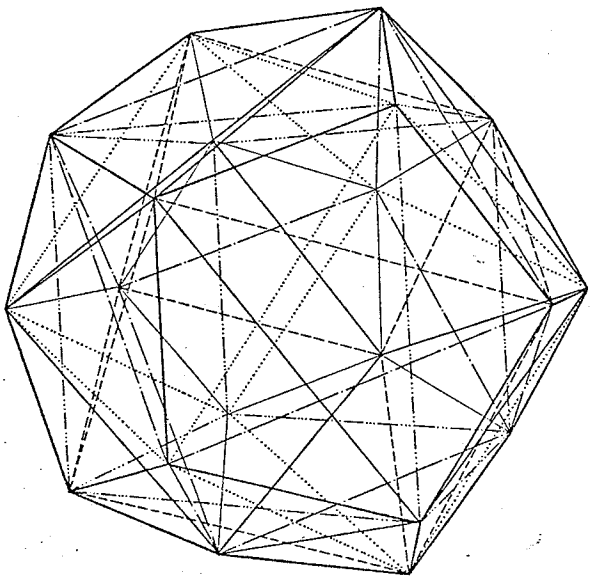
Et oktaeder kan indskrives i et dodekaeder i 5 forskellige stillinger. I hver stilling er oktaederets hjørneakser sammenfaldende med 3 af dodekaederets kantakser, og dets fladeakser er sammenfaldende med 4 af dodekaederets hjørneakser.



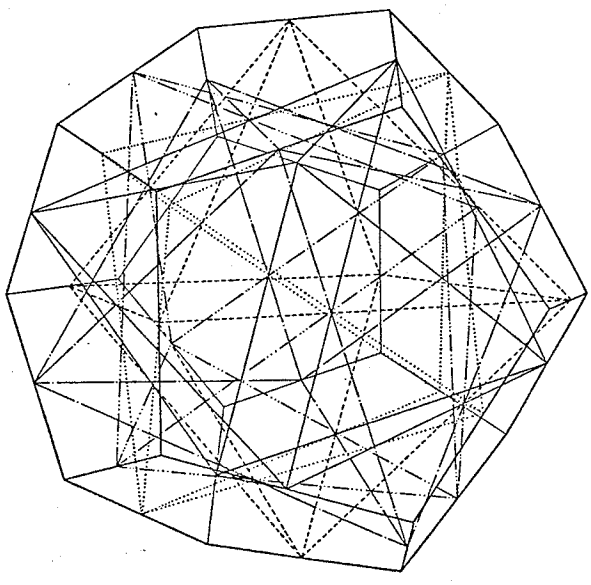
Et ikosaeder kan indskrives i et dodekaeder med alle dets hjørner i alle dodekaederets fladecentre. De to polyedre har sammenfaldende kantakser.

lo tetraedre
indskrevet i
et dodekaeder

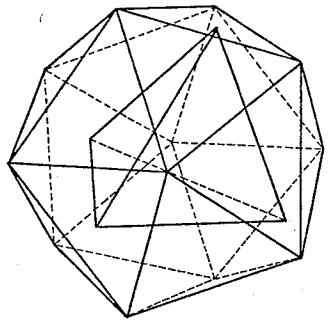




5 hexaedre
indskrevet i
et dodekaeder

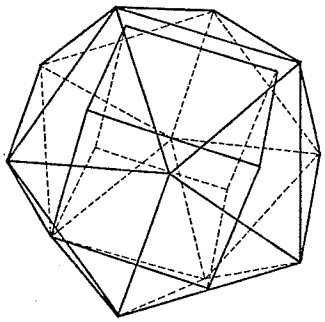


5 oktaedre
indskrevet i
et dodekaeder

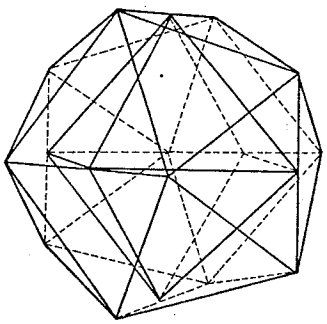


Indskrivning i ikosaederet

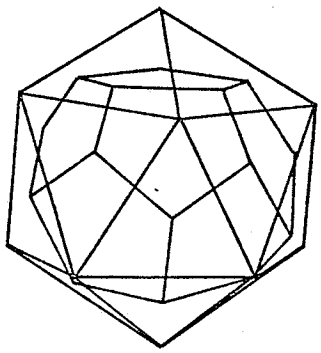
Et tetraeder kan indskrives i 10 forskellige stillinger i et ikosaeder. I hver stilling ligger tetraederets hjørner i 4 af ikosaederets fladecentre, og tetraederets kantakser er sammenfaldende med ikosaederets kantakser. Tetraederet er indskrevet i ikosaederets indskrevne kugle.



Et hexaeder kan indskrives i fem forskellige stillinger i et ikosaeder. I hver stilling ligger hexaederets hjørner i 8 af ikosaederets fladecentre, og dets fladeakser er sammenfaldende med 3 af ikosaederets kantakser. Hexaederet er indskrevet i ikosaederets indskrevne kugle.

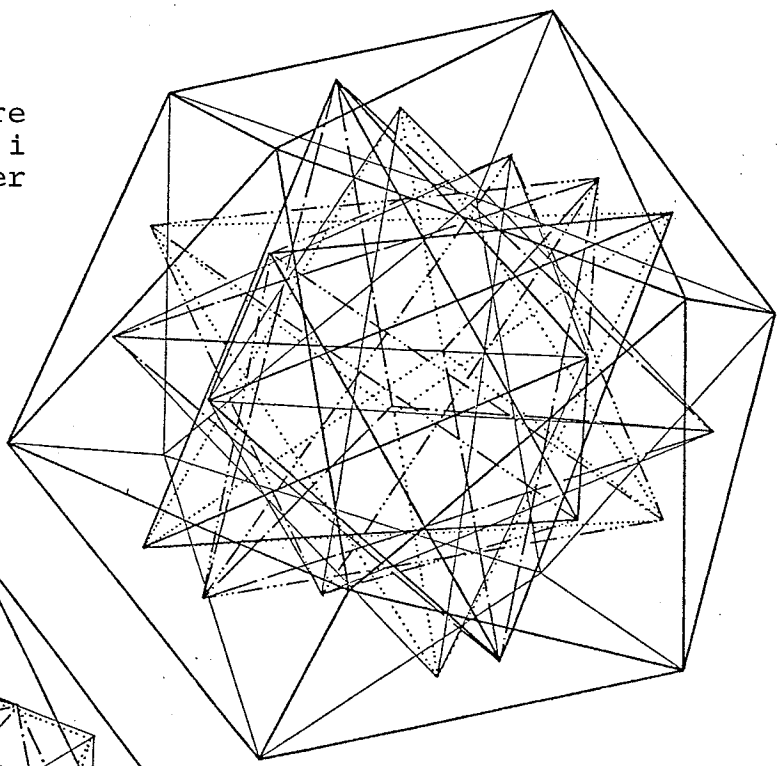


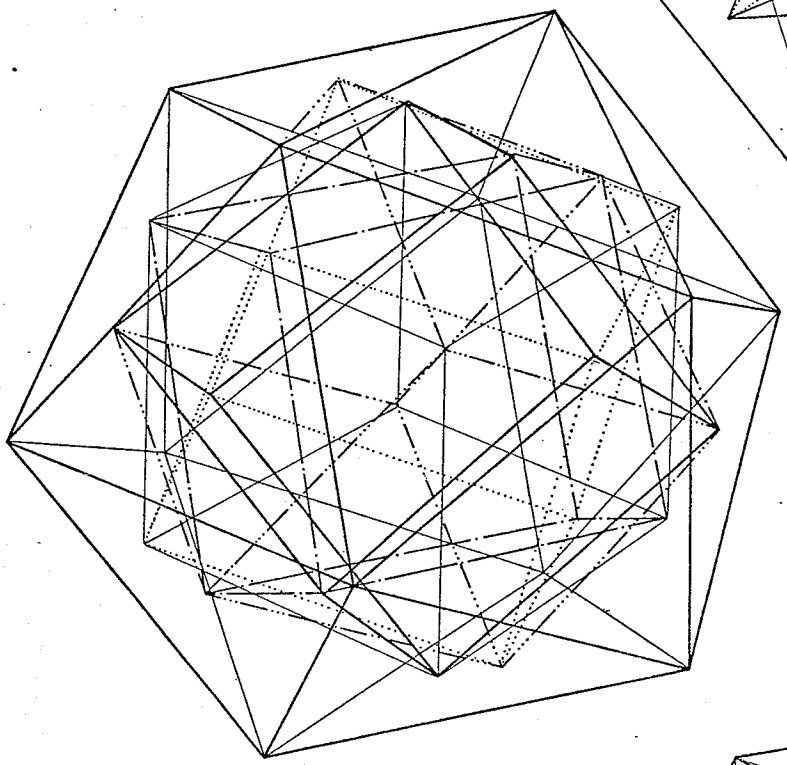
Et oktaeder kan indskrives i et ikosaeder i 5 forskellige stillinger. I hver stilling ligger oktaederets hjørner i midtpunktet af 6 af ikosaederets kanter, og dets fladeakser er sammenfaldende med 4 af ikosaederets fladeakser.



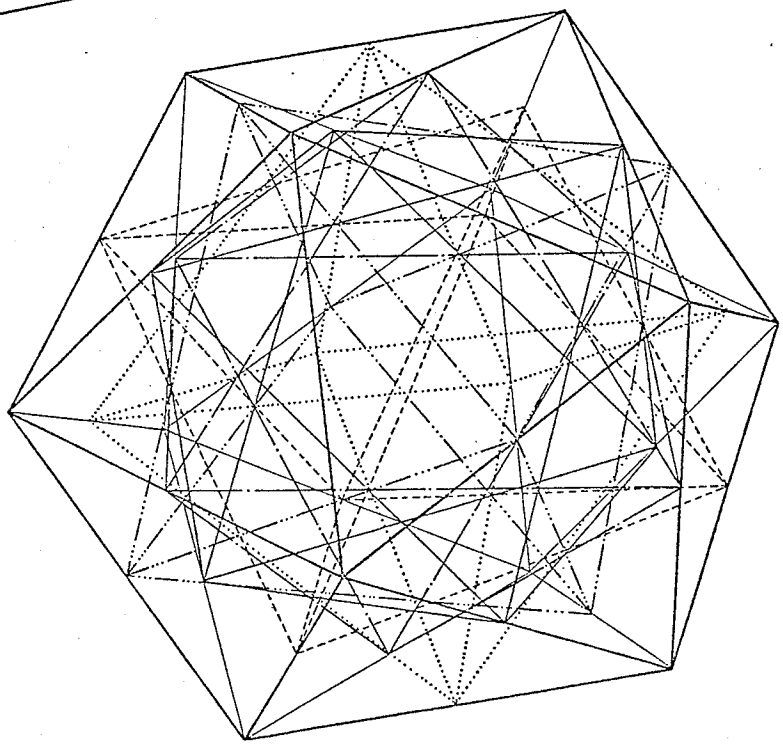
Et dodekaeder kan indskrives i et ikosaeder med alle sine hjørner i alle dodekaederets fladecentre. De to polyedre har sammenfaldende kantakser.

lo tetraedre
indskrevet i
et ikosaeder

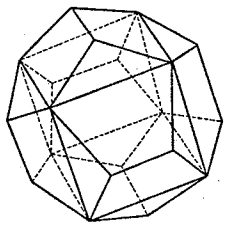




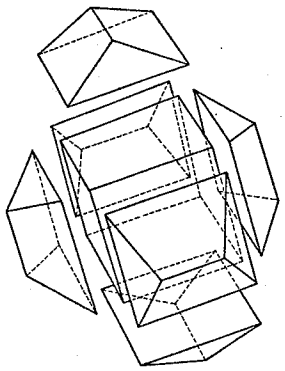
5 hexaedre
indskrevet i
et ikosaeder



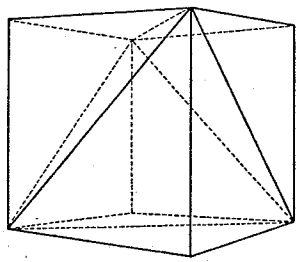
5 oktaedre
indskrevet i
et ikosaeder

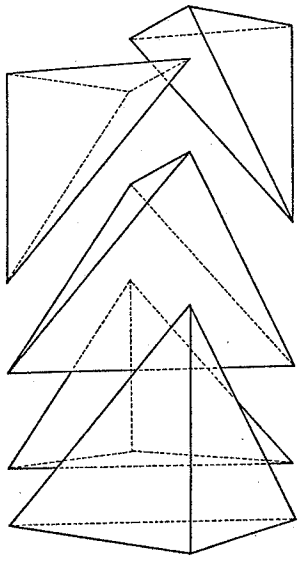


Blandt de mulige indskrivninger af de enkelte regulære polyedre i andre regulære polyedre er der nogle få, der har det tilfælles, at det indskrevne polyeder kan fremkomme ved simple hjørneafskæringer af det omskrevne polyeder.

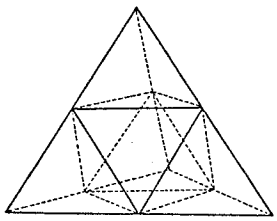


Således kan hexaederet dannes ved at lægge 6 plane, kongruente snit i dodekaederet. Hvert snit går gennem 4 af dodekaederets hjørner. Dodekaederet er nu opdelt i et regulært hexaeder og 6 pentaedre.

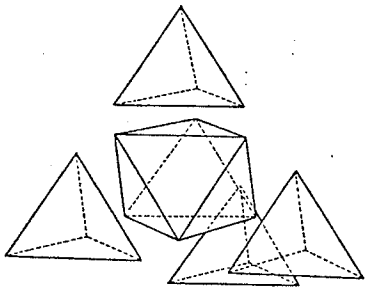


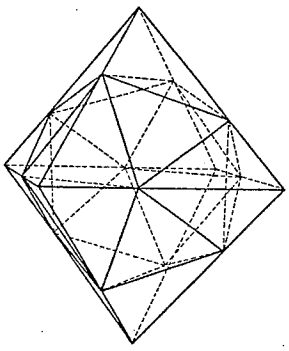


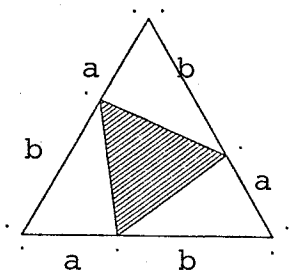
Med 4 plane, kongruente snit, hver gennem 3 af hexaederets hjørner, kan dette opdeles i et regulært tetraeder og 4 ikkeregulære tetraedre, der hver har ligesidet, trekantet grundflade og 3 ligebendede retvinklede sideflader.



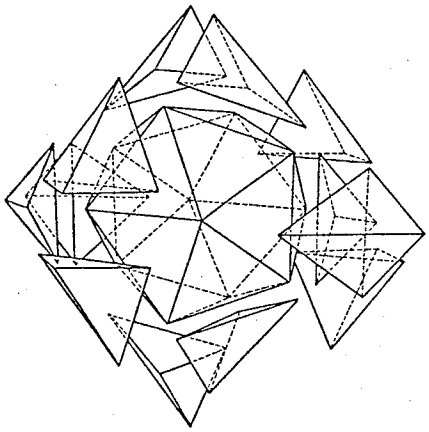
Det regulære tetraeder kan med 4 plane, kongruente snit, der alle går gennem midtpunktet af 3 af tetraederets kanter, opdeles i et regulært oktaeder og 4 regulære tetraedre.





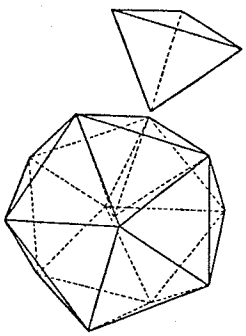


$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$



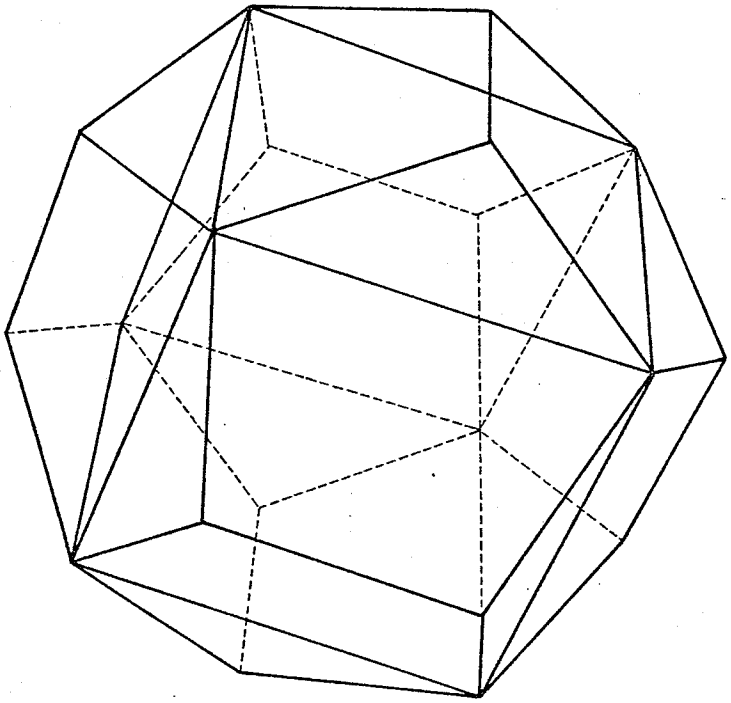
For at afskære oktaederets hjørner således, at det indskrevne ikosaeder fremkommer, opdeles oktaederets kanter i det gyldne snits forhold, og hver af oktaederets flader opdeles i 4 trekanter, hvoraf den centralt placerede er flade i ikosaederet.

Hjørneafskæringer efter de markerede snitlinier vil have form af konkave hexaedre, der hver med ét snit kan opdeles i 2 konvekse tetraedre.

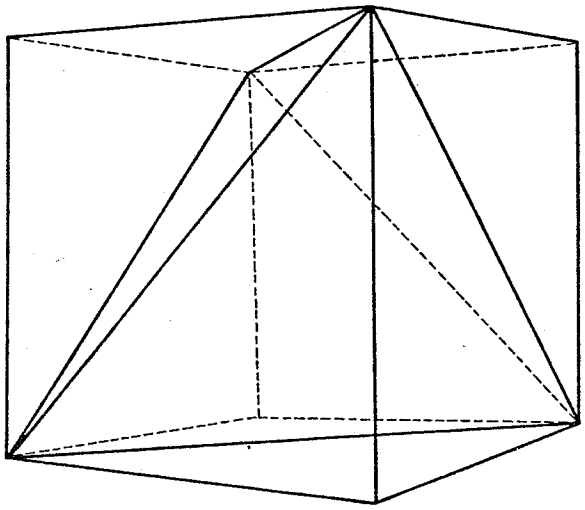


Det oprindelige dodekaeder er nu opdelt i 6 pentaedre. 16 ikke-regulære tetraedre af to forskellige størrelser, 4 regulære tetraedre, og et ikosaeder, der kan opdeles i 20 ikke-regulære tetraedre, der alle har toppunkt i ikosaederets centrum.

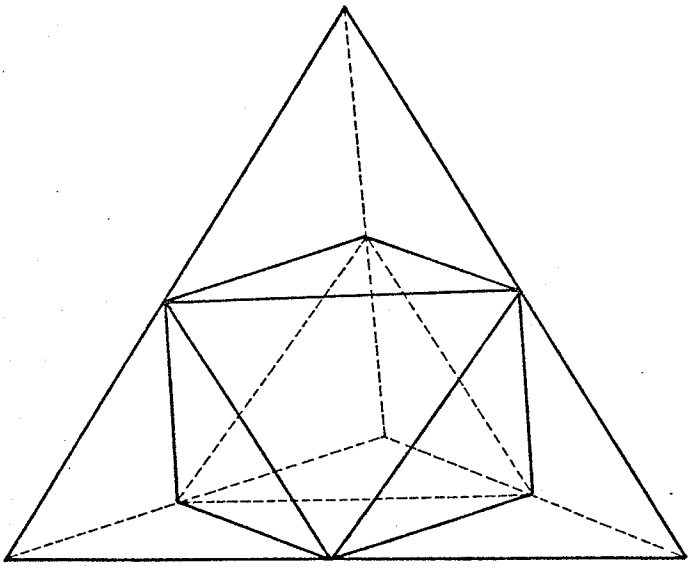
De indskrevne polyedre fremkommer ved konkurrente hjørneafskæringer af de omskrevne polyedre.



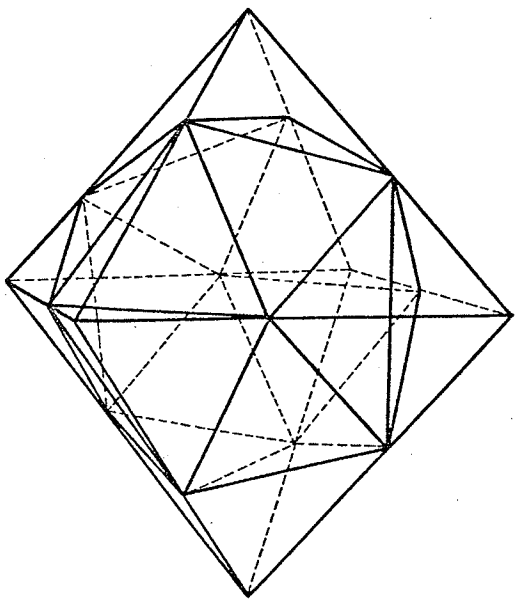
hexaeder indskrevet i dodekaeder



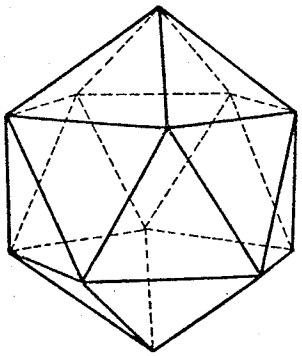
tetraeder indskrevet i hexaeder



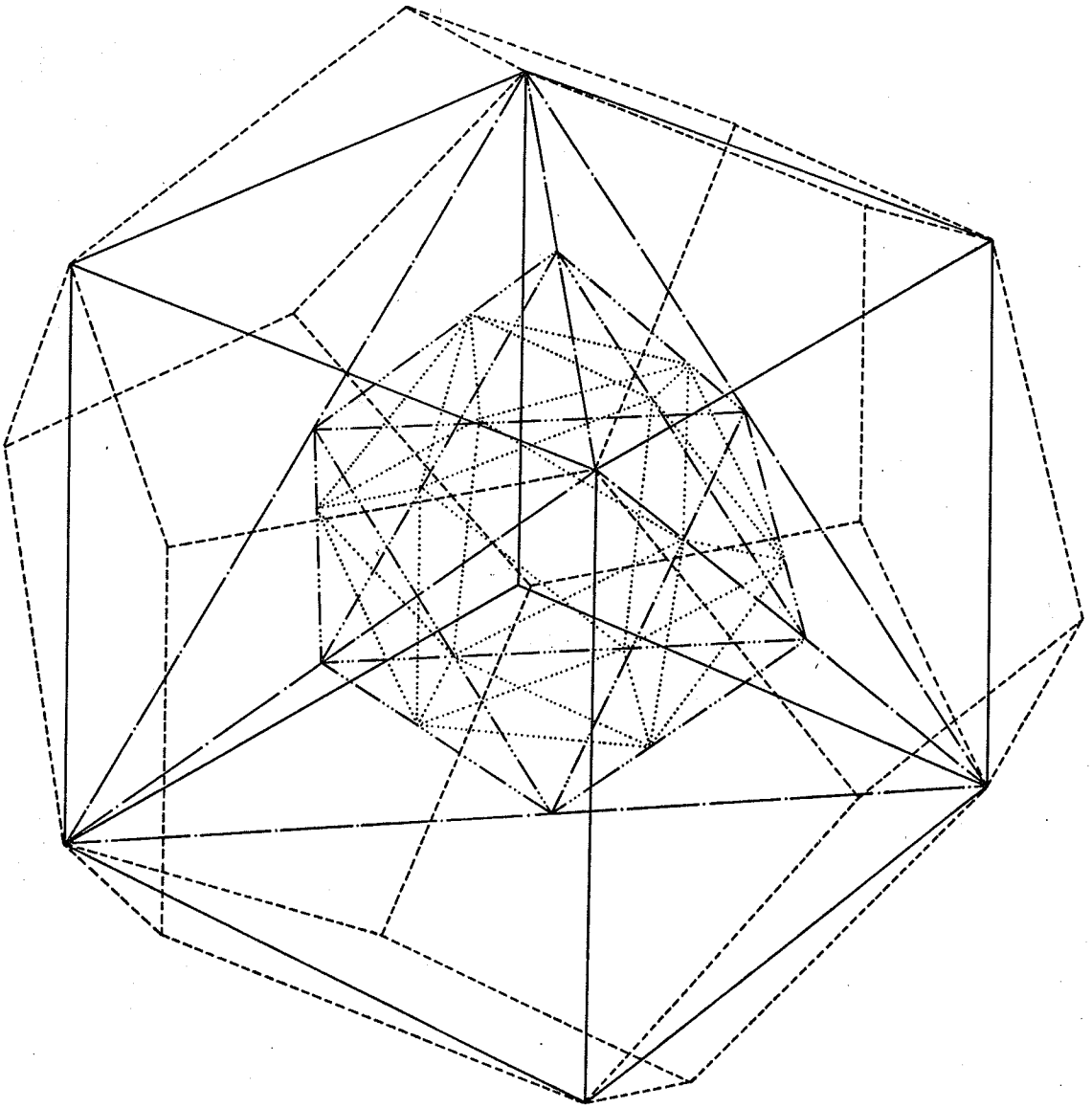
oktaeder indskrevet i tetraeder



ikosaeder indskrevet i oktaeder



ikosaeder



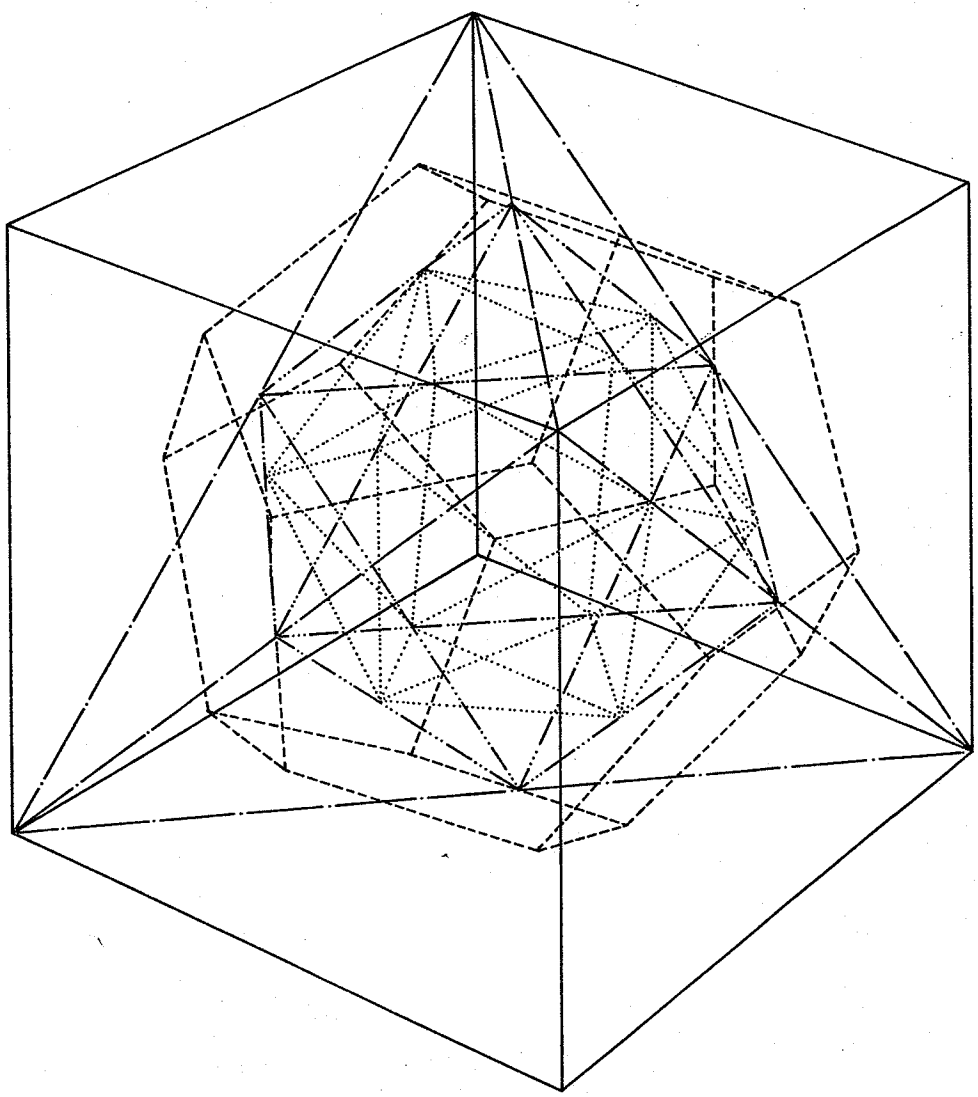
I den nævnte indskrivningsorden: altså yderst dodekaederet, dernæst hexaederet, tetraederet, oktaederet og inderst ikosaederet, er kantlængderne på de enkelte polyedre som følger:

Hvis ikosaederets kant, I_a, sættes til 1, vil dodekaederets kant, D_a, være

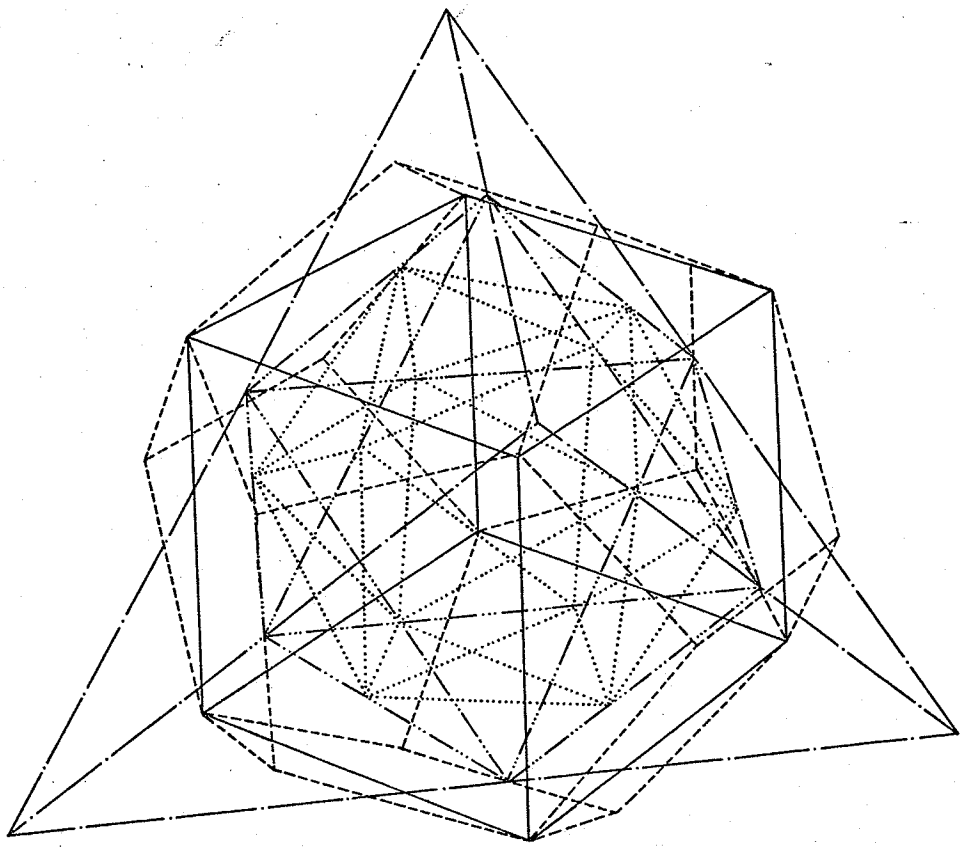
$$1 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618$$

De to kanter har således det gyldne snits forhold til hinanden. Hexaederets kant H_a vil være lig med summen af I_a og D_a = 2,618.

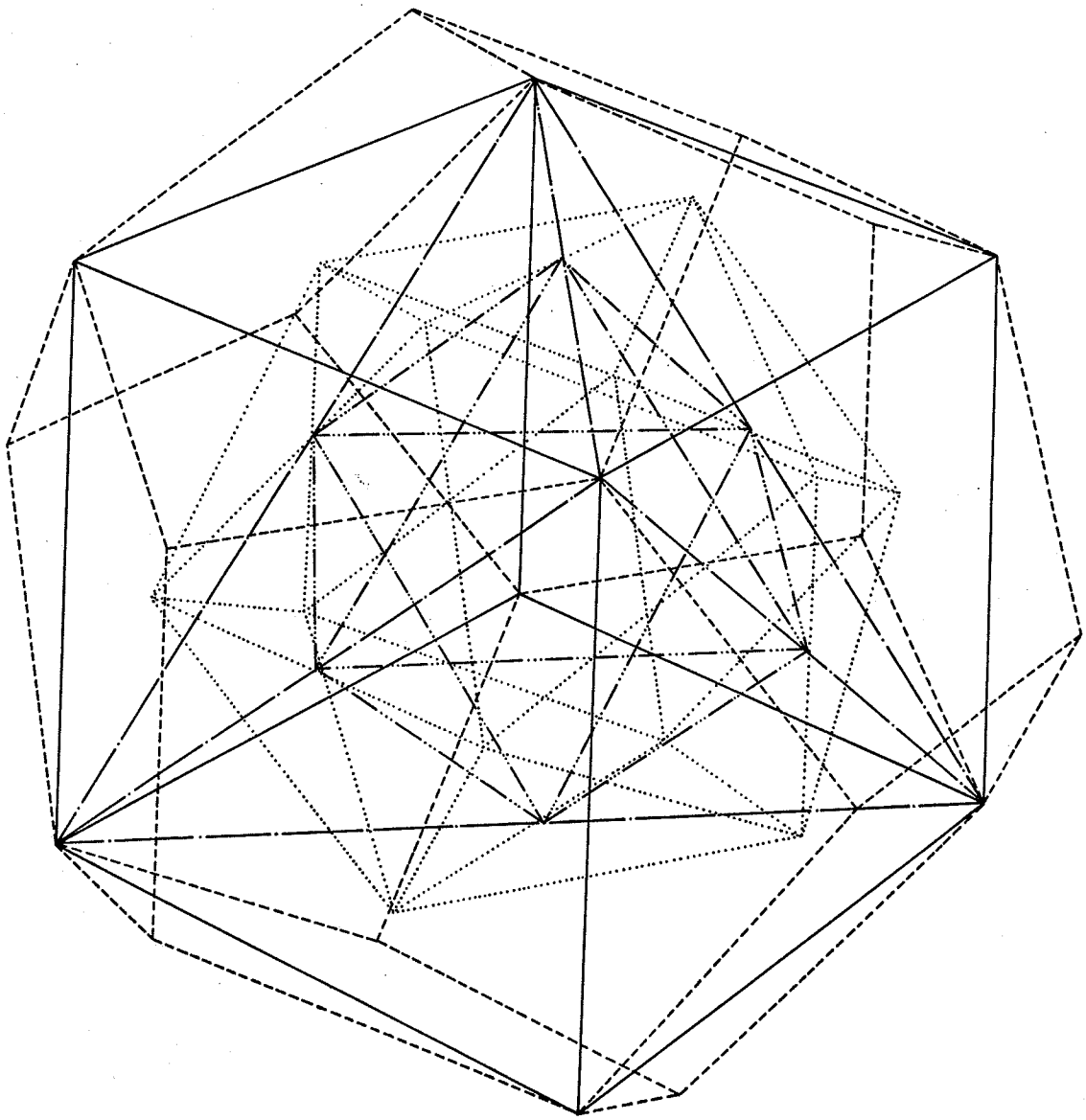
Tetraederets kant T_a vil være lig med $H_a \sqrt{2}$ = 3,702 og oktaederets kant vil være lig med 1/2 T_a = 1,851.



Hvis indskrivningsrækkefølgen ændres, hvad angår dodekaederets placering, således at dette i stedet for at omskrive hexaederet i stedet indskrives i dette, vil dodekaederets kant blive lig med ikosaederets kant, altså 1.



Hvis dernæst hexaederet som nu er yderst rykkes ind i dodekaederet i dennes nye position, vil hexaederets kant blive 1.618.

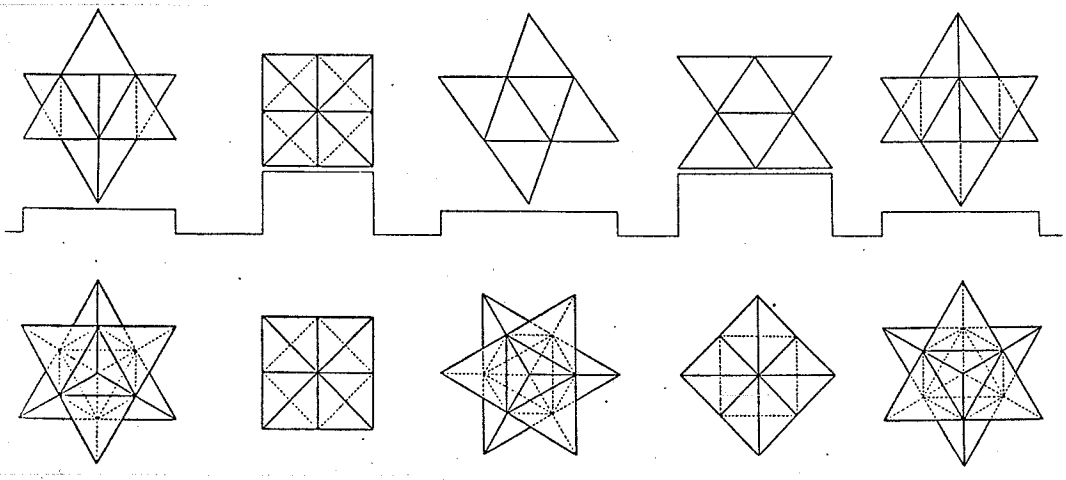


I den førstnævnte indskrivningsrækkefølge var dodekaederets kant 1,618 og hexaederets kant 2,618 rykkes ikosaederet i denne indskrivning ud så dets kanter ligger i hexaederets planer vil ikosaederets kantlængde blive den samme som dodekaederets, altså 1,618.

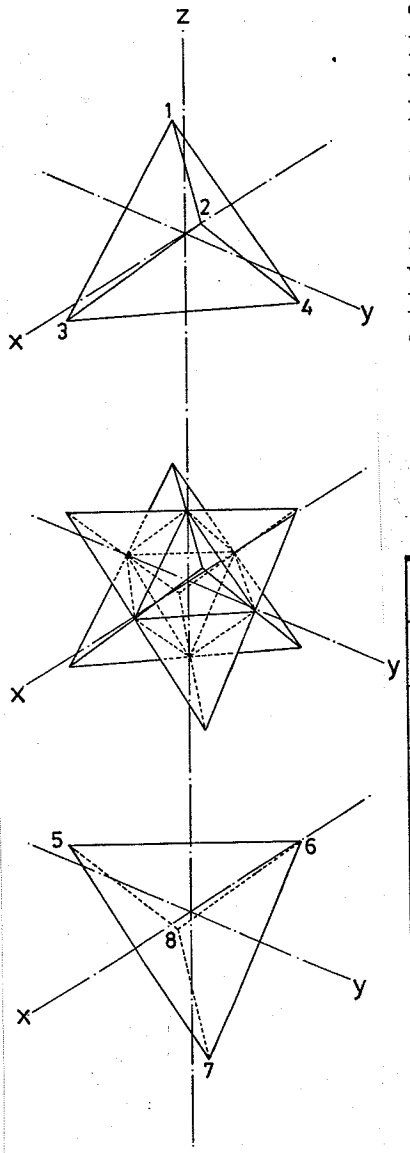
Sammenbyggede polyedre

Hvis man sammenbygger et polyeder med dets reciprokke polyeder, således at aksernes indbyrdes stillinger er den samme som vist ved indskrivningen, men hvor polyedrenes størrelser ændres, således at de to polyedres kanter skærer hinanden, fås et nyt sæt af rumlige former, hvis overflader består af regulære 3, 4 eller 5-sidede pyramider, og hvis fælles volumen er regulære eller halvregulære polyedre.

To tetraedre



Retvinklet projektion

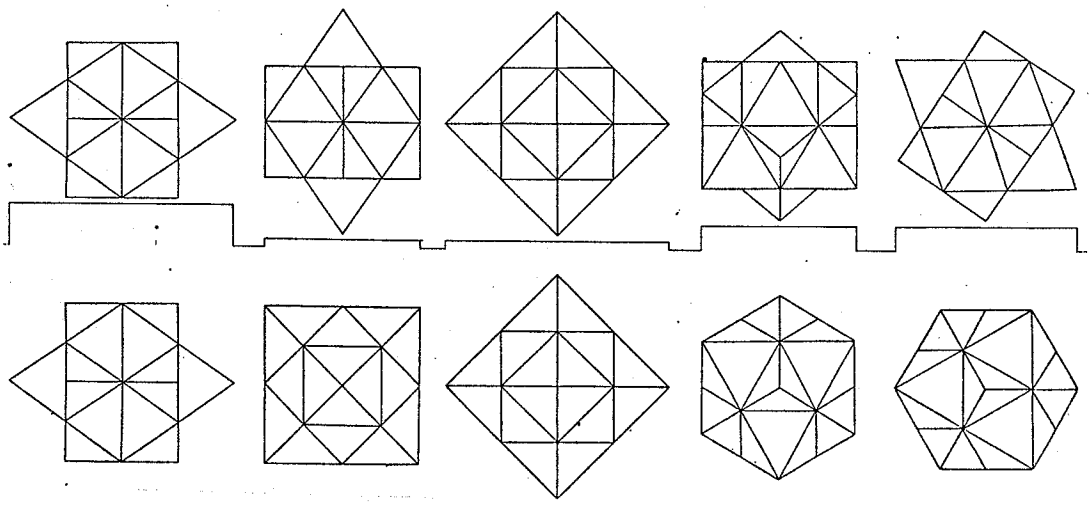


To kongruente, regulære tetraedre sammenbygget så deres kanter halveres og står vinkelret på hinanden, har en overflade bestående af 8 regulære tetraedre (hvis frie hjørner svarer til et regulært hexaeders hjørner).

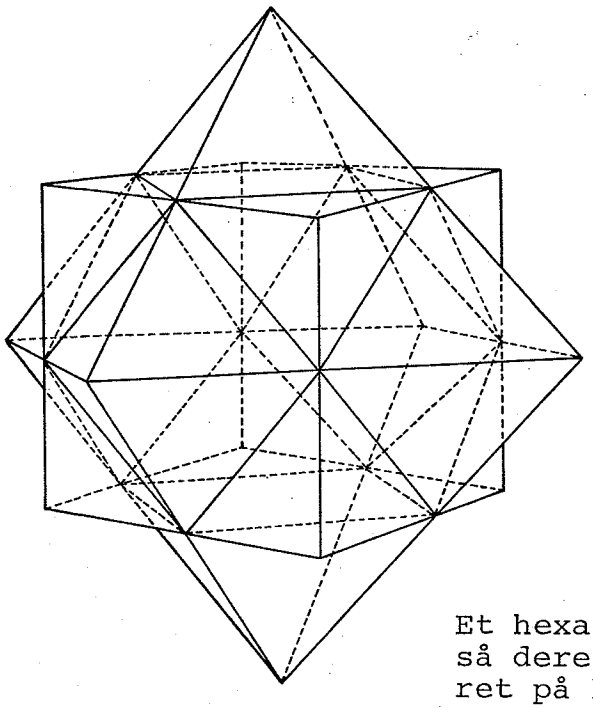
De to sammenbyggede tetraedres fælles volumen er et regulært oktaeder, hvis hjørneakser er sammenfaldende med tetraedrenes kantakser.

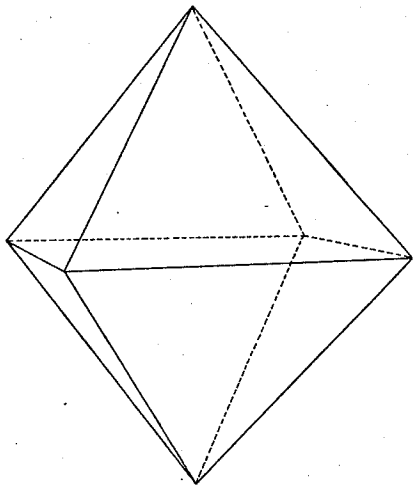
To tetraedre	X	Y	Z
T1	÷1	÷1	1
T2	1	1	1
T3	1	÷1	÷1
T4	÷1	1	÷1
T5	1	÷1	1
T6	÷1	1	1
T7	1	1	÷1
T8	÷1	÷1	÷1

Hexaeder + oktaeder

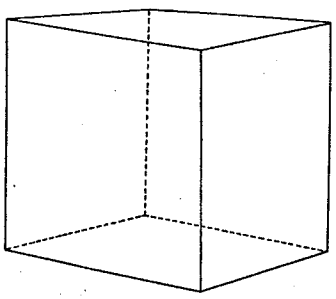


Retvinklet projektion





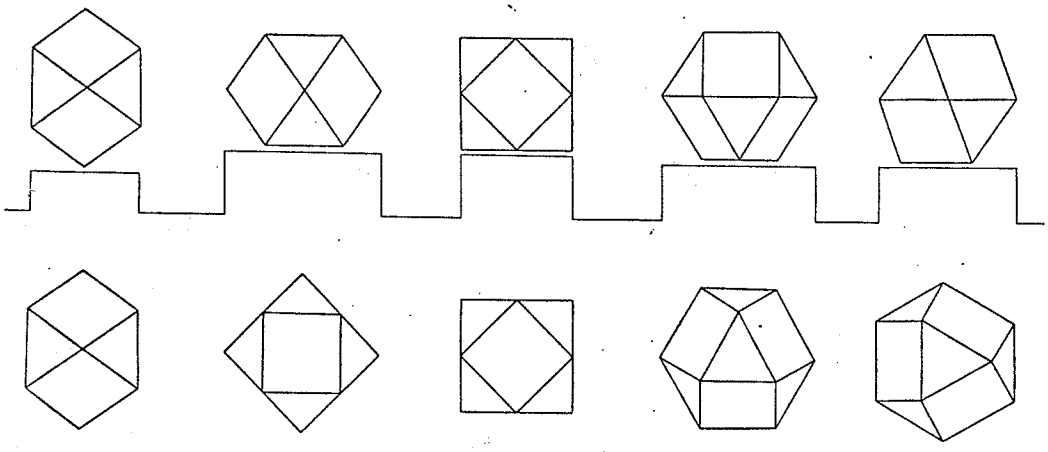
Et hexaeder og et oktaeder sammenbygget så deres kanter halveres og står vinkelret på hinanden, har en overflade bestående af 8 regulære, tresidede pyramider, og 6 regulære firesidede pyramider. Deres fælles volumen er et kube-oktaeder.



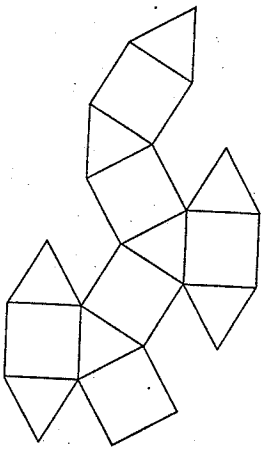
Ved kombination af de angivne koordinater for henholdsvis hexaederet og oksaederet vil oktaederet være indskrevet i hexaederet.

For at vise de to legemer sammenbygget som ovenfor beskrevet, må enten de angivne hexaeder-koordinater halveres eller oktaeder-koordinaterne fordobles.

Kubeoktaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Kubeoktaederet har 14 sideflader, hvoraf 8 er ligesidede trekanter, og 6 er kvadratiske. To-plansvinklen er 125,27°.

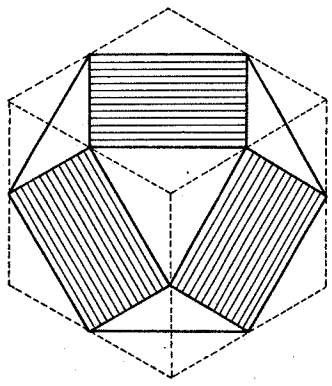
Hjørner:

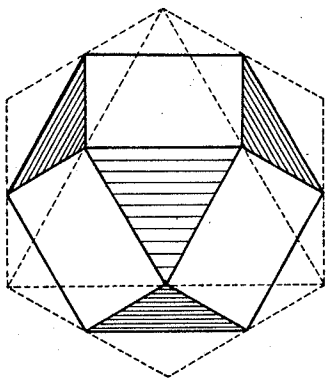
Hvert hjørne begrænses af fire flader. Der er ialt 12 hjørner.

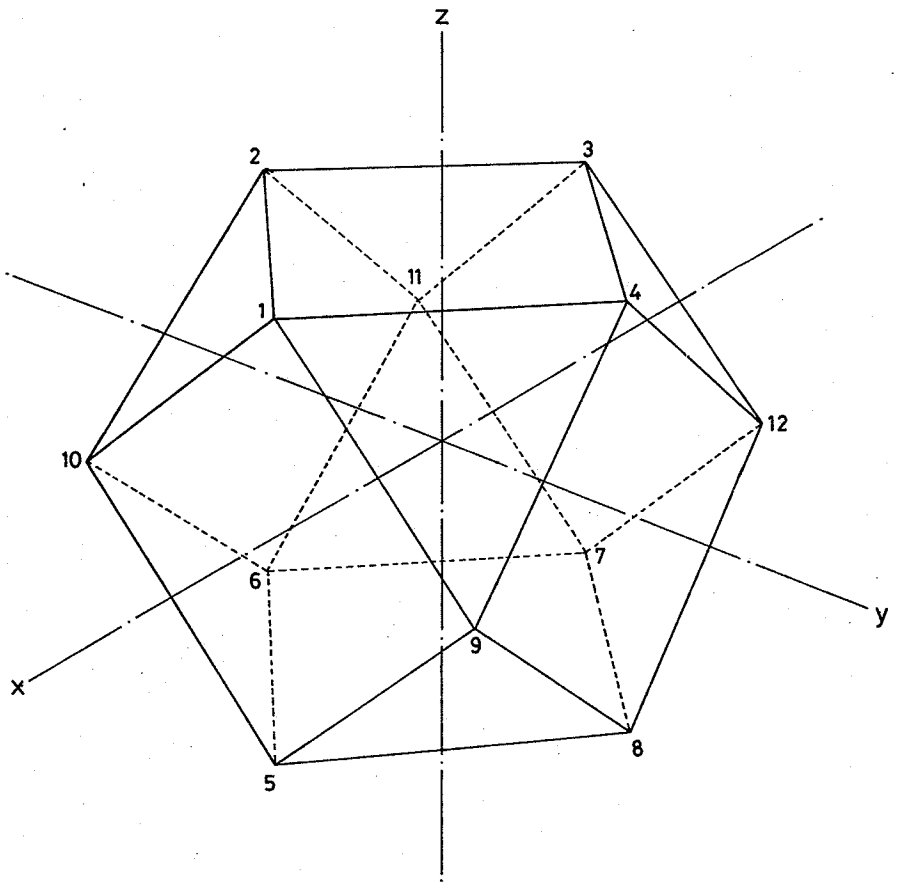
Kanter:

Kubeoktaederet har 24 kanter (a). Det kan indskrives i et hexaeder med kantlængden H_a og et oktaeder med kantlængden O_a.

a: H_a = 1:$\sqrt{2}$ = 0,707, a:O_a = 0,5.

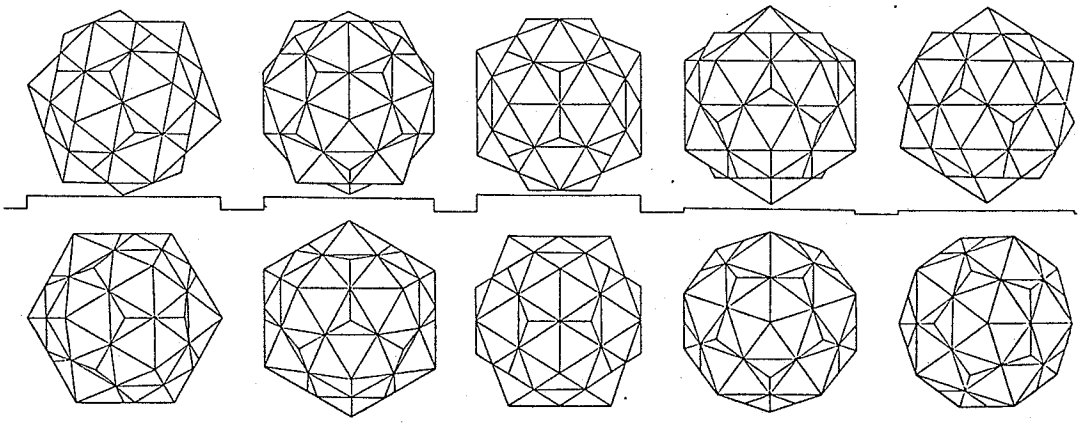




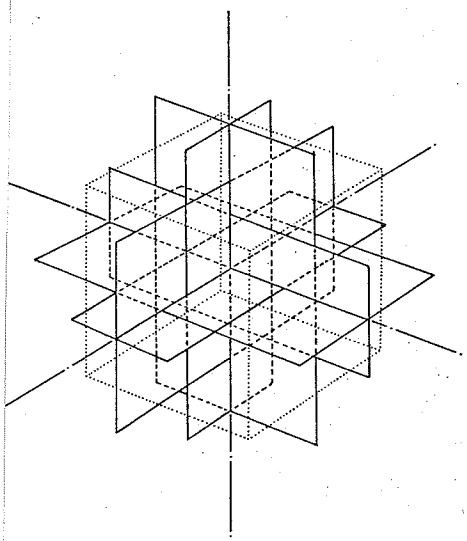


Kube-oktaeder	X	Y	Z
K1	1	0	1
K2	0	÷1	1
K3	÷1	0	1
K4	0	1	1
K5	1	0	÷1
K6	0	÷1	÷1
K7	÷1	0	÷1
K8	0	1	÷1
K9	1	1	0
K10	1	÷1	0
K11	÷1	÷1	0
K12	÷1	1	0

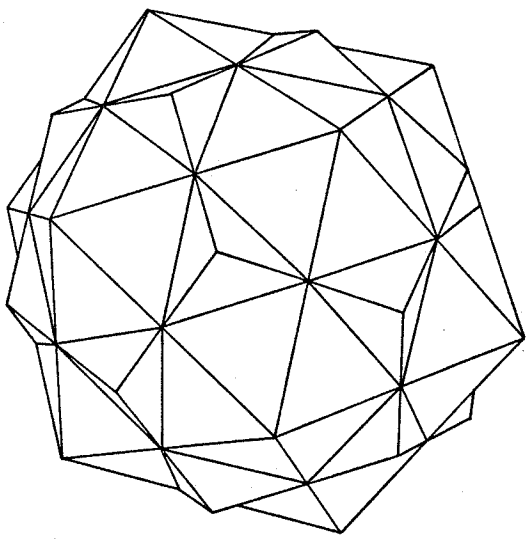
Ikosaeder + dodekaeder

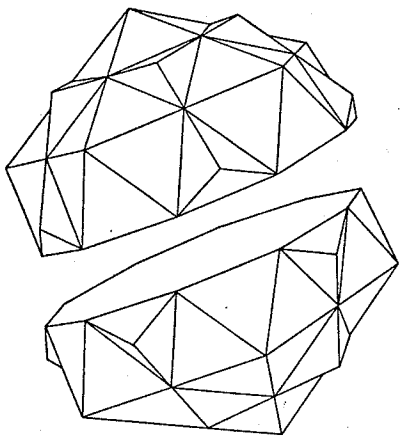


Retvinklet projektion



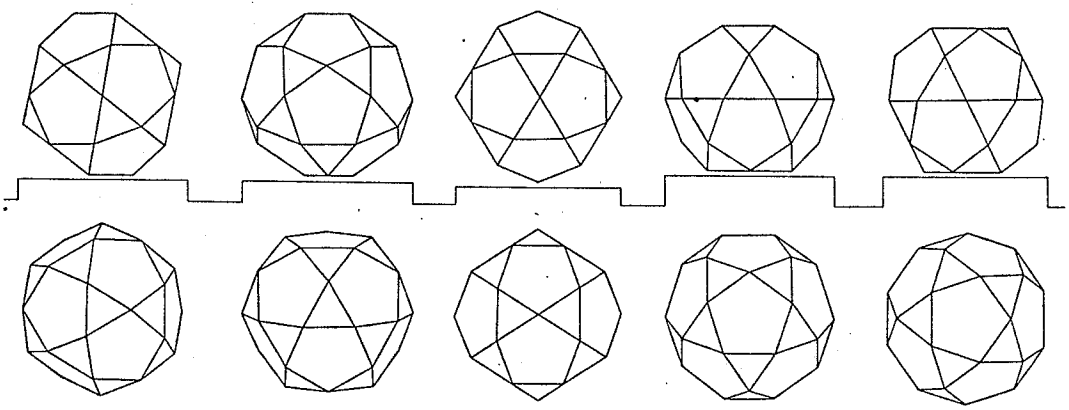
Et ikosaeder og et dodekaeder sammenbygget så deres kanter halverer og står vinkelret på hinanden har en overflade bestående af 20 regulære tresidede pyramider og 12 regulære femsidede pyramider. Deres fælles volumen er et ikosadodekaeder.



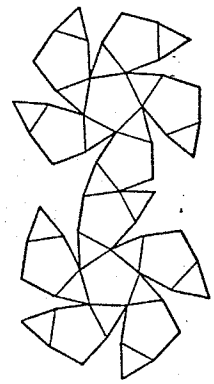


Det sammenbyggede legeme kan med 5 forskellige snit opdeles i to kongruente legemer uden at opdele overfladens grundelementer. Grundfladen i de opdelte legemer er regulære 10-kanter.

Ikosadodekaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Ikosadodekaederet har 32 sideflader, hvoraf 20 er ligesidede trekanter, og 12 er regulære femkanter. To-plansvinklen er $142{,}62^{o}$.

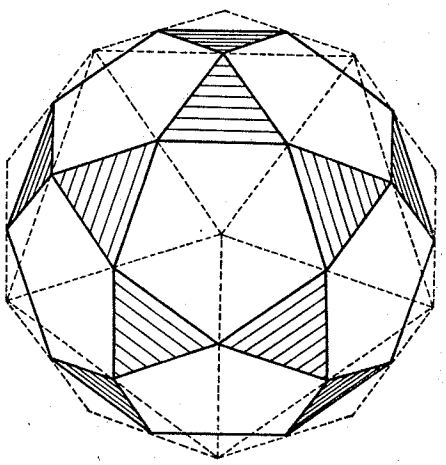
Hjørner:

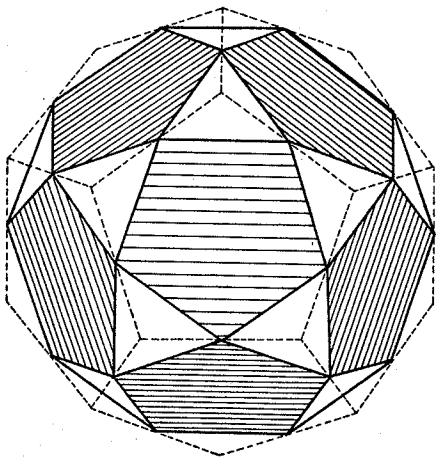
Hvert hjørne begrænses af 4 flader. Der er ialt 30 hjørner.

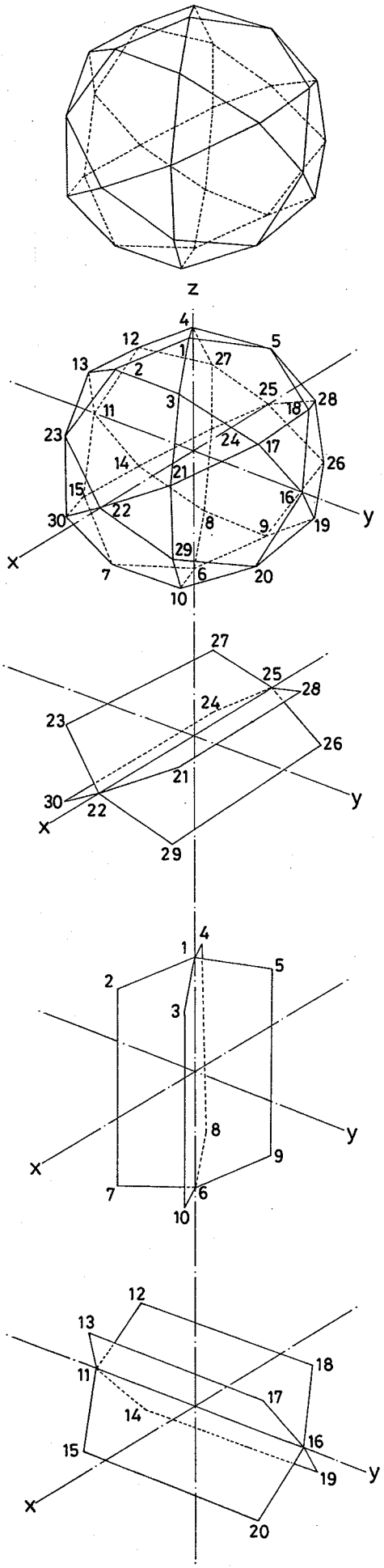
Kanter:

Ikosadodekaederet har 60 kanter (a). Det kan indskrives i et ikosaeder med kantlængden I_a og et dodekaeder med kantlængden D_a.

$a:I_a = \frac{1}{2}$; $a:D_a = (\sqrt{5}+1):4 = 0{,}809$.

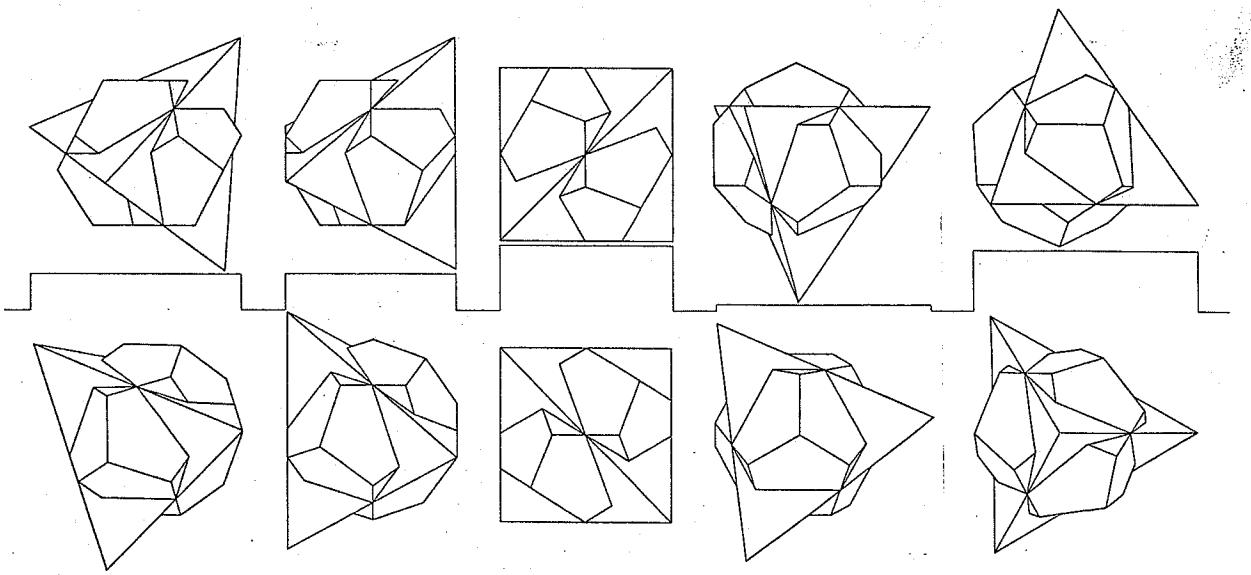




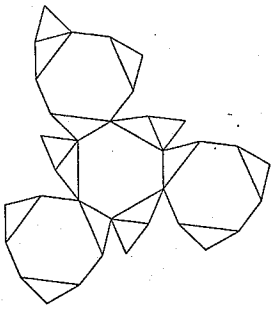


Ikosa-dodekaeder	X	Y	Z
ID:1	0	0	1
ID:2	0,5	÷ 0,3	0,8
ID:3	0,5	0,3	0,8
ID:4	÷ 0,5	÷ 0,3	0,8
ID:5	÷ 0,5	0,3	÷ 0,8
ID:6	0	÷ 0	÷ 1
ID:7	÷ 0,5	÷ 0,3	÷ 0,8
ID:8	÷0,5	÷ 0,3	0,8
ID:9	÷0,5	0,3	÷0,8
ID:10	0,5	0,3	÷0,8
ID:11	0	÷ 1	0
ID:12	÷ 0,3	÷ 0,8	0,5
ID:13	0,3	÷ 0,8	0,5
ID:14	÷ 0,3	÷ 0,8	÷ 0,5
ID:15	0,3	÷ 0,8	÷ 0,5
ID:16	0	1	0
ID:17	0,3	0,8	0,5
ID:18	÷ 0,3	0,8	0,5
ID:19	÷ 0,3	0,8	0,5
ID:20	0,3	0,8	÷ 0,5
ID:21	0,8	0,5	0,3
ID:22	1	0	0
ID:23	0,8	÷ 0,5	0,3
ID:24	÷ 0,8	÷ 0,5	÷ 0,3
ID:25	÷ 1	0	0
ID:26	÷ 0,8	0,5	÷ 0,3
ID:27	÷ 0,8	÷ 0,5	0,3
ID:28	÷ 0,8	0,5	0,3
ID: 29	0,8	0,5	÷ 0,3
ID: 30	0,8	÷ 0,5	÷ 0,3

Tetraeder + dodekaeder

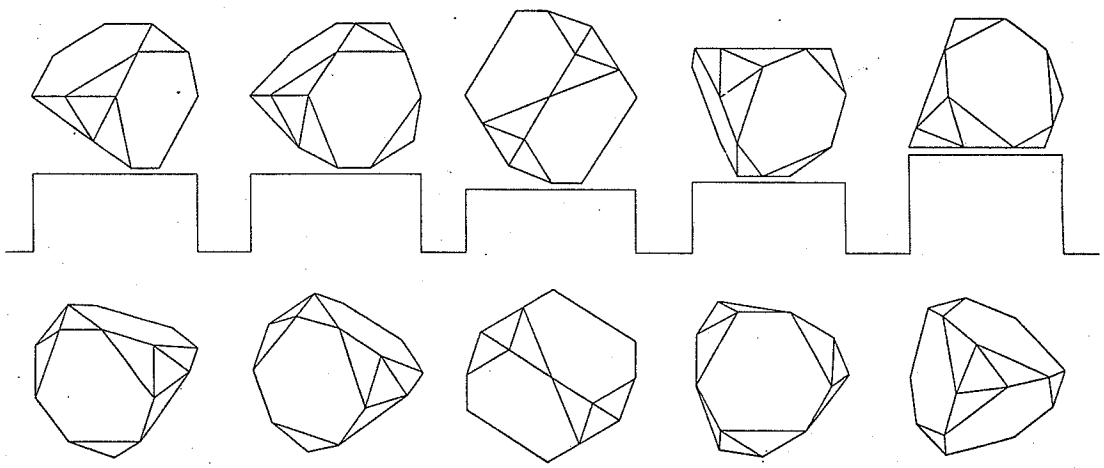


Retvinklet projektion



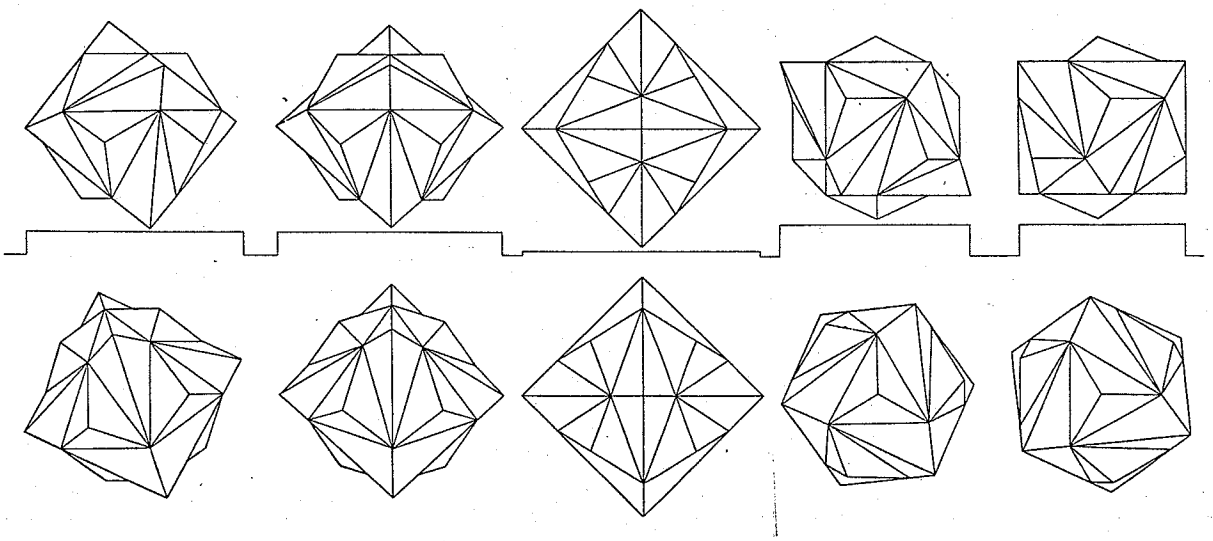
Udfoldning af fællesvolumen

Et regulært tetraeder og et regulært dodekaeder sammenbygget, så 4 af dodekaederets kanter deler tetraedets kanter på midten (fælles kantakser), har som fælles volumen et ikke regulært ikosaeder, hvis overflader består af 4 sekskantede, 12 ligebenede og 4 ligesidede trekantflader.

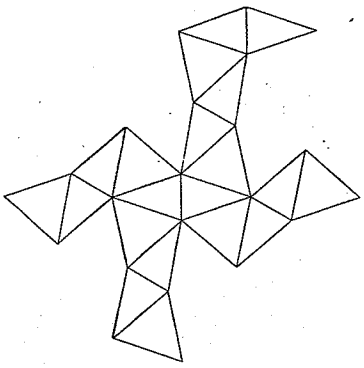


Fællesvolumen totraeder + dodekaeder

Oktaeder + dodekaeder

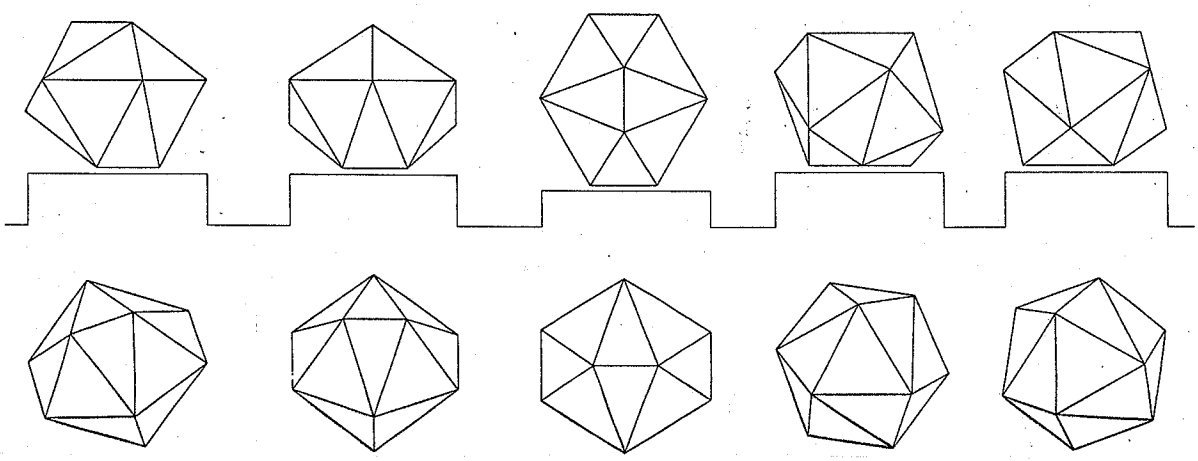


Retvinklet projektion

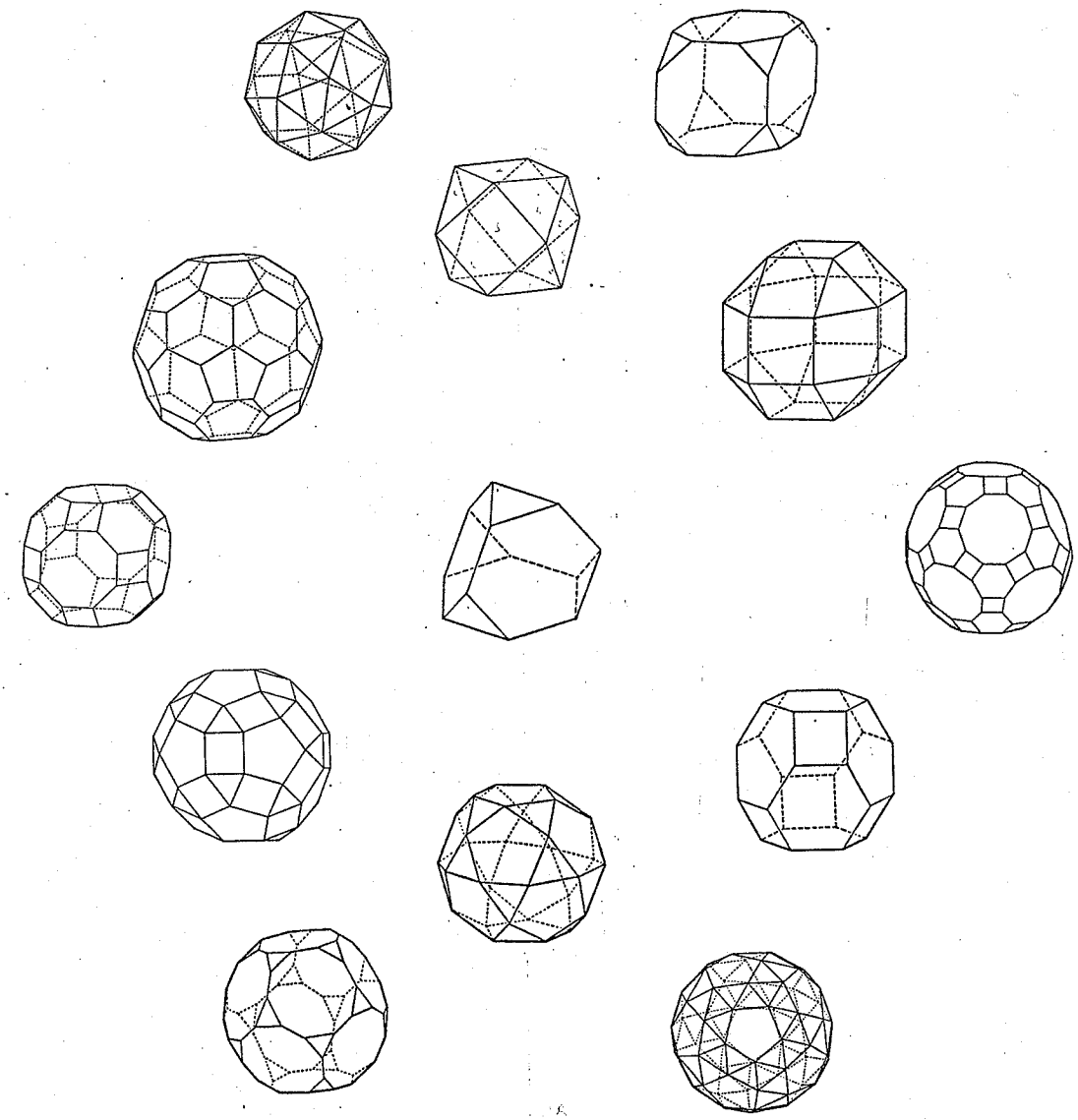


Udfoldning af fællesvolumen

Et regulært oktaeder og et regulært dodekaeder sammenbygget så oktaederets hjørneakser bliver kantakser i dodekaederet og således, at alle dodekaederets hjørner ligger på oktaederets kanter, har som fællesvolumen et ikke regulært ikosaeder, hvis overflade består af 8 ligesidede og 12 ligebenede trekantflader.



Fællesvolumen for oktaeder + dodekaeder



Halvregulære polyedre

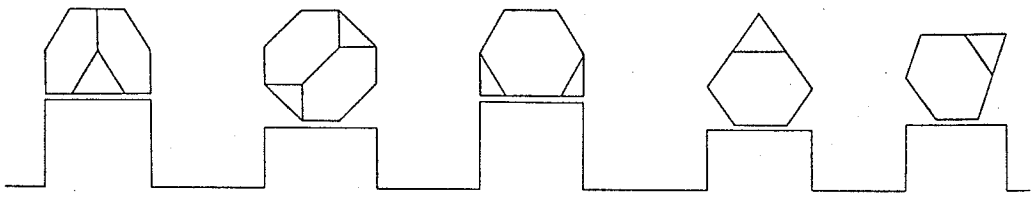
Kubeoktaederet og ikosadodekaederet er to af en række halvregulære polyedre, d.v.s. polyedre, hvis sideflader består af forskellige regulære polygoner.

Alle de halvregulære polyedre er udledt af de regulære, og fremkommer enten ved hjørneafskæring af disse, eller ved hjørneafskæringer af andre halvregulære polyedre.

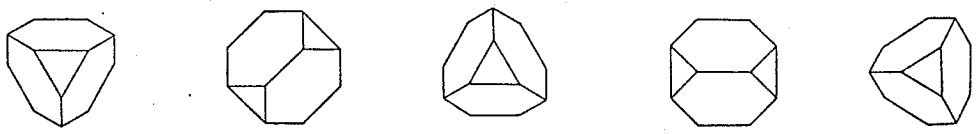
D.v.s. at en række af de regulære polyedres egenskaber vedr. f.eks. omskrivning, indskrivning og sammenbygning med andre legemer bevares.

Når man kender et halvregulært polyeders oprindelse, er det derfor heller ikke vanskeligt at bestemme alle dennes størrelser, det være sig kantlængder, overflade, volumen, radius i den omskrevne kugle, to-plansvinkler etc.

Afskåret tetraeder

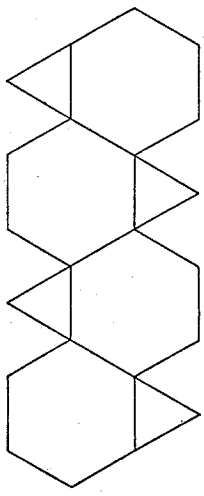


Retvinklet projektion



Flader:

Det afskårne tetraeder har 8 sideflader, hvoraf 4 er regulære sekskanter og 4 ligesidede trekanter. To-plansvinklen er 70,53° og 109,47°.



udfoldning

Hjørner:

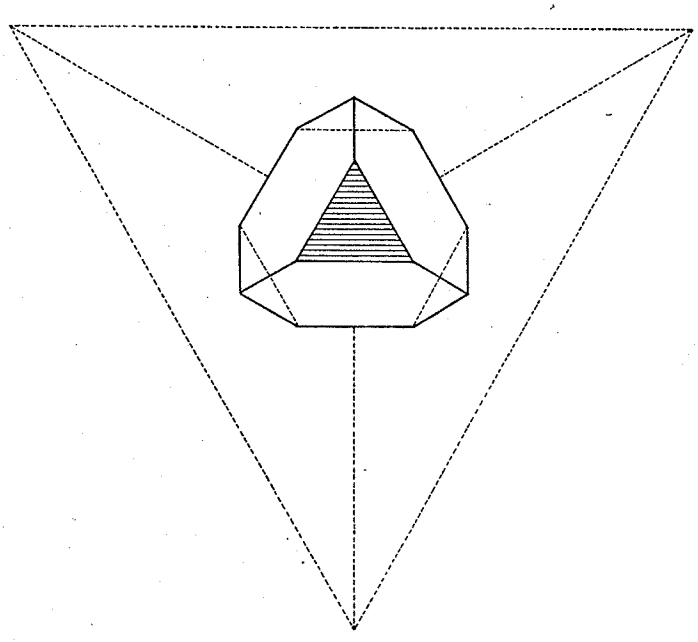
Hvert hjørne begrænses af 3 flader. Der er ialt 12 hjørner.

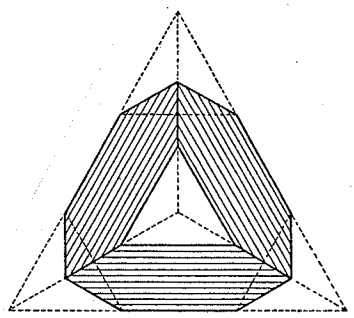
Kanter:

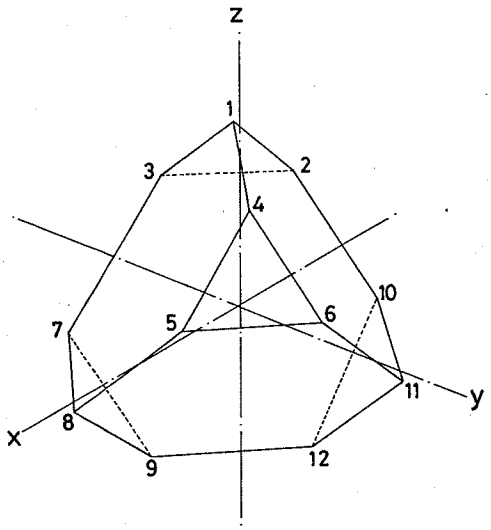
Det afskårne tetraeder har 18 kanter (a). Det kan indskrives i et tetraeder med kantlængden T_a, hvor forholdet med a og T_a er 1/3.

I dette tilfælde vil de sekskantede sideflader ligge i plan med tetraederets sideflader. Det kan også indskrives i et tetraeder med den dobbelte kantlængde.

I dette tilfælde vil de trekantede sideflader ligge i plan med tetraederets sideflader.

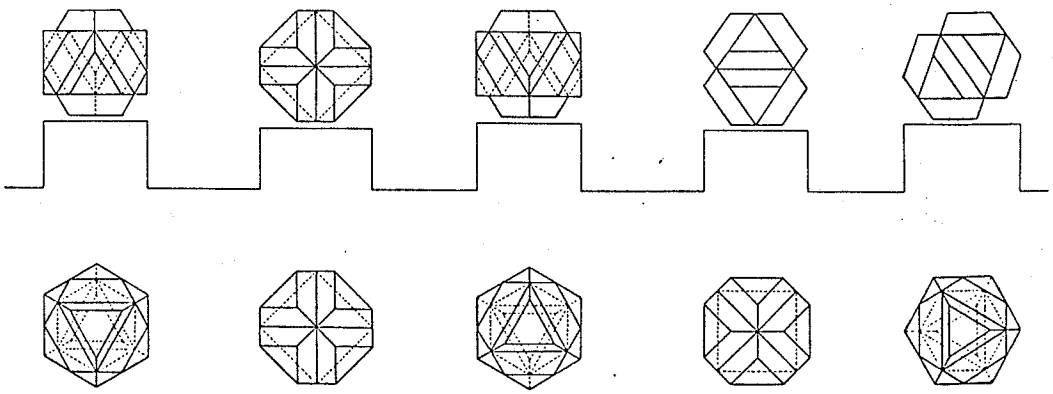




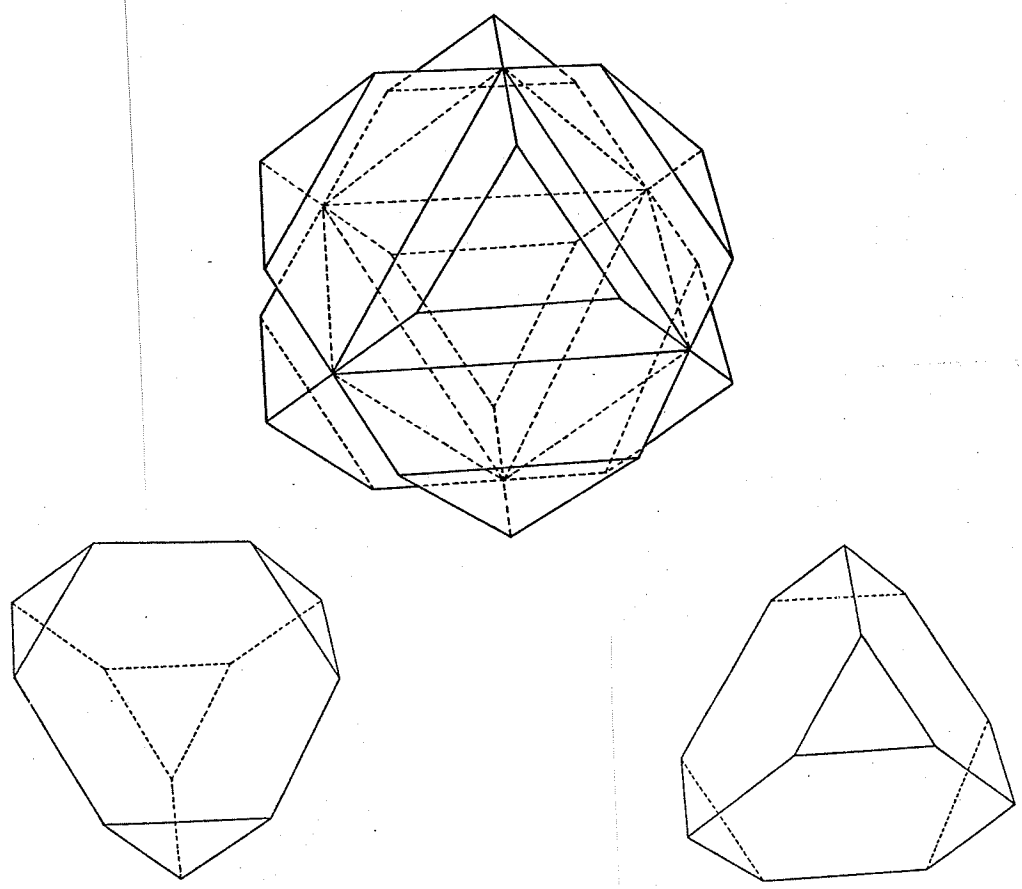


Afskåret tetraeder	X	Y	Z
AT1	÷ 1/3	÷ 1/3	1
AT2	÷ 1	÷ 1/3	1/3
AT3	÷ 1/3	÷ 1	1/3
AT4	1/3	1/3	1
AT5	1	1/3	1/3
AT6	1/3	1	1/3
AT7	1/3	÷ 1	÷ 1/3
AT8	1	÷ 1/3	÷ 1/3
AT9	1/3	÷ 1/3	÷ 1
AT10	÷ 1	1/3	÷ 1/3
AT11	÷ 1/3	1	÷ 1/3
AT12	÷ 1/3	1/3	÷ 1

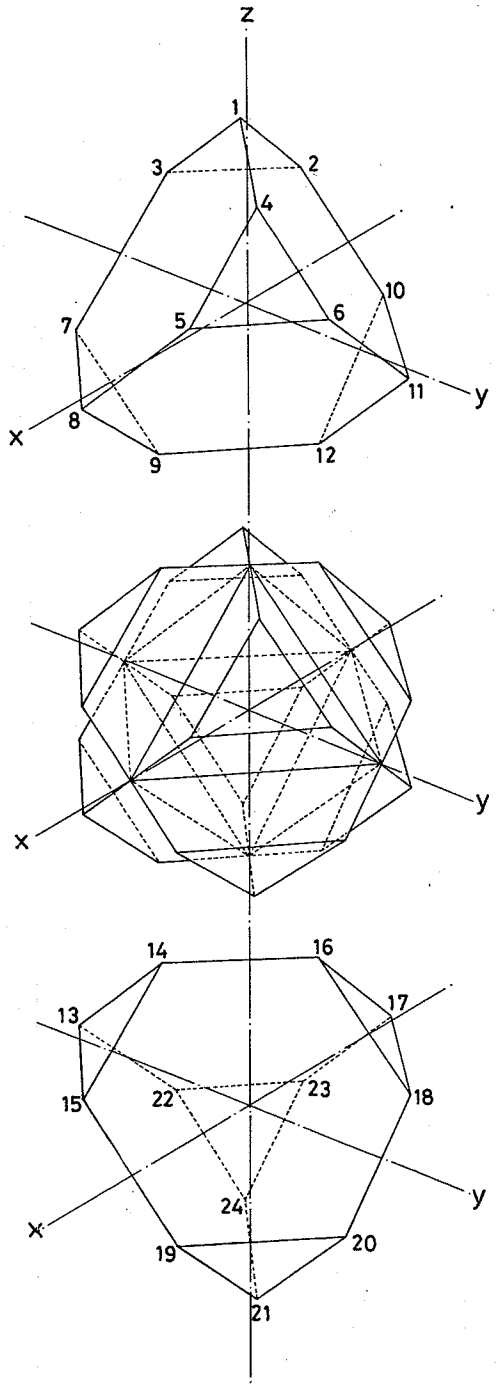
To afskårne tetraedre



Retvinklet projektion

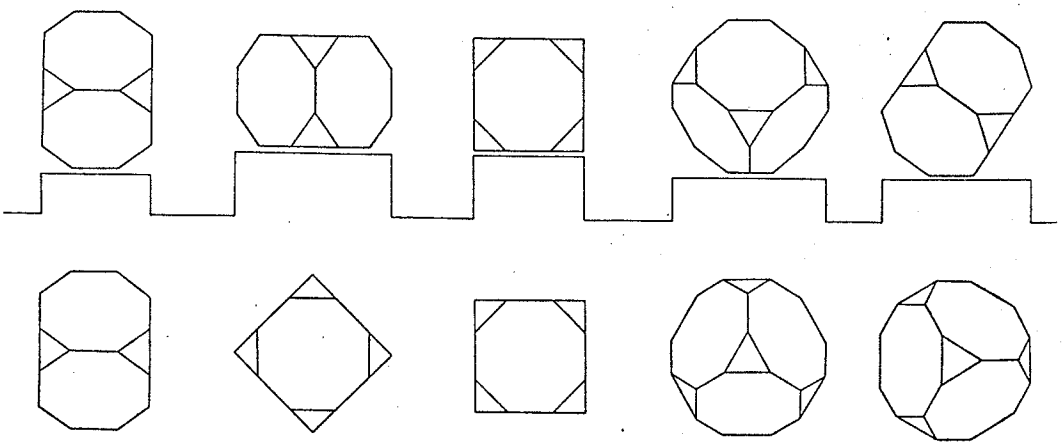


To kongruente, afskårne tetraedre, sammenbygget så 6 af deres kanter halverer og står vinkelret på hinanden, har en overflade bestående af 8 regulære, kongruente pyramidestubbe. Deres fællesvolumen er et oktaeder.

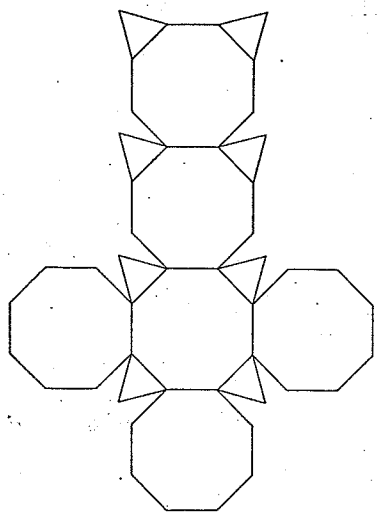


To afskårne tetraedre	X	Y	Z
AT1	÷ 1/3	÷ 1/3	1
AT2	÷ 1	÷ 1/3	1/3
AT3	÷ 1/3	÷ 1	1/3
AT4	1/3	1/3	1
AT5	1	1/3	1/3
AT6	1/3	1	1/3
AT7	1/3	÷ 1	÷ 1/3
AT8	1	÷ 1/3	÷ 1/3
AT9	1/3	÷ 1/3	÷ 1
AT10	÷ 1	1/3	÷ 1/3
AT11	÷ 1/3	1	÷ 1/3
AT12	÷ 1/3	1/3	÷ 1
AT13	1/3	÷ 1	1/3
AT14	1/3	÷ 1/3	1
AT15	1	÷ 1/3	1/3
AT16	÷ 1/3	1/3	1
AT17	÷ 1	1/3	1/3
AT18	÷ 1/3	1	1/3
AT19	1	1/3	÷ 1/3
AT20	1/3	1	÷ 1/3
AT21	1/3	1/3	÷ 1
AT22	÷ 1/3	÷ 1	÷ 1/3
AT23	÷ 1	÷ 1/3	÷ 1/3
AT24	÷ 1/3	÷ 1/3	÷ 1

Afskåret hexaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Det afskårne hexaeder har 14 sideflader, hvoraf 6 er regulære ottekantede, og 8 er ligesidede trekanter. To-plansvinklerne er 90^{o} og $125,27^{o}$.

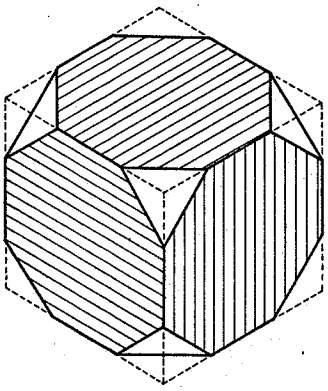
Hjørner:

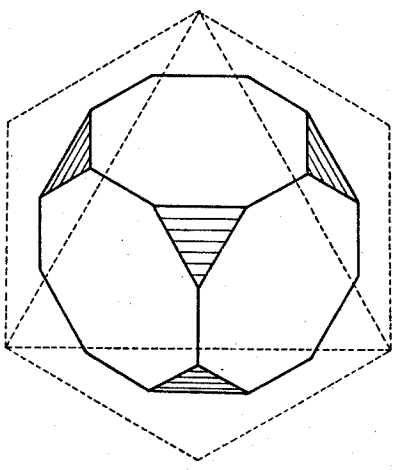
Hvert hjørne begrænses af 3 flader. Der er 24 hjørner ialt.

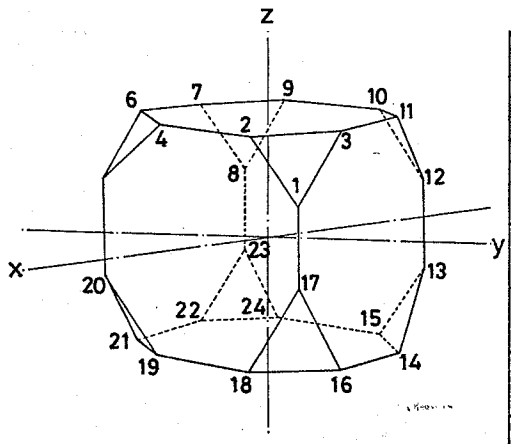
Kanter:

Det afskårne hexaeder har 36 kanter (a). Det kan indskrives i et hexaeder med kantlængden H_a og et oktaeder med kantlængden O_a.

$a:H_a = \sqrt{2} - 1 = 0,1414$; $a:O_a = 3\sqrt{2} - 4 = 0,243$.

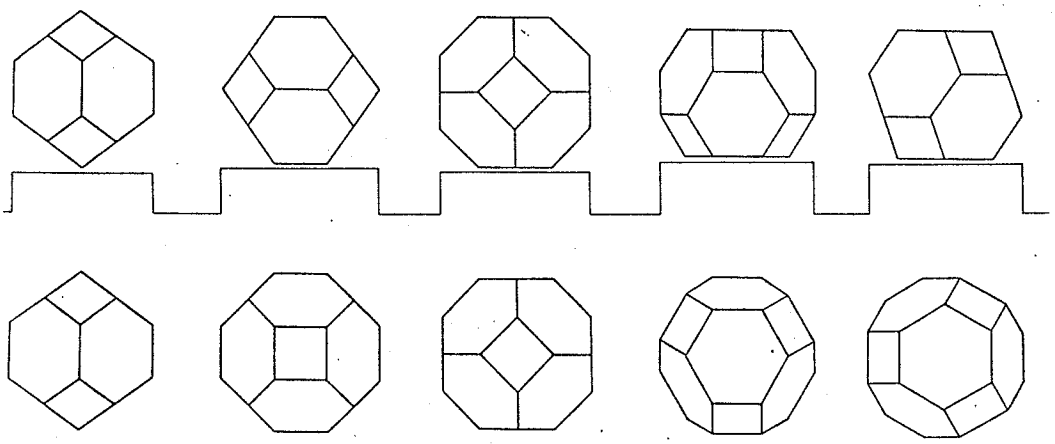




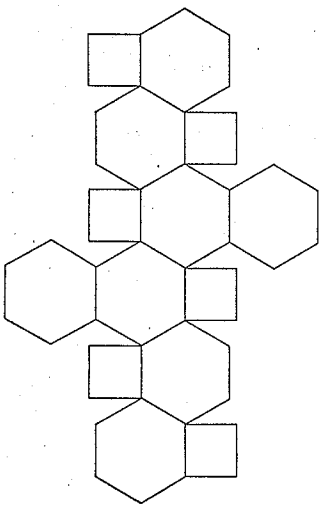


Afskåret hexaeder	X	Y	Z
AH1	1	1	0,414
AH2	1	0,414	1
AH3	0,414	1	1
AH4	1	÷ 0,414	1
AH5	1	÷ 1	0,414
AH6	0,414	÷ 1	1
AH7	÷ 0,414	÷ 1	1
AH8	÷ 1	÷ 1	0,414
AH9	÷ 1	÷ 0,414	1
AH10	÷ 1	0,414	1
AH11	÷ 0,414	1	1
AH12	÷ 1	1	0,414
AH13	÷ 1	1	÷ 0,414
AH14	÷ 0,414	1	÷ 1
AH15	÷ 1	0,414	÷ 1
AH16	0,414	1	÷ 1
AH17	1	1	÷ 0,414
AH18	1	0,414	÷ 1
AH19	1	÷ 0,414	÷ 1
AH20	1	÷ 1	÷ 0,414
AH21	0,414	÷ 1	1
AH22	÷ 0,414	÷ 1	÷ 1
AH23	÷ 1	÷ 1	÷ 0,414
AH24	÷ 1	÷ 0,414	÷ 1

Afskåret oktaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Det afskårne oktaeder har ialt 14 sideflader, hvoraf 6 er kvadratiske, og 8 er regulære sekskanter.

To-plans-vinklen mellem 6-kantede flader er 109,47°, og mellem 6-kantede og kvadratiske flader 125,27°.

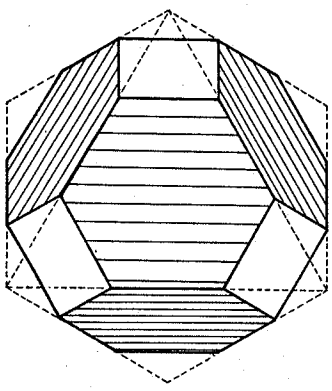
Hjørner:

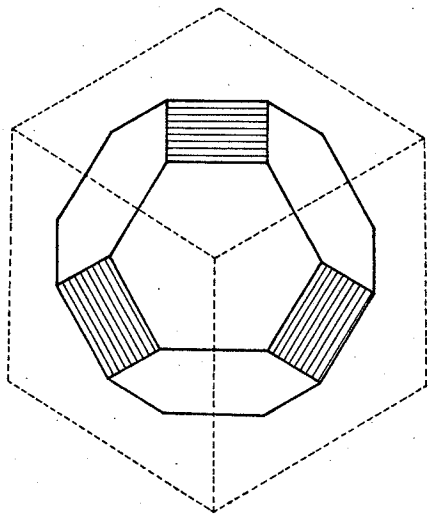
Hvert hjørne begrænses af tre flader. Der er ialt 24 hjørner.

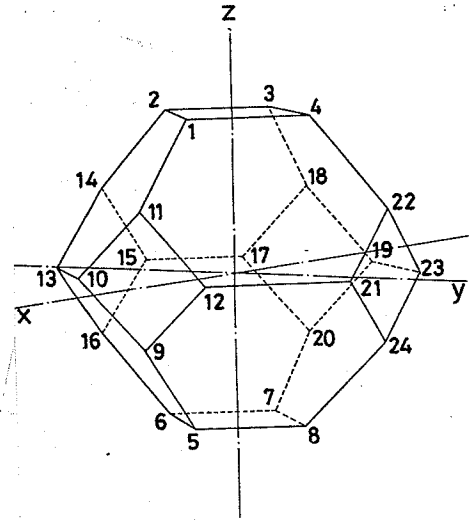
Kanter:

Det afskårne oktaeder har 36 kanter (a). Det kan indskrives i et oktaeder med kantlængden O_a i et hexaeder med kantlængden H_a.

$a:O_a = 0,333$; $a: H_a = 1:2\sqrt{2} = 0,354$.

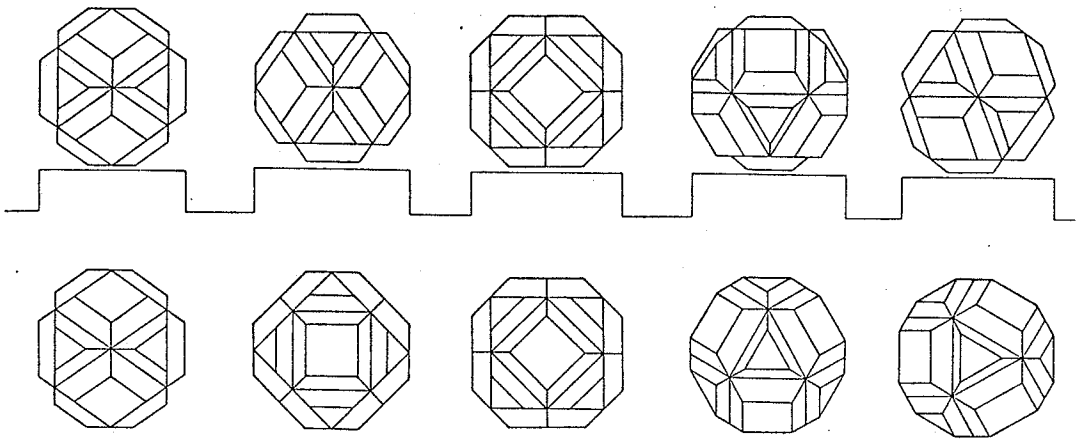




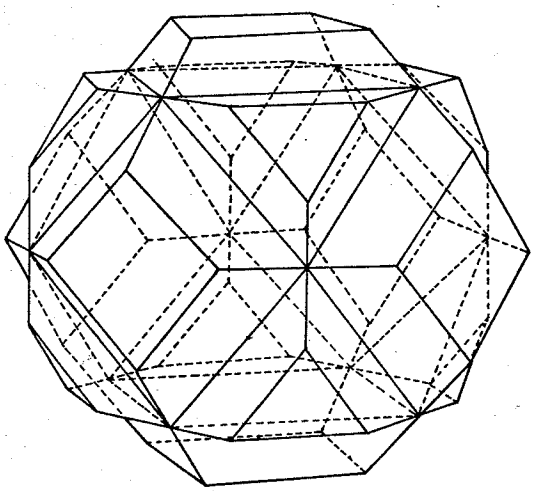


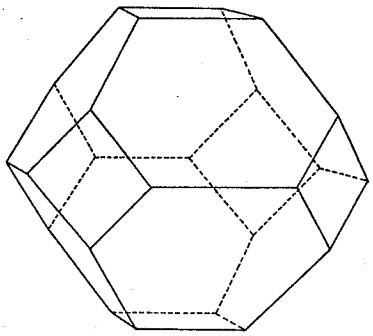
Afskåret oktaeder	X	Y	Z
AO 1	1/2	0	1
AO 2	0	÷ 1/2	1
AO 3	÷ 1/2	0	1
AO 4	0	1/2	1
AO 5	1/2	0	÷ 1
AO 6	0	÷ 1/2	÷ 1
AO 7	÷ 1/2	0	÷ 1
AO 8	0	1/2	÷ 1
AO 9	1	0	÷ 1/2
AO10	1	÷ 1/2	0
AO11	1	0	1/2
AO12	1	1/2	0
AO13	1/2	÷ 1	0
AO14	0	÷ 1	1/2
AO15	÷ 1/2	÷ 1	0
AO16	0	÷ 1	÷ 1/2
AO17	÷ 1	÷ 1/2	0
AO18	÷ 1	0	1/2
AO19	÷ 1	1/2	0
AO20	÷ 1	0	÷ 1/2
AO21	1/2	1	0
AO22	0	1	1/2
AO23	÷ 1/2	1	0
AO24	0	1	÷ 1/2

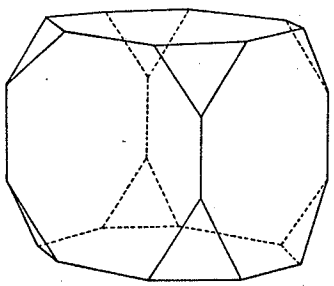
Afskåret hexaeder +
afskåret oktaeder



Retvinklet projektion

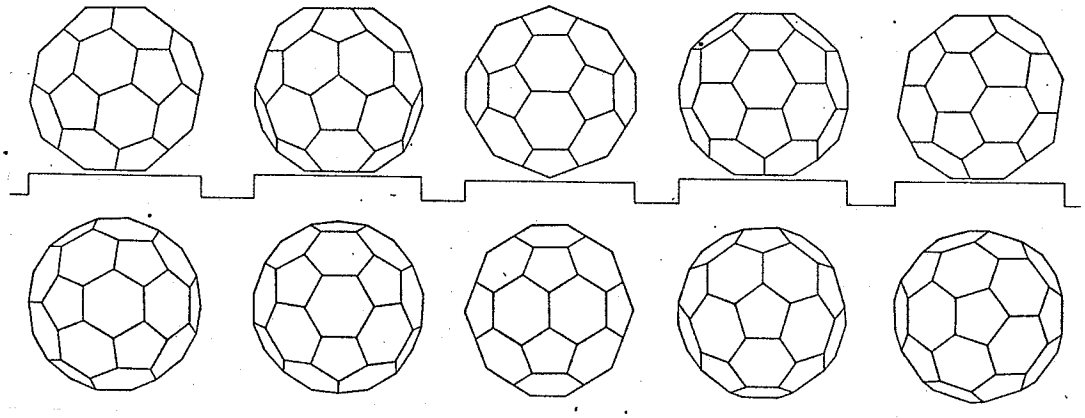




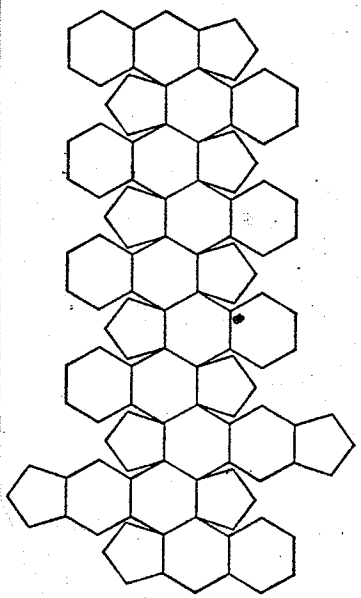


Et afskåret hexaeder og et afskåret oktaeder, sammenbygget så 8 af deres kanter halverer og står vinkelret på hinanden, har en overflade bestående af 8 regulære, kongruente, tresidede pyramidestubbe og 6 regulære, kongruente, firesidede pyramidestubbe. Deres fælles volumen er et kubeoktaeder.

Afskåret ikosaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Det afskårne ikosaeder har 32 sideflader. To-plansvinklen mellem sekskantede sideflader er 138,18° og mellem 5- og 6-kantede sideflader 142,62°.

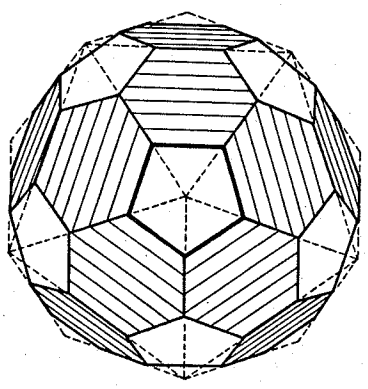
Hjørner:

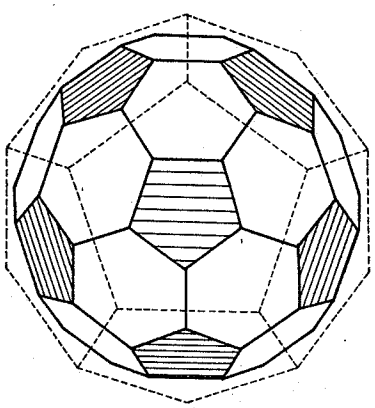
Hvert hjørne begrænses af 3 flader. Der er 60 hjørner ialt.

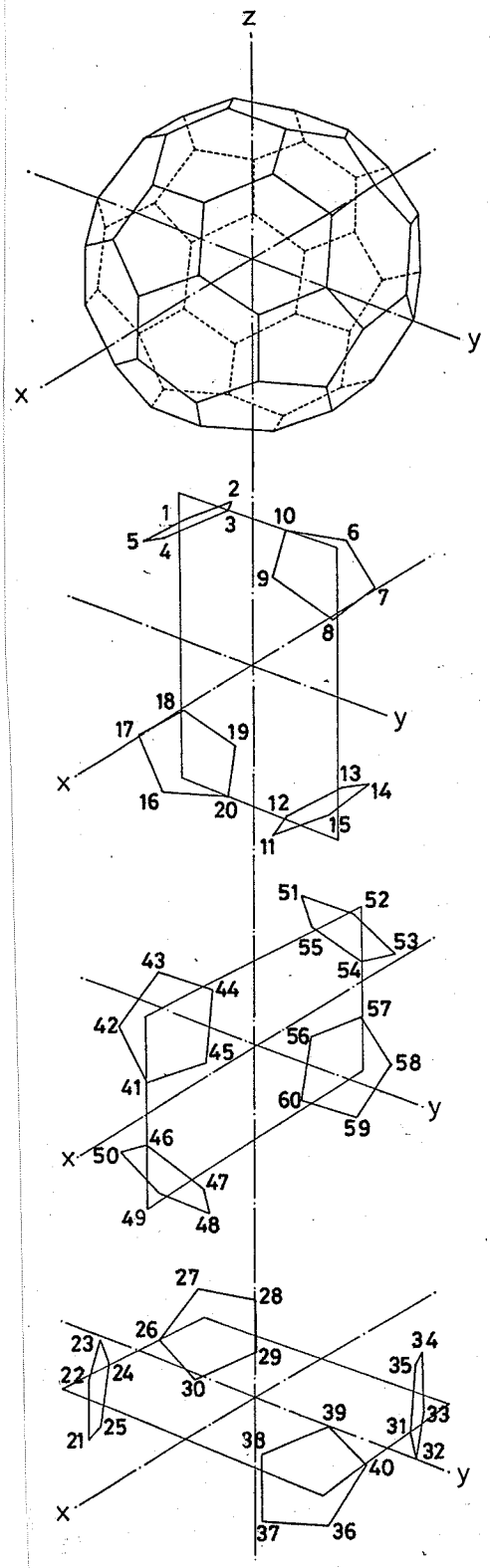
Kanter:

Det afskårne ikosaeder har 90 kanter (a). Det kan indskrives i et ikosaeder med kantlængden I_a og et dodekaeder med kantlængden D_a.

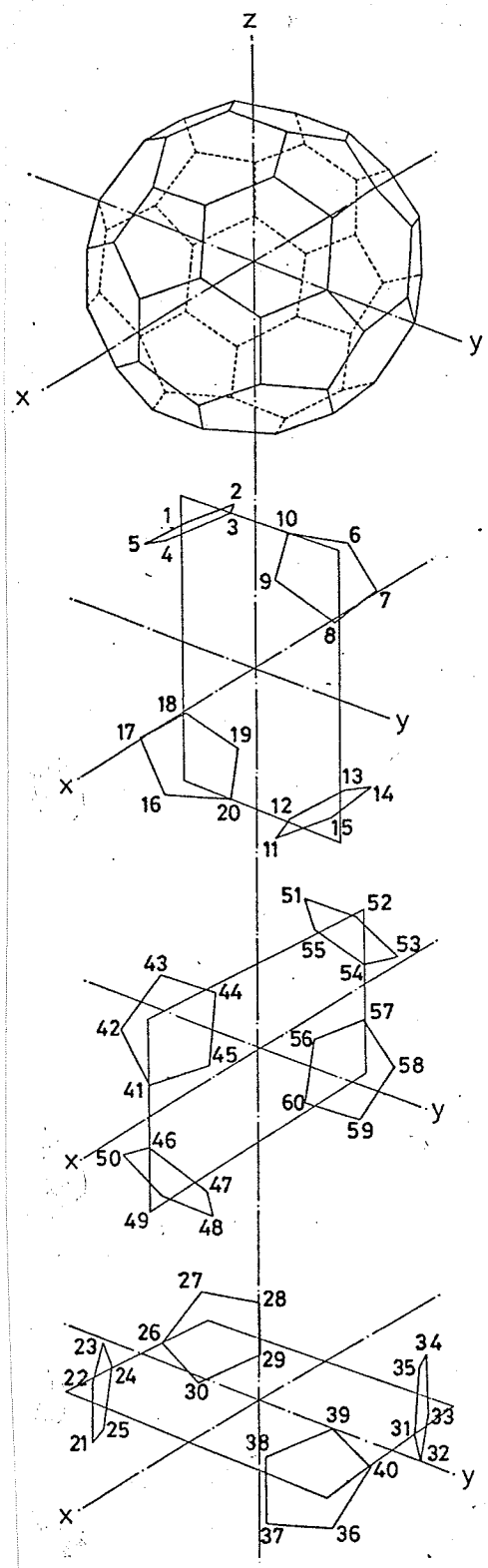
$a:I_a = \frac{1}{3}$; $a:D_a = (I + 5\sqrt{5}):38 = 0,478$.





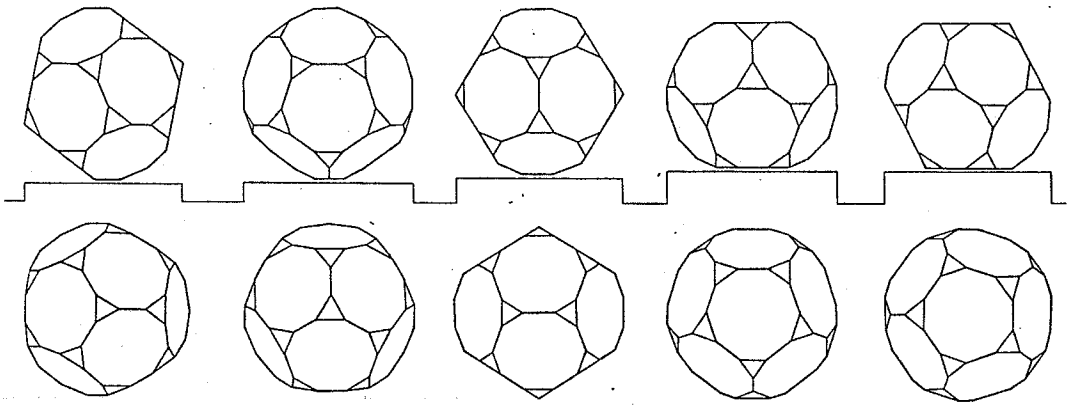


Afskåret ikosaeder	X	Y	Z
AJ 1	÷ 0,206	÷ 0,745	0,667
AJ 2	÷ 0,333	÷ 0,412	0,873
AJ 3	0	÷ 0,206	1
AJ 4	0,333	÷ 0,412	0,873
AJ 5	0,206	÷ 0,745	0,667
AJ 6	÷ 0,333	0,412	0,873
AJ 7	÷ 0,206	0,745	0,667
AJ 8	0,206	0,745	0,667
AJ 9	0,333	0,412	0,873
AJ10	0	0,206	1
AJ11	0,333	0,412	÷ 0,873
AJ12	0	0,206	÷ 1
AJ13	÷ 0,333	0,412	÷ 0,873
AJ14	÷ 0,206	0,745	÷ 0,667
AJ15	0,206	0,745	÷ 0,667
AJ16	0,333	÷ 0,412	÷ 0,873
AJ17	0,206	÷ 0,745	÷ 0,667
AJ18	÷ 0,206	÷ 0,745	÷ 0,667
AJ19	÷ 0,333	÷ 0,412	÷ 0,873
AJ20	0	÷ 0,206	÷ 1
AJ21	0,412	÷ 0,873	÷ 0,333
AJ22	0,206	÷ 1	0
AJ23	0,412	÷ 0,873	0,333
AJ24	0,745	÷ 0,667	0,206
AJ25	0,745	÷ 0,667	÷ 0,206
AJ26	÷ 0,206	÷ 1	0
AJ27	÷ 0,412	÷ 0,873	0,333
AJ28	÷ 0,745	÷ 0,667	0,206
AJ29	÷ 0,745	÷ 0,667	÷ 0,206
AJ30	÷ 0,412	÷ 0,873	÷ 0,333

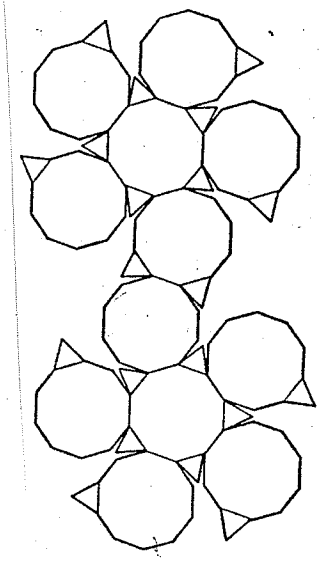


Afskåret ikosaeder	X	Y	Z
AJ31	÷ 0,206	1	0
AJ32	÷ 0,412	0,873	÷ 0,333
AJ33	÷ 0,745	0,667	÷ 0,206
AJ34	÷ 0,745	0,667	0,206
AJ35	÷ 0,412	0,873	0,333
AJ36	0,412	0,873	÷ 0,333
AJ37	0,745	0,667	÷ 0,206
AJ38	0,745	0,667	0,206
AJ39	0,412	0,873	0,333
AJ40	0,206	1	0
AJ41	1	0	0,206
AJ42	0,873	÷ 0,333	0,412
AJ43	0,667	÷ 0,206	0,745
AJ44	0,667	0,206	0,745
AJ45	0,873	0,333	0,412
AJ46	1	0	÷ 0,206
AJ47	0,873	0,333	÷ 0,412
AJ48	0,667	0,206	÷ 0,745
AJ49	0,667	÷ 0,206	÷ 0,745
AJ50	0,873	÷ 0,333	÷ 0,412
AJ51	÷ 0,667	÷ 0,206	0,745
AJ52	÷ 0,667	0,206	0,745
AJ53	÷ 0,873	0,333	0,412
AJ54	÷ 1	0	0,206
AJ55	÷ 0,873	÷ 0,333	0,412
AJ56	÷ 0,873	÷ 0,333	÷ 0,412
AJ57	÷ 1	0	÷ 0,206
AJ58	÷ 0,873	0,333	÷ 0,412
AJ59	÷ 0,667	0,206	÷ 0,745
AJ60	÷ 0,667	÷ 0,206	÷ 0,745

Afskåret dodekaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Det afskårne dodekaeder har 32 sideflader, hvoraf 12 er regulære ti-kantede og 20 ligesidede trekanter. To-plansvinklen mellem tikantede sideflader er 116,57°, og mellem tikantede og trekantede sideflader 142,67°.

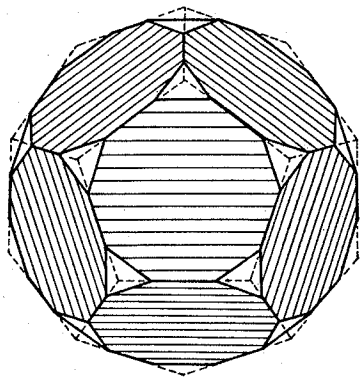
Hjørner:

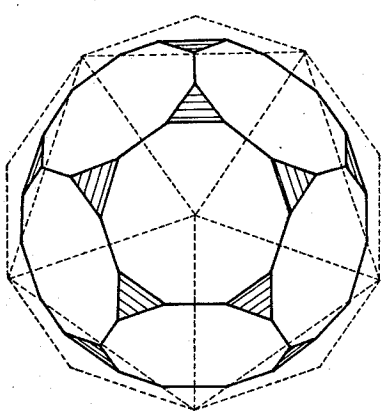
Hvert hjørne begrænses af 3 flader. Der er 60 hjørner ialt.

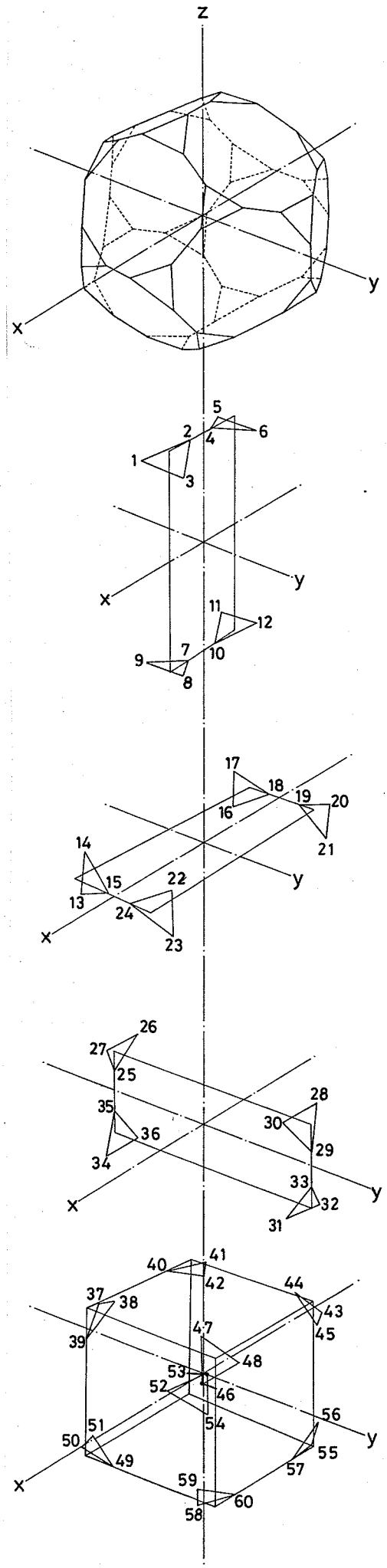
Kanter:

Det afskårne dodekaeder har 90 kanter (a). Det kan indskrives i et dodekaeder med kantlængden D_a og i et ikosaeder med kantlængden I_a.

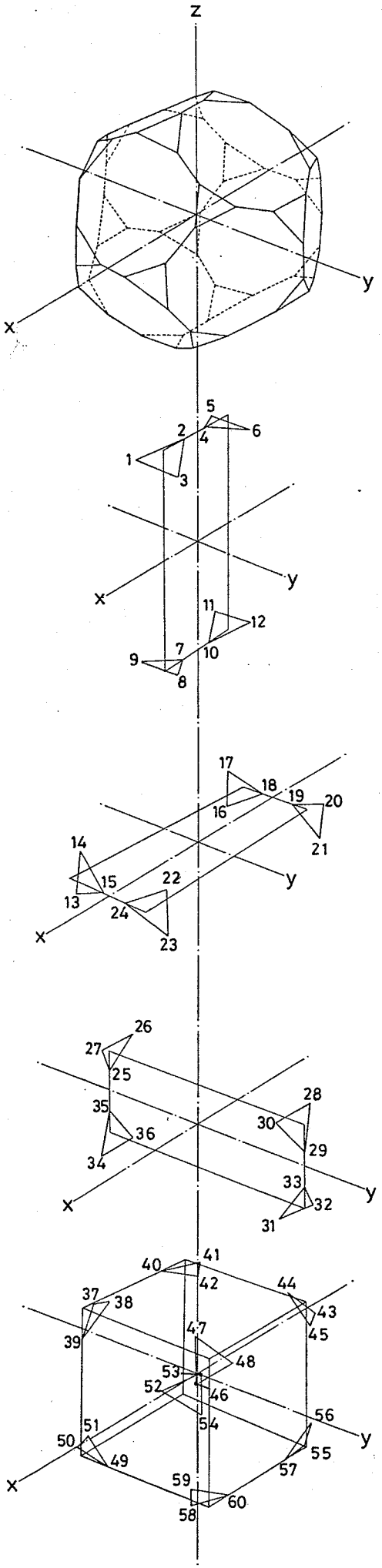
$a:D_a = 1:\sqrt{5} = 0,447$; $a:I_a = (3\sqrt{5}-1):22 = 0,259$.





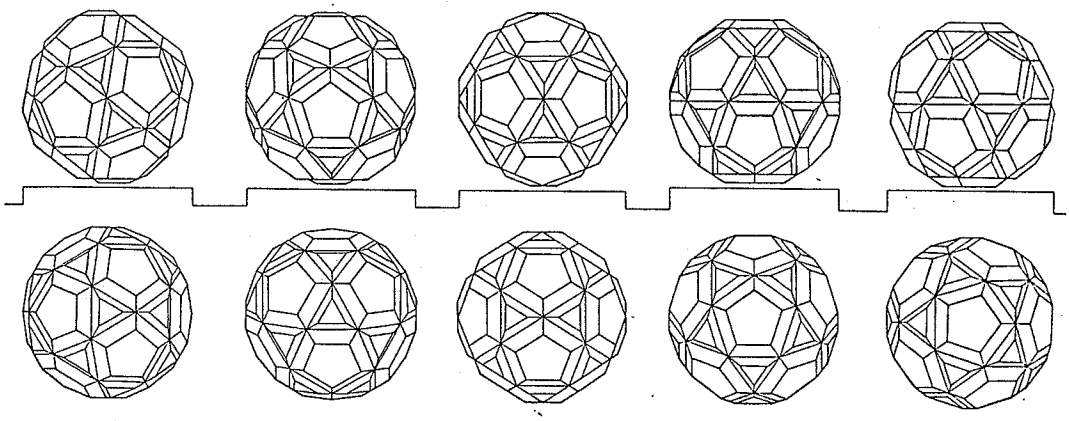


Afskåret dodekaeder	X	Y	Z
AD 1	0,447	÷0,171	0,895
AD 2	0,171	0	1
AD 3	0,447	0,171	0,895
AD 4	÷0,171	0	1
AD 5	÷0,447	÷0,171	0,895
AD 6	÷0,447	0,171	0,895
AD 7	0,171	0	÷1
AD 8	0,447	0,171	÷0,895
AD 9	0,447	÷0,171	÷0,895
AD10	÷0,171	0	÷1
AD11	÷0,447	÷0,171	÷0,895
AD12	÷0,447	0,171	÷0,895
AD13	0,895	÷0,447	÷0,171
AD14	0,895	÷0,447	0,171
AD15	1	÷0,171	0
AD16	÷0,895	÷0,447	÷0,171
AD17	÷0,895	÷0,447	0,171
AD18	÷1	÷0,171	0
AD19	÷1	0,171	0
AD20	÷0,895	0,447	0,171
AD21	÷0,895	0,447	÷0,171
AD22	0,895	0,447	0,171
AD23	0,895	0,447	÷0,171
AD24	1	0,171	0
AD25	0	÷1	0,171
AD26	÷0,171	÷0,895	0,447
AD27	0,171	÷0,895	0,447
AD 28	0,171	0,895	0,447
AD 29	0	1	0,171
AD 30	0,171	0,895	0,447

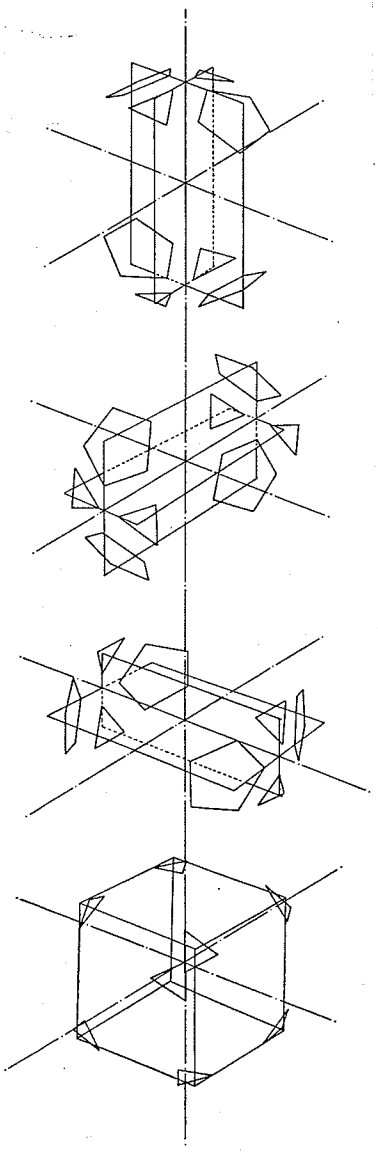


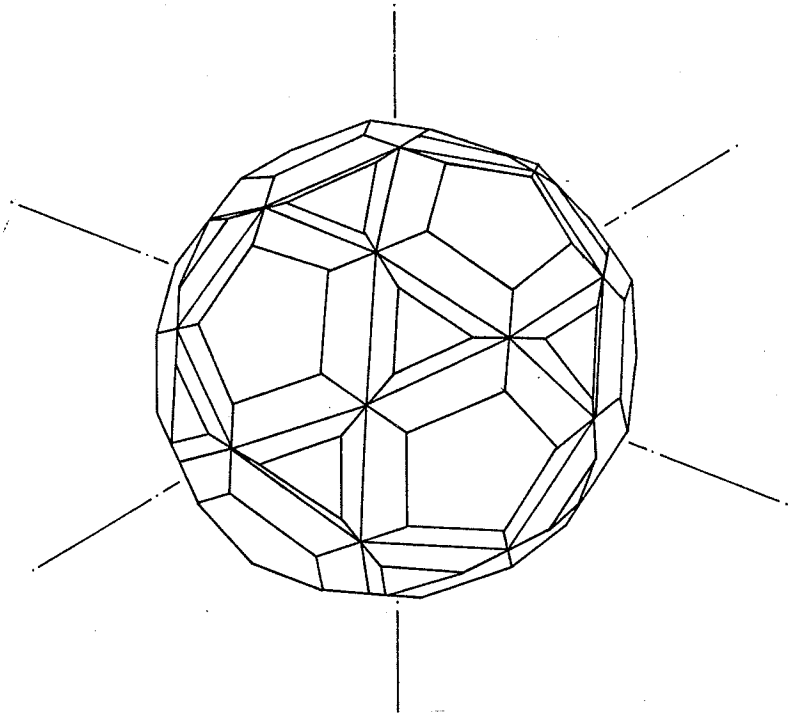
Afskåret dodekaeder	X	Y	Z
AD31	0,171	0,895	÷ 0,447
AD32	÷ 0,171	0,895	÷ 0,447
AD33	0	1	÷ 0,171
AD34	0,171	÷ 0,895	÷ 0,447
AD35	0	÷ 1	÷ 0,171
AD36	÷ 0,171	÷ 0,895	÷ 0,447
AD37	0,447	÷ 0,724	0,553
AD38	0,553	÷ 0,447	0,724
AD39	0,724	÷ 0,618	0,447
AD40	÷ 0,447	÷ 0,724	0,553
AD41	÷ 0,553	÷ 0,447	0,724
AD42	÷ 0,724	÷ 0,553	0,447
AD43	÷ 0,724	0,553	0,447
AD44	÷ 0,553	0,447	0,724
AD45	÷ 0,447	0,724	0,553
AD46	0,724	0,553	0,447
AD47	0,553	0,447	0,724
AD48	0,447	0,724	0,553
AD49	0,553	÷ 0,447	÷ 0,724
AD50	0,447	÷ 0,724	÷ 0,553
AD51	0,724	÷ 0,553	÷ 0,447
AD52	÷ 0,447	÷ 0,724	÷ 0,553
AD53	÷ 0,724	÷ 0,553	÷ 0,447
AD54	÷ 0,553	÷ 0,447	÷ 0,724
AD55	÷ 0,553	0,447	÷ 0,724
AD56	÷ 0,724	0,553	÷ 0,447
AD57	÷ 0,447	0,724	÷ 0,553
AD58	0,553	0,447	÷ 0,724
AD59	0,724	0,553	÷ 0,447
AD60	0,447	0,724	÷ 0,553

Afskåret ikosaeder +
afskåret dodekaeder



Retvinklet projektion



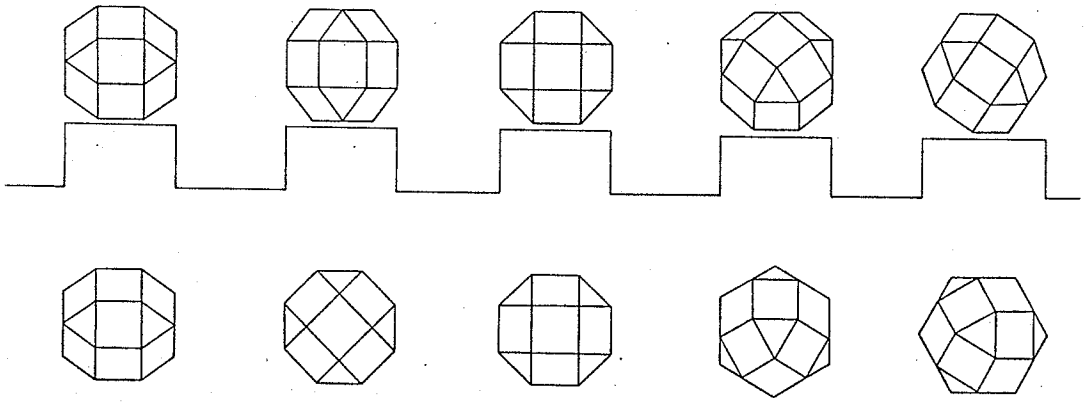


Et afskåret ikosaeder og et afskåret dodekaeder, sammenbygget så 30 af deres kanter halverer og står vinkelret på hinanden, har en overflade bestående af 20 regulære, tresidede pyramidestubbe og 12 regulære femsidede pyramidestubbe.

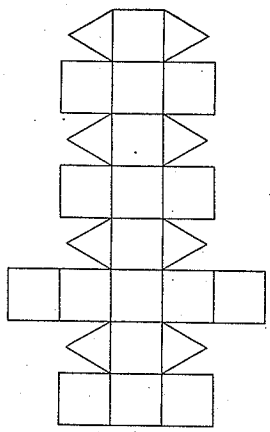
Deres fællesvolumen er et ikosadodekaeder.

Det sammenbyggede legeme kan opdeles med 5 forskellige plane snit i 2 kongruente legemer, hver med regulære 10-kantede grundflader.

Rhombisk kubeoktaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Det rhombiske kubeoktaeder har 26 flader, hvoraf 8 er ligesidede trekanter og 18 er kvadratiske. To-plansvinklerne er 135° mellem de kvadratiske sideflader, og 144,73° mellem kvadratiske og trekantede sideflader.

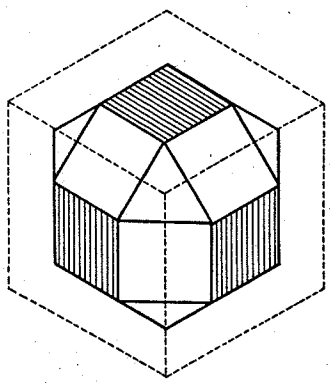
Hjørner:

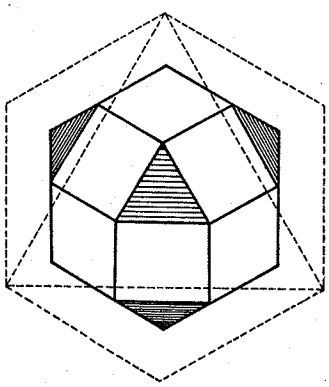
Hvert hjørne begrænses af 4 flader. Der er 24 hjørner ialt.

Kanter:

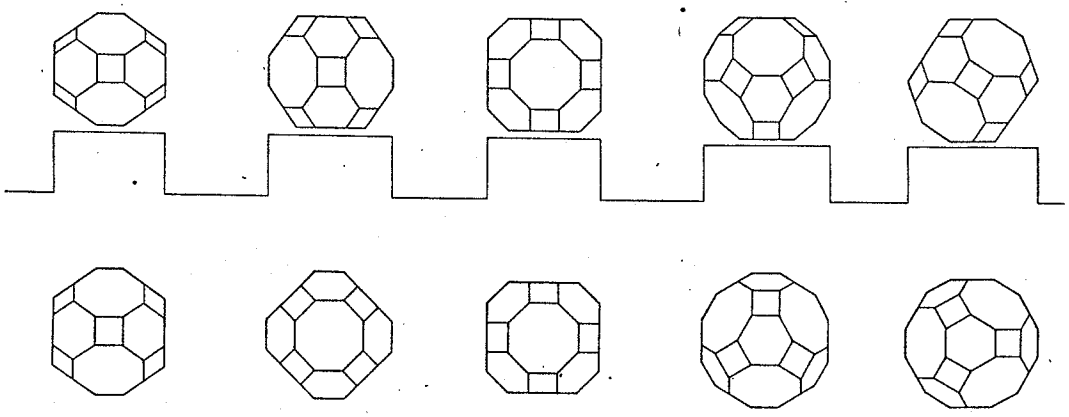
Det rhombiske kubeoktaeder har 48 kanter (a). Det kan indskrives i et hexaeder med kantlængden H_a og et oktaeder med kantlængden O_a.

$A:H_a = \sqrt{2} - 1 = 0,414$; $a:O_a = \sqrt{2}:(3+\sqrt{2}) = 0,32$.

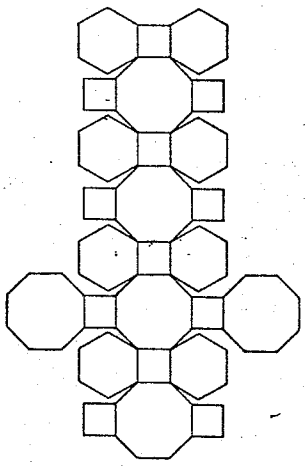




Afskåret kubeoktaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Det afskårne kubeoktaeder har 26 sideflader, hvoraf 12 er kvadratiske, 8 er regulære sekskanter, 6 er regulære ottekanter.

Toplansvinklen mellem 8-kanter og kvadrater er 135°, mellem 8-kanter og 6-kanter 125,27° og mellem 6-kanter og kvadrater 144,73°.

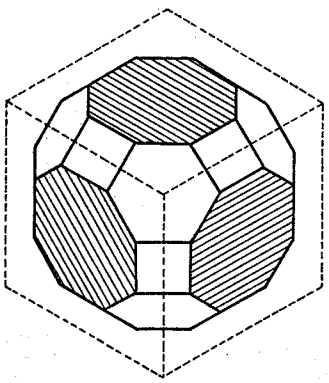
Hjørner:

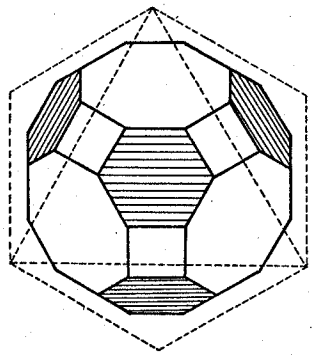
Hvert hjørne begrænses af tre flader. Der er ialt 48 hjørner.

Kanter:

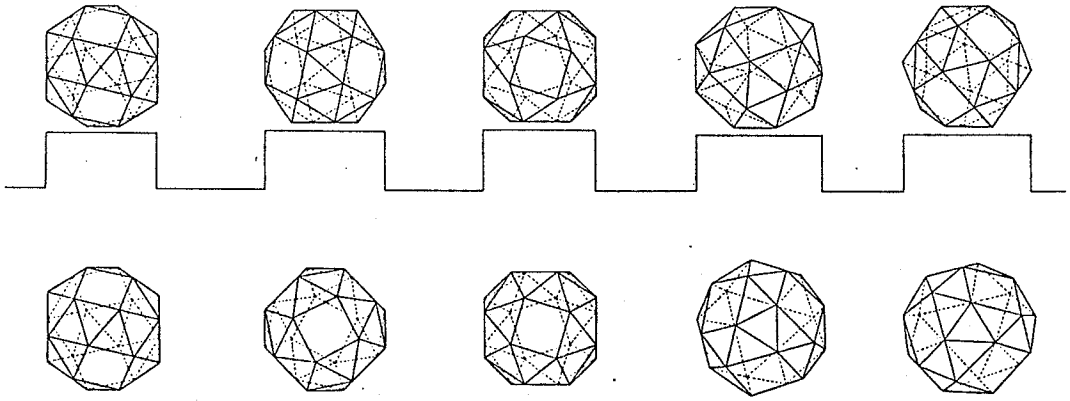
Det afskårne kubeoktaeder har 72 kanter (a). Det kan indskrives i et hexaeder med kantlængden H_a og et dodekaeder med kantlængden O_a.

$a:H_a = (2\sqrt{2}-1):7 = 0{,}261$; $a:O_a = (2-\sqrt{2}):3 = 0{,}195$.

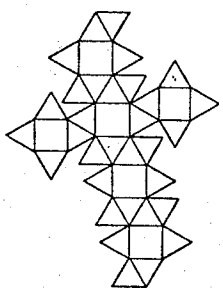




Dobbelt afskåret hexaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flade:

Et dobbelt afskåret hexaeder har 38 flader, hvoraf 32 er ligesidede trekanter, og 6 er kvadrater. To-plansvinklerne mellem trekantede sideflader er 153,23° og mellem kvadratiske- og trekantede sideflader 142,98°.

Hjørner:

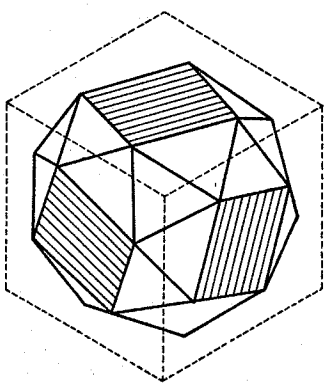
Hvert hjørne begrænses af fem flader. Der er ialt 24 hjørner.

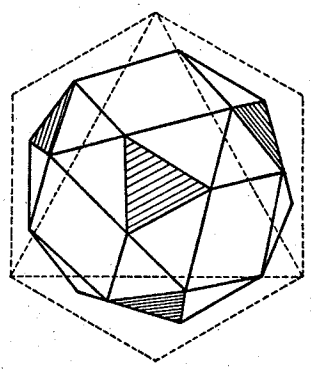
Kanter:

Et dobbelt afskåret hexaeder har 60 kanter (a).

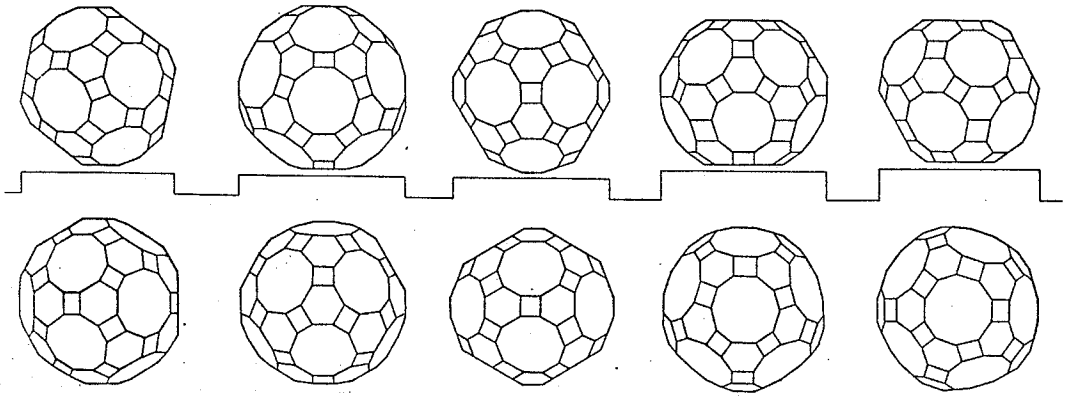
Den kan indskrives i et hexaeder med kantlængden H_a og et oktaeder med kantlængden O_a.

$a:H_a = 0,438$; $a:O_a = 0,336$.

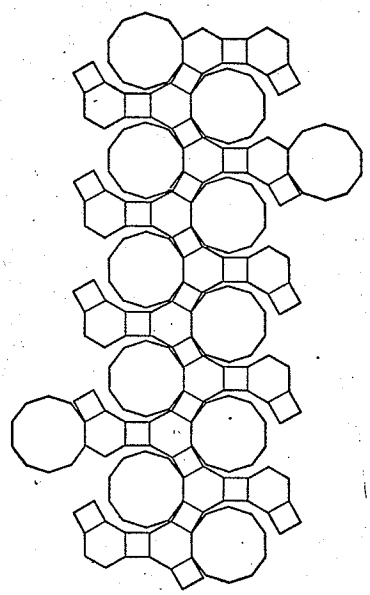




Afskåret ikosadodekaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Det afskårne ikosadodekaeder har 62 sideflader, hvoraf 30 er kvadratiske, 20 er 6-kantede, og 12 er 10-kantede.

To-plansvinklen mellem kvadrater og 10-kanter er 148,28°, mellem 6- og 10-kanter 142,62°, og mellem kvadrater og 6-kanter 159,10°.

Hjørner:

Hvert hjørne begrænses af tre flader. Der er ialt 120 hjørner.

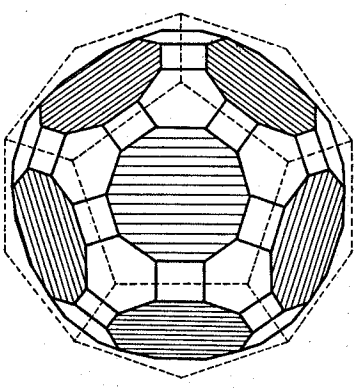
Kanter:

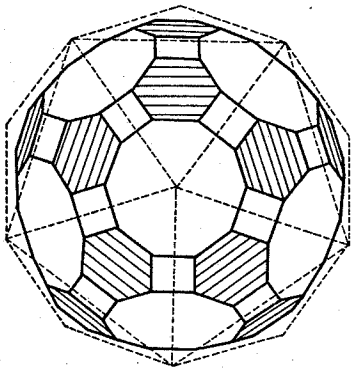
Det afskårne ikosadodekaeder har 120 kanter (a).

Det kan indskrives i et ikosaeder med kantlængden I_a og et dodekaeder med kantlængden D_a.

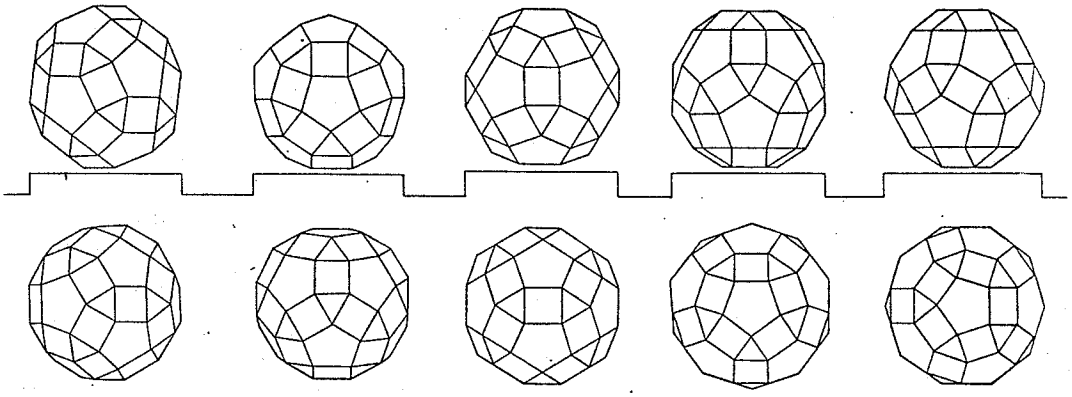
$a:I_a = (\sqrt{5}-1):6 = 0{,}206.$

$a:D_a = (\sqrt{5}+1):10 = 0{,}324.$

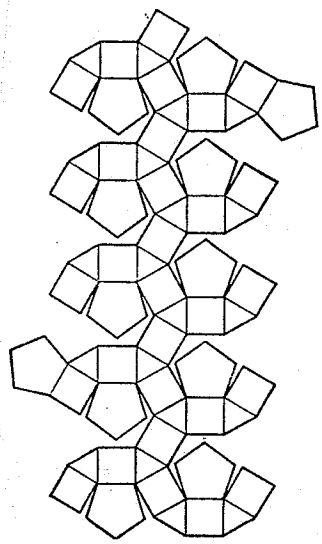




Rhombisk ikosadodekaeder



Retvinklet projektion



udfoldning

Flader:

Det rhombiske ikosadodekaeder har 62 sideflader, hvoraf 20 er ligesidede trekanter, 30 kvadratiske, og 12 er femkantede.

To-plansvinklen er 148,28° mellem 5- og 4-kantede flader, og 159,10° mellem 3- og 4-kantede flader.

Hjørner:

Hvert hjørne begrænses af fire flader. Der er ialt 60 hjørner.

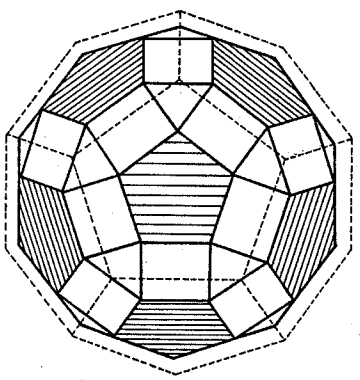
Kanter:

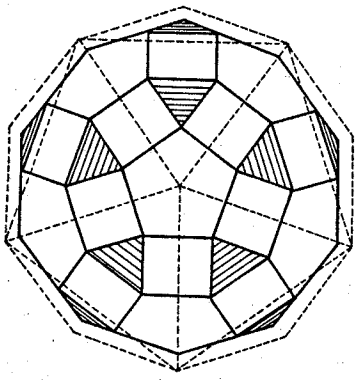
Det rhombiske ikosadodekaeder har ialt 120 kanter (a).

Det kan indskrives i et ikosaeder med kantlængden I_a og i et dodekaeder med kantlængden D_a^a.

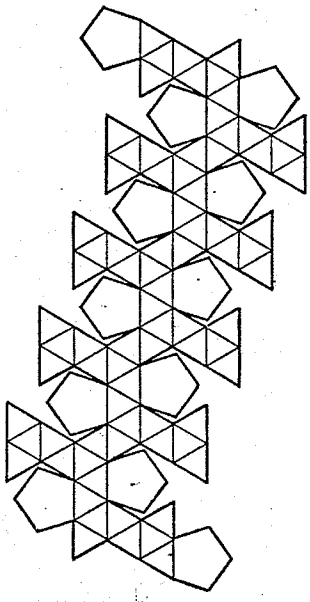
$a:I_a = (3\sqrt{5}+1):22 = 0{,}35.$

$a:D_a = (\sqrt{5}+1):6 = 0{,}539.$





Dobbelt afskåret dodekaeder



udfoldning

Flader:

Et dobbelt afskåret dodekaeder har ialt 92 flader, hvoraf 80 er ligesidede trekanter og 12 er regulære femkanter.

To-plansvinklen er 152,93° mellem 5- og 3-kantede flader, og 164,18° mellem trekantede flader.

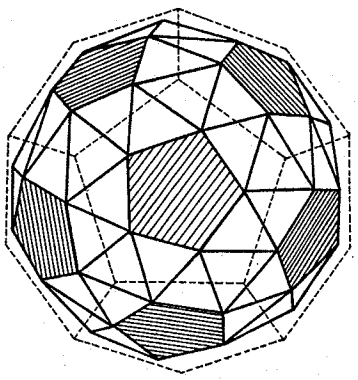
Hjørner:

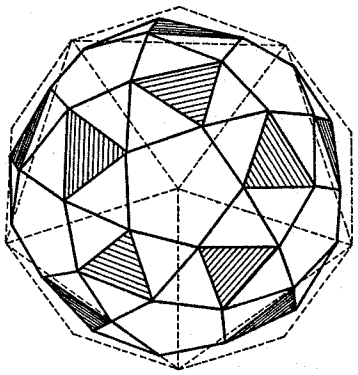
Hvert hjørne begrænses af 5 flader. Der er ialt 60 hjørner.

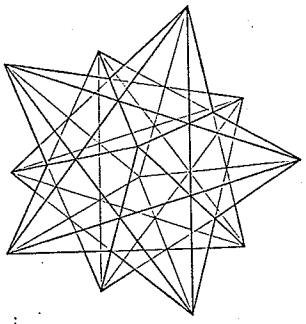
Kanter:

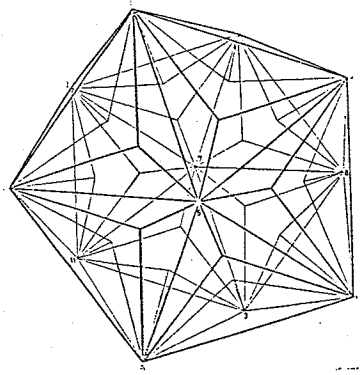
Et dobbelt afskåret dodekaeder har ialt 150 kanter (a). Det kan indskrives i et dodekaeder med kantlængden D_a og i et ikosaeder med kantlængden I_a.

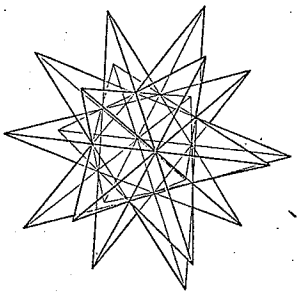
$a:D_a = 0,562$; $a:I_a = 0,364$.

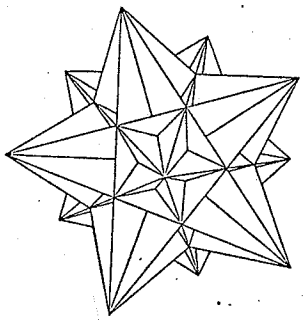












Kepler-Poinsot polyedrene

Foruden de fem regulære konvekse polyedre, der har været kendt siden oldtiden, findes der fire polyedre, som "teknisk" set er regulære.

De to af disse - de stjerneformede dodekaedre - blev "fundet" af Kepler (1571-1630), der var den tyske astronom, der opstillede de tre såkaldte Keplerlove:

1) Planeterne bevæger sig i ellipsen med solen i det ene brændpunkt
2) Det af en planets radiusvektor (en linie fra solen til planeten) beskrevne areals størrelse er proportional med tiden, d.v.s. det i et vist tidsrum beskrevne areal er konstant, uanset hvor i banen, planeten er
3) Kvadraterne på planeternes omløbstider forholder sig som kuberne på deres middelafstande fra solen

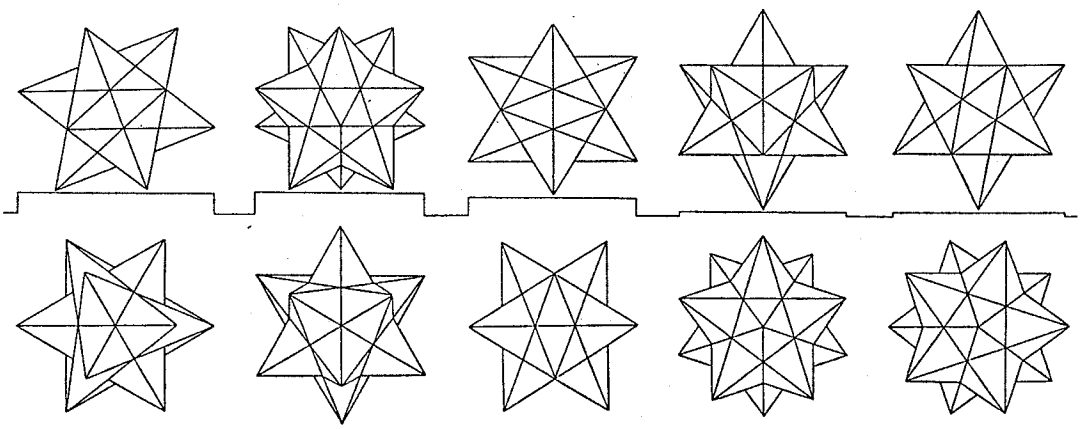
De to resterende, "regulære" polyedre er det store ikosaeder og det store dodekaeder, der blev "fundet" af Poinsot (1777-1859).

Kepler-Poinsot polyedrene er alle fire udledt af dodekaedret og ikosaedret.

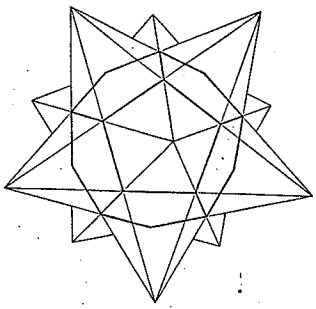
De er betydeligt mere komplicerede i formen, end de fem ordinære plotoniske legemer.

De to af dem (det store dodekaeder og det lille, stjerneformede dodekaeder) tilfredsstiller ikke Eulers polyederformel (antallet af kanter = summen af flader og hjørner, minus to, $K = F + H - 2$), hvilket har ført til det absurde standpunkt, at de to nævnte polyedre ikke eksisterer.

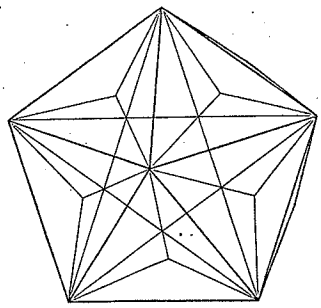
Det lille stjerneformede dodekaeder



Retvinklet projektion

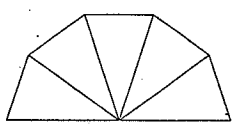


Det lille stjerneformede dodekaeder kan omskrives et regulært, konvekst dodekaeder, og indskrives i et regulært, konveks ikosaeder med et hjørne i hver af ikosaederets hjørner.



Dets overflade omfatter 12 regulære, femsidede pyramider, hvis sideflader er forlængelser af det indskrevne dodekaeders flader.

Pyramidernes kanter er forlængelse af det indskrevne dodekaeders kanter, og har det gyldne snits forhold til disse.

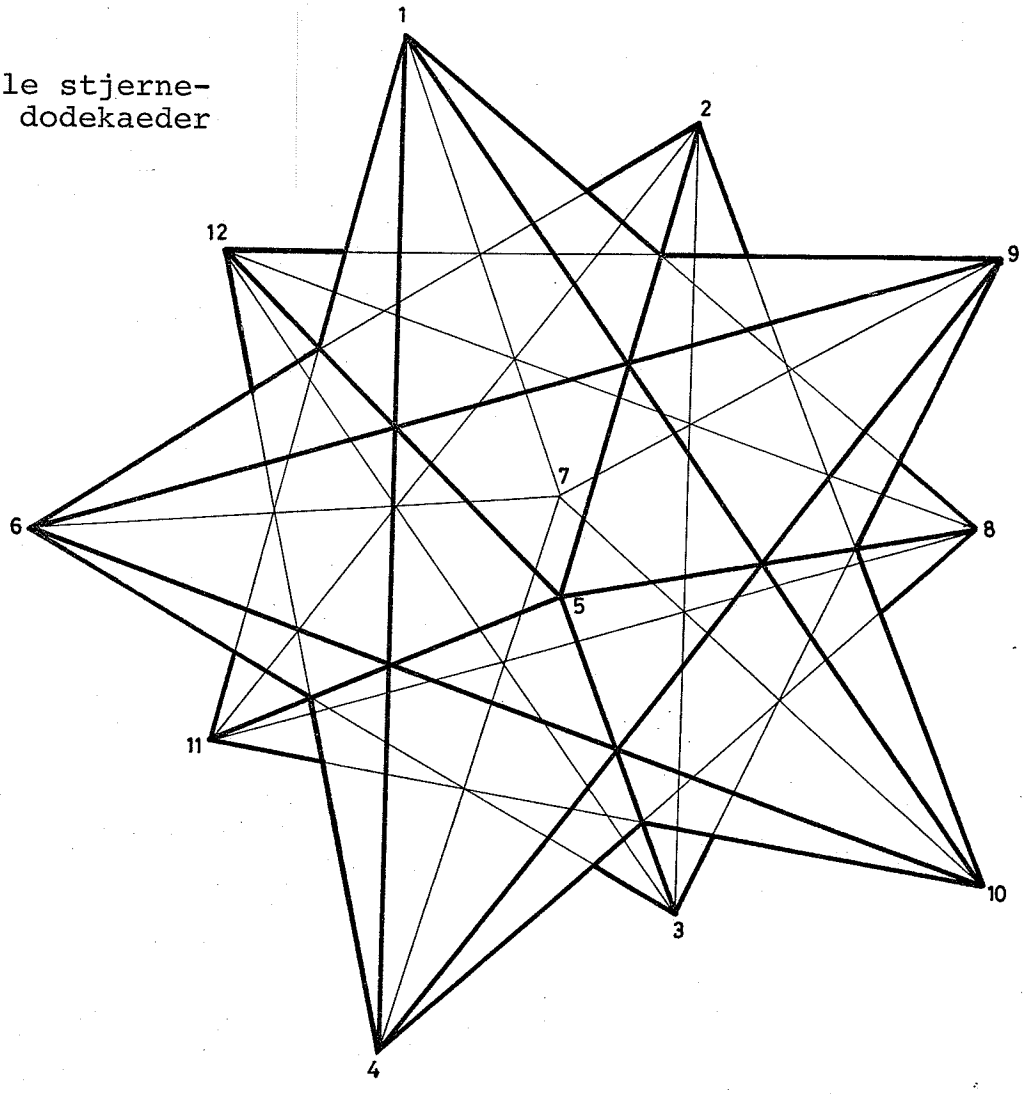


udfoldning af "stjernespids"

Enhver af de 12 pyramider er centralt placeret i en regulær femstjerne (pentagram).

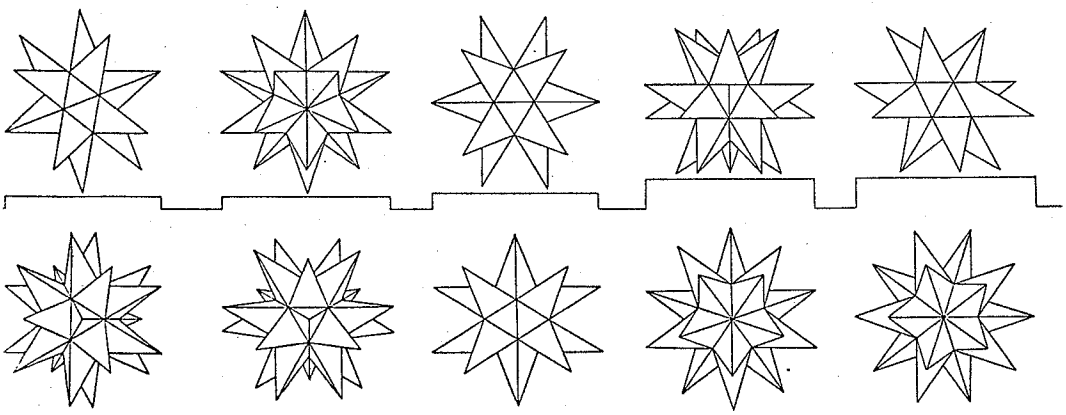
To-plansvinklen er 116.566667°.

Det lille stjerne-
formede dodekaeder

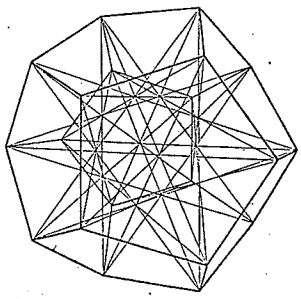


	X	Y	Z
LSD 1	0	0,618	1
LSD 2	0	÷ 0,618	1
LSD 3	÷ 1	0	0,618
LSD 4	1	0	0,618
LSD 5	0,618	1	0
LSD 6	0,618	÷ 1	0
LSD 7	÷ 0,618	÷ 1	0
LSD 8	÷ 0,618	1	0
LSD 9	0	0,618	÷ 1
LSD 10	1	0	÷ 0,618
LSD 11	1	÷ 0,618	÷ 1
LSD 12	÷ 1	0	÷ 0,618

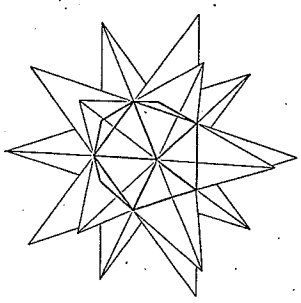
ore stjerneformede dodekaeder



Retvinklet projektion

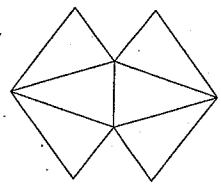


Det store stjerneformede dodekaeder kan omskrives af et regulært, konvekst dodekaeder med et hjørne i hver af dodekaederets hjørner.



Dets overflade omfatter 20 regulære, tresidede pyramider, hvis sideflader er forlængelse af det indskrevne ikosaeders flader.

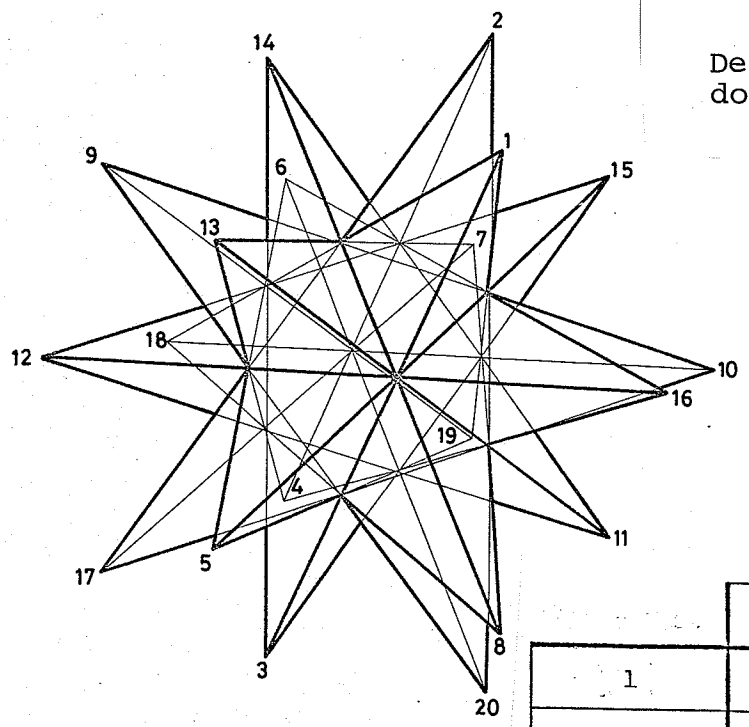
Pyramidernes kanter er en forlængelse af det indskrevne ikosaeders kanter, og har det gyldne snits forhold til disse.



udfoldning af to "stjernespidser"

Pyramiderne er i grupper på 5 placeret centralt i en regulær femstjerne.

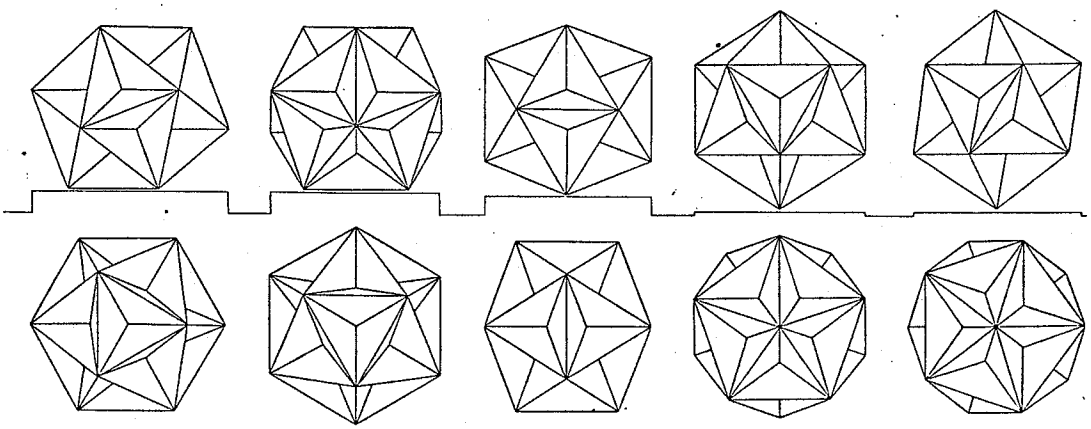
To-plansvinklen er 63.463333°.



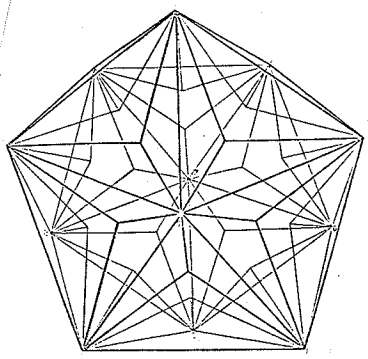
Det store stjerneformede dodekaeder

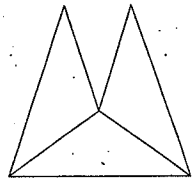
	X	Y	Z
1	0,382	0	1
2	÷ 0,382	0	1
3	0,382	0	÷ 1
4	÷ 0,382	0	÷ 1
5	1	÷ 0,382	0
6	÷ 1	÷ 0,382	0
7	1	0,382	0
8	1	0,382	0
9	0	÷ 1	0,382
10	0	1	0,382
11	0	1	÷ 0,382
12	0	÷ 1	÷ 0,382
13	0,618	÷ 0,618	0,618
14	0,618	0,618	0,618
15	0,618	0,618	0,618
16	0,618	0,618	0,618
17	0,618	÷ 0,618	÷ 0,618
18	÷ 0,618	÷ 0,618	÷ 0,618
19	÷ 0,618	0,618	÷ 0,618
20	0,618	0,618	÷ 0,618

Det store dodekaeder



Retvinklet projektion





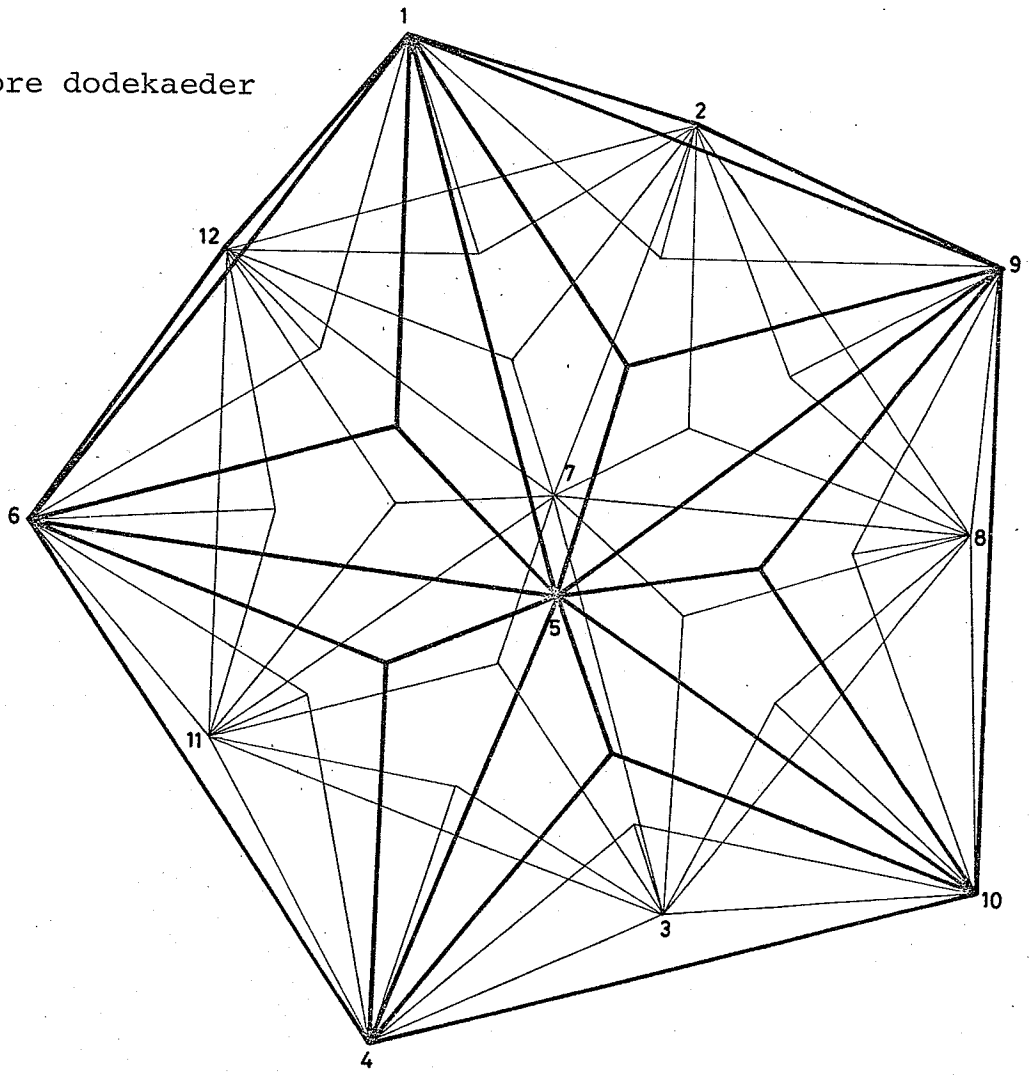
Det store dodekaeder kan omskrives et regulært, konveks dodekaeder, og indskrives i et regulært konveks ikosaeder med 30 kanter sammenfaldende med ikosaederets kanter.

Hvis et lille stjerneformet dodekaeder indskrives i et ikosaeder, og volumenet mellem den omskrevne ikosaeders kanter og de to ligebendede trekantflader, som hver kant spænder over, udfyldes, fremkommer det store dodekaeder.

Forholdet mellem det store ikosaeders kanter og kanterne i det indskrevne dodekaeder er $(3 + \sqrt{5}) : 2 = 2.618$.

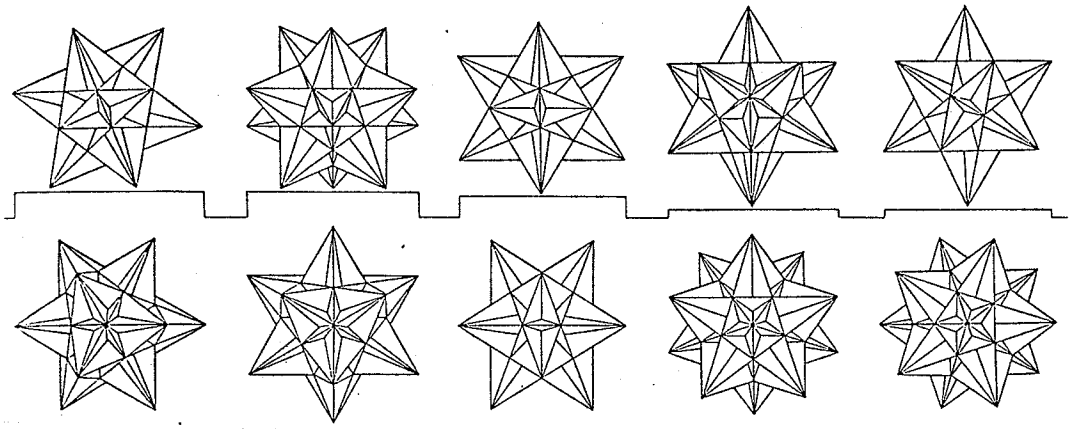
To-plansvinklen er 63.4333^{o} (116.566^{o}).

Det store dodekaeder

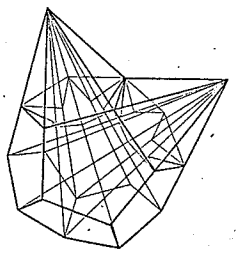


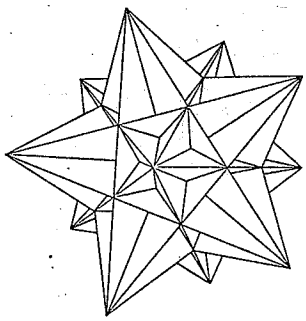
	X	Y	Z
1	0	0,618	1
2	0	÷ 0,618	1
3	÷ 1	0	0,618
4	1	0	0,618
5	0,618	1	0
6	0,618	÷ 1 .	0
7	÷ 0,618	÷ 1	0
8	÷ 0,618	1	0
9	0	0,618	÷ 1
10	1	0	÷ 0,618
11	1	÷ 0,618	÷ 1
12	÷ 1	0	÷ 0,618

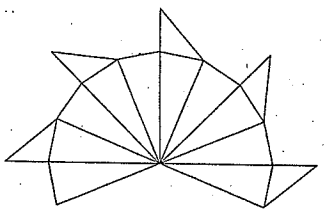
Det store ikosaeder



Retvinklet projektion

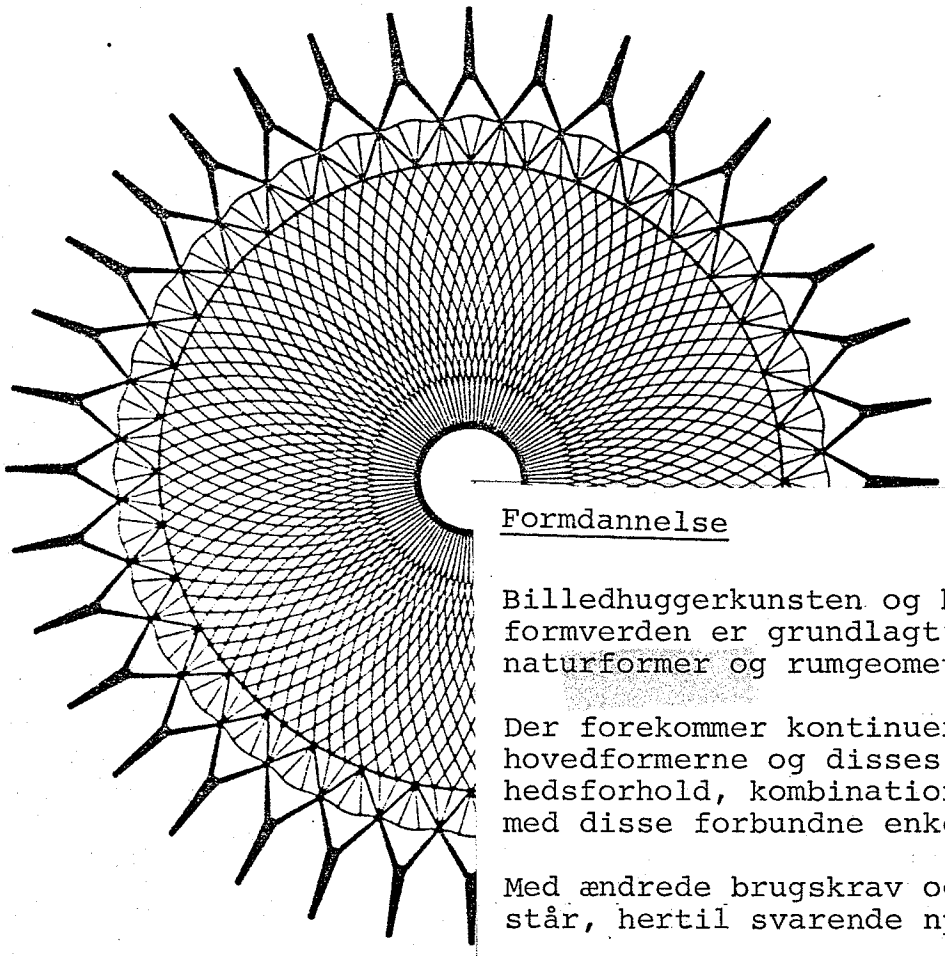






udfoldning af
"stjernespids"

Det store ikosaeder kan indskrives i et regulært, konvekst ikosaeder med et hjørne i hvert af det omskrevne ikosaeders hjørner.



Formdannelse

Billedhuggerkunsten og bygningskunstens formverden er grundlagt på studiet af naturformer og rumgeometriske former.

Der forekommer kontinuerligt et studie af hovedformerne og disses indbyrdes afhængighedsforhold, kombinationsmuligheder og de med disse forbundne enkeltheder.

Med ændrede brugskrav og ny erkendelse opstår, hertil svarende nye formdannelser.

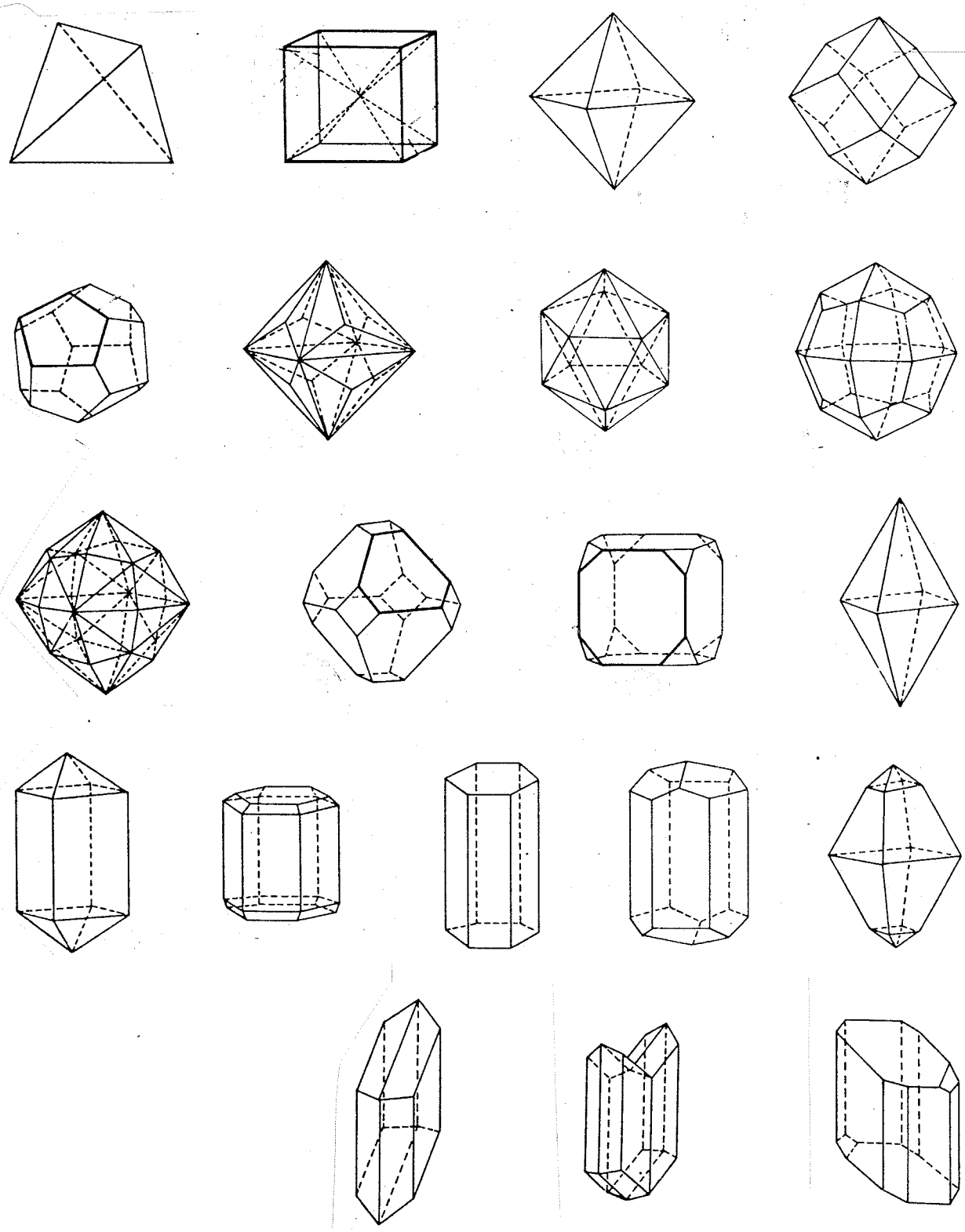
I dette spor kan udviklingen fortsætte inden for det samme folk, og erfaringer udveksles mellem de enkelte folkeslag.

Fra det ene slægtled til det næste finder der stadig fornyelse og forskydninger sted, dels som følge af ændrede sociale og politiske forhold - og dermed ændrede krav til formgivningen i almindelighed - og de[illegible]er påvirkning af den tekniske frems[illegible]

Ofte sker disse forskydninger så successivt, at de for de pågældende slægtled er umærkelige, men opsummerede over længere tidsrum bliver der ikke blot tale om synlige forskelle, men om indgribende ændringer.

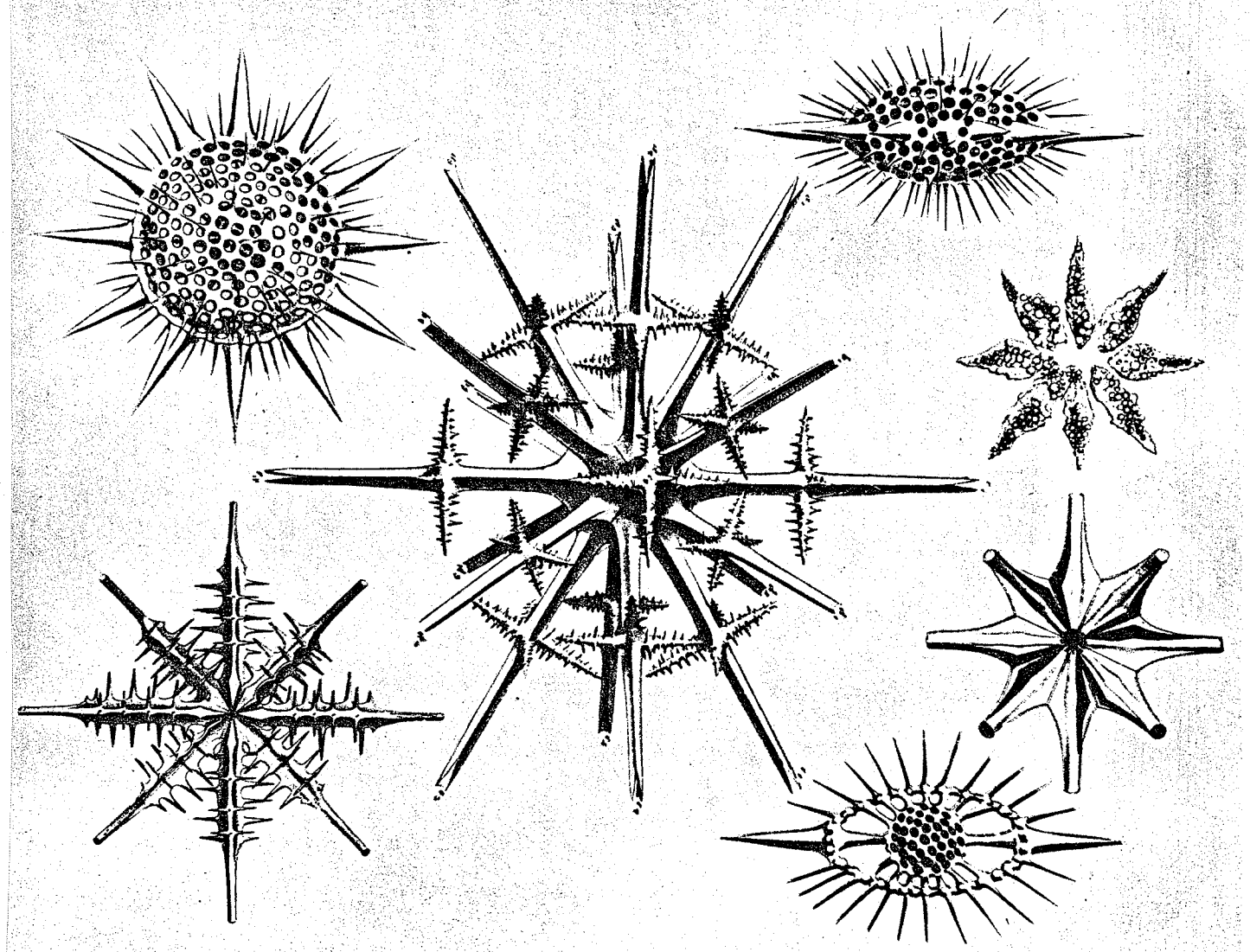
Nydannelsernes levetid er ifølge sagens natur af kort varighed, idet de - så snart de er skabt og viser sig levedygtige - samtidig er blevet historisk afledningsmateriale, en tradition.

Krystaller



De stereometriske eller rumgeometriske former findes i almindelighed ikke i naturen i matematisk rendyrket form, men kun som tilnærmede forekomster, eksempelvis som krystaller og simpelt opbyggede organismer.

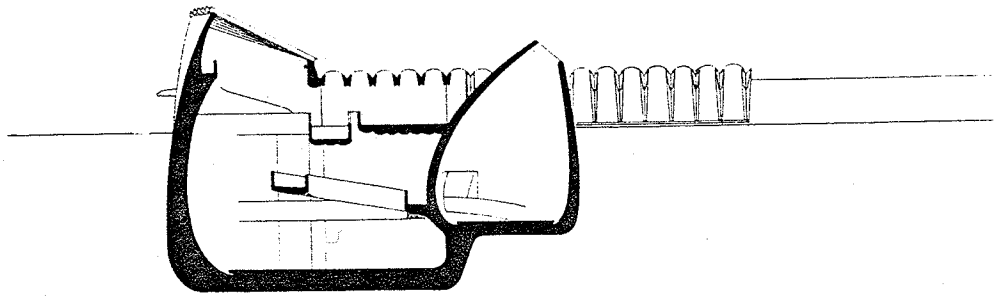
Radiolarier

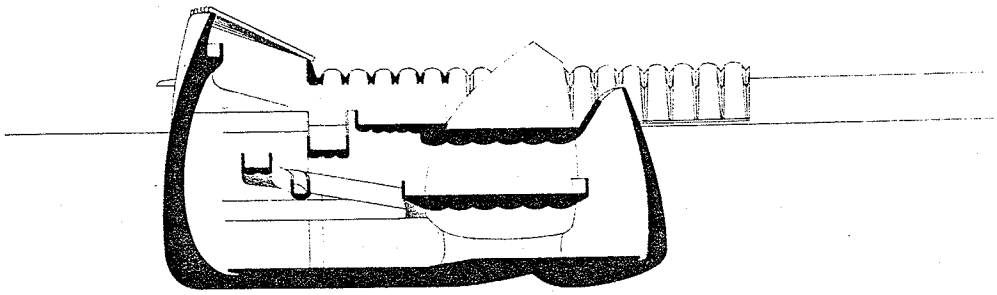


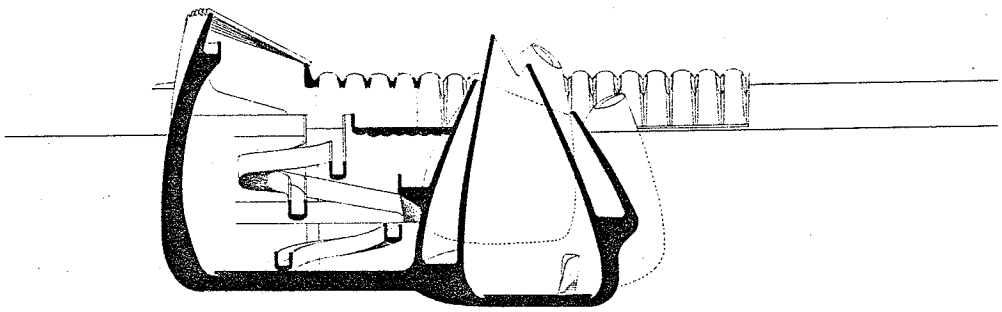
Forestillingen om den rumgeometriske form synes således i højere grad at være et arbejdsresultat, vundet gennem teoretiske overvejelser eller gennem praktiske erfaringer, end en følge af direkte naturiagttagelser, selv om begge muligheder eller en kombination af disse er til stede.

Det bliver derfor et åbent spørgsmål, hvorvidt de rumgeometriske former kan betragtes som henhørende under de former, hvis oprindelse skyldes menneskelig aktivitet eller under de former, der har iagttagelse af naturformer som deres forudsætning.

Jørn Utzon:
Skitse til
Asger Jorn
Museum i
Silkeborg







Formdannelsernes vækstområde er det levende og aktuelle, skulptur og bygningskunst, hvis formdannelse dels er en gentagelse eller krydsning af ældre former, og dels består af nydannelser.

På fløjen af vækstområdet findes de egentlige eksperimenter, hvoraf nogle er forløbere for kommende perioders formgivning.

For vækstområdet som helhed gælder, at eksakt viden vedrørende form og formgivning går hånd i hånd med skabende fantasi, med tendens til ny formkombinationer og formdannelser.

For at indkredse principperne for formdannelsen er det nødvendigt at foretage tilbageblik i kunsthistorien, som klassificerer kunsten i stilarter.

For alle stilarter inden for bygningskunsten er der to hovedtræk, der dyrkes side om side: det er formprincippet og formålsprincippet.

Det veksler stærkt fra epoke til epoke, hvilke af trækkene, der i idégrundlaget tillægges størst betydning.

Formprincippet tager sit udgangspunkt i forbilleder eller traditioner. Funktionen tilpasses de for perioden "accepterede" husformer, rumtyper, kompositionsprincipper og konstruktioner.

Hvor formålsprincippet er i højsædet er udgangspunktet at løse byggeopgaven primært ved at lade bygningens formål og brugsmæssige funktioner bestemme former og konstruktioner.

I visse tilfælde er markeringen af overgangen fra én stil til en anden meget tydelig, som f.eks. fra gotik til renæssance. I andre tilfælde er grænserne mere flydende som mellem renæssance og barok.

De skarpe brud falder i reglen sammen med forandringer i samfundsforholdene eller ændringer af de tekniske vilkår. I andre tilfælde kan ændring af stilarten blot være udtryk for trang til forandring.

Den overvejende del af den ældre maler- og billedhuggerkunst, som vi kender til, er knyttet tæt sammen med bygningskunsten og udviklet i harmonisk sammenhæng med denne.

Det gælder den assyriske, ægyptiske og græske kunst.

I den romerske kulturperiode dyrkes imidlertid portrætkunsten som selvstændigt fænomen, og i renæssancen løsriver maleri og skulptur sig fra bygningskunsten.

Staffeli-maleriet dukker op, perspektivlæren udvikles, og der arbejdes med det maleriske som selvstændige problemkomplekser.

Ikke desto mindre er der - paradoksalt nok - i de efterfølgende stilperioder - barokken og rokkoen - eksempler på bygværker, hvor maleri, skulptur og bygningskunst indgår i harmoniske helheder, der er uden sidestykke før og siden.

Det er hos grækerne, vi finder udgangspunktet for de nyere europæiske kunsttraditioner.

De var blandt de første, der via filosofi over skønhedens væsen, definerede principper, der skulle sikre idéelle formdannelser og formkombinationer. De antog, at der for formgivning måtte gælde en indre lovmæssighed af tilsvarende art, som man finder i geometrien og i naturen.

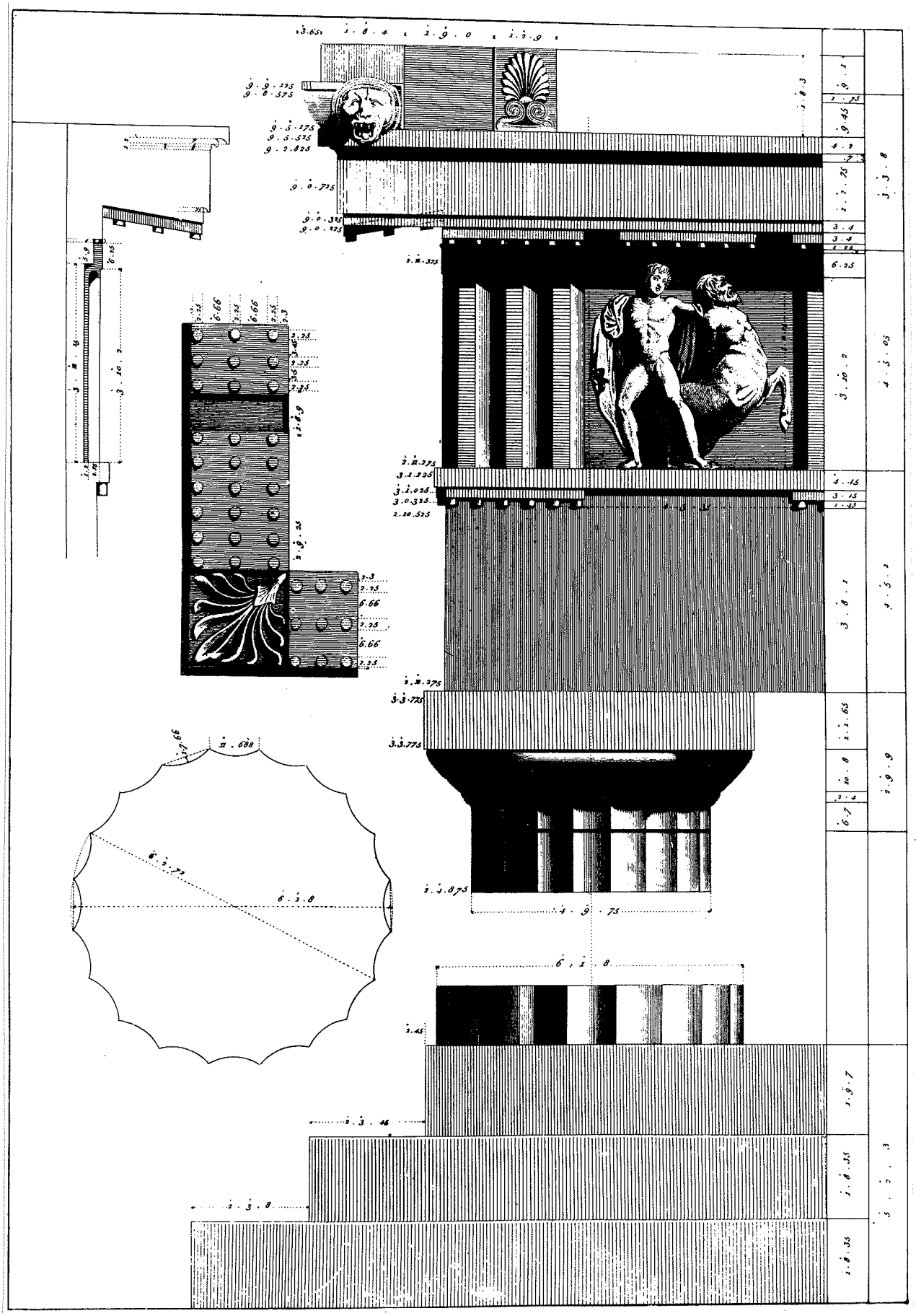
Udgangspunktet for disse betragtninger var studier af menneskekroppen, hvor vi er meget nøjeregnednde i vores opfattelse af det velskabte.

Bedømmer vi, om et menneske forekommer velskabt, er velproportioneret, er vi uafhængige, om vedkommende er lille eller høj, lys eller mørk, slank eller buttet, særdeles følsomme over for hoved, lemmer og krops indbyrdes størrelsesforhold, der for at forekomme os harmonisk, skal være afstemt inden for ganske snævre rammer.

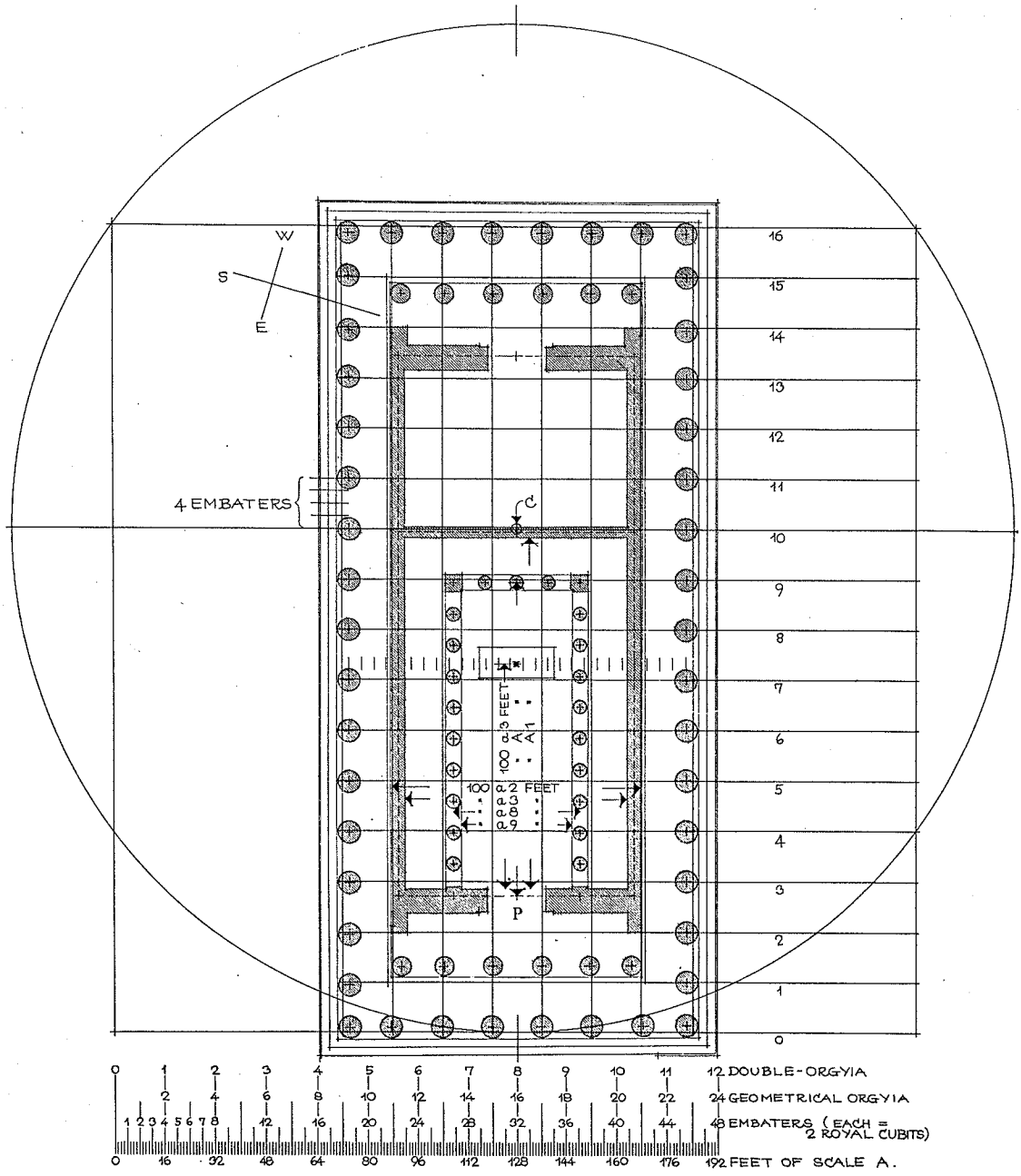
På tilsvarende måde kan vi af reglerne, der ligger til grund for det græske tempelbyggeri, finde, at hensynet til den harmoniske helhedsvirkning har dikteret størrelsesforholdet mellem templernes enkelte bygningsdele. De enkelte komponenters dimensioner er her produkt af samme grundmål.

Grækerne dyrkede endvidere overgangene mellem de enkelte bygningsdele, så de sluttede sig til hinanden på samme artikulerede eller selvfølgelige måde, som lemmerne slutter sig til kroppen, og som lemmernes enkelte led slutter sig til hinanden.

Det græske tempel - med Parthenon som det ypperste eksempl - har en skønhedsværdi, som man også i dag - mere end 2000 år efter det er opført - anérkender.



Partheon, Athen.



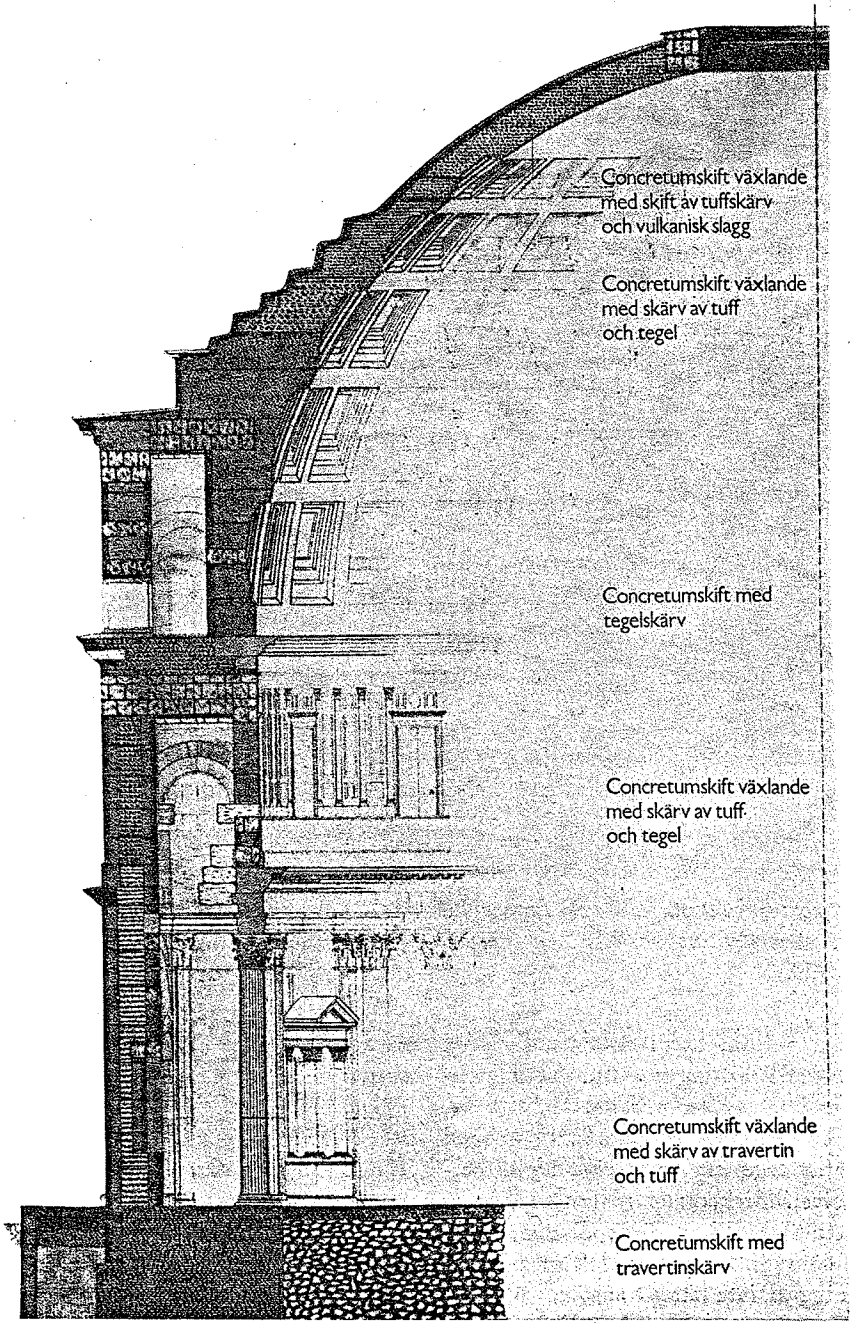
Parthenon.
Studie af
Eivind Lorenzen.

Skønheden er opstået gennem en målbevidst stræben og en stadig raffinering af bygningstypen gennem mange generationer.

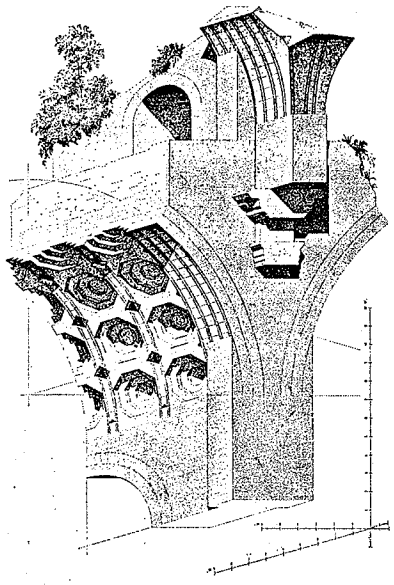
Visse proportioner fra de græske templer genfinder vi i forskellige senere, historiske perioders arkitektur.

Det er proportionerne bygget over "det gyldne snits" forhold, der er blandt de resultater af grækernes overvejelser på det matematisk/teoretiske plan, der har tiltrukket sig størst opmærksomhed fra oldtid til nutid.

Vi ved, at Pythagoras og hans elever var optaget af det. Euklid har beskrevet det. Dog betegnes forholdet hos ham kun som "snittet". Det "gyldne" er en tilføjelse, der først er kommet til under middelalderens dyrkelse af talmystikken.

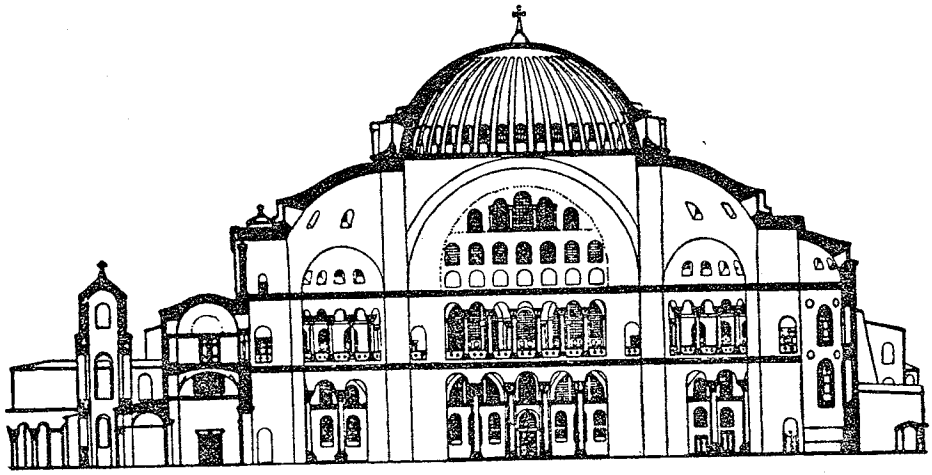


Snit i Pantheon.
Studie af Alberto Terenzio.

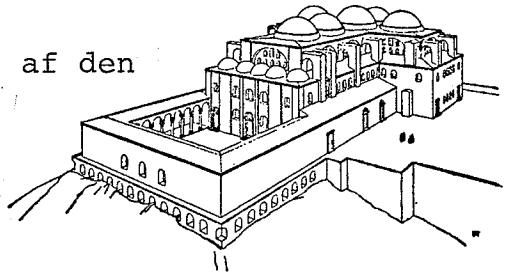


Romerske hvælvkonstruktioner, ca. år. 300.

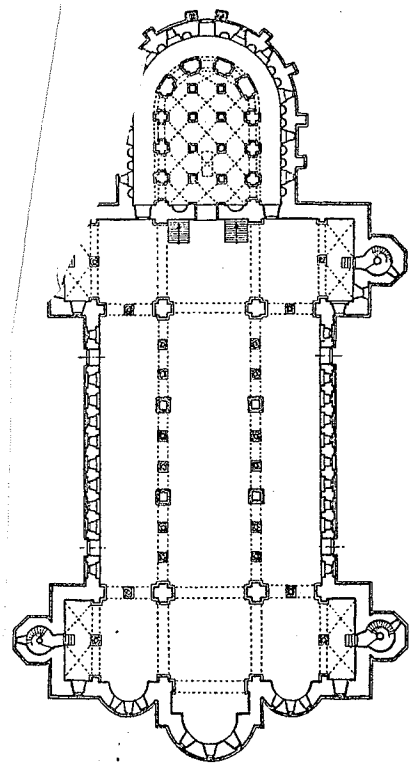
Grækernes bygningskunst-idealer blev indtil omkring år 100 f.Kr. videreført temmelig uændret af romerne. Men efter opfindelsen af betonen og udviklingen af hvælvet opførte romerne bygværker som broer, kajanlæg, termer, triumfbuer og akvædukter, der i formsprog og konstruktion er uden græske forbilleder.



Længdesnit i den byzantinske kirke i Hagia Sophia, bygget 532-537.



Rekonstruktion af den byzantinske Johanneskirke i Ephesos fra midten af det 6. årh.



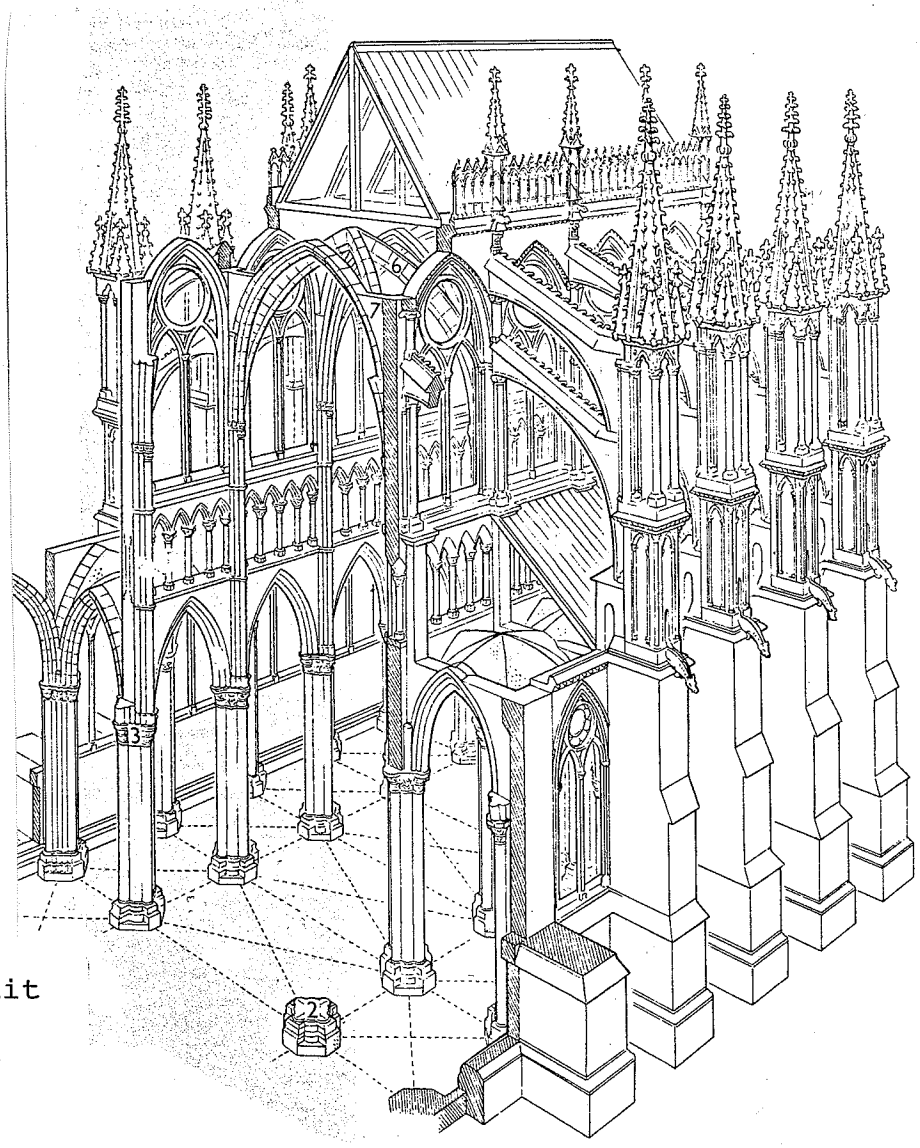
Den romanske klosterkirke St. Michael i Hildesheim, bygget 1000-33.

Efter flytning af Romerrigets centrum til Byzants i det 4. århundrede, afløser den byzantinske kunst den romerske som selvstændig kunstform.

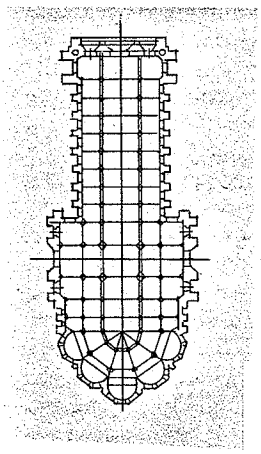
Såvel den byzantinske som de to efterfølgende stilarter, den romanske og den gotiske, udvikles uden synlige referencer til den antikke græske kunst.

Forskellen mellem disse tre stilarter kommer især til udtryk på det konstruktive område.

Byzantinsk og romansk bygningskunst er karakteristisk ved store flader og ubrudte mure. Bygningernes ydre er oftest afdæmpede i udtrykket, kompakte, tunge og lukkede, mens rummene er smykket med farvestrålende mosaikker og kalkmalerier, komponeret til og i harmoni med bygningens form og byggematerialernes farver.



Perspektivisk snit og plan af den gotiske domkirke i Reins fra det 13. århundrede.



Under gotikken forlades det tunge og lukkede. Der findes her en bevidst bestræbelse på i bygningskunsten at nå så lette og højtstræbende konstruktioner som teknisk muligt.

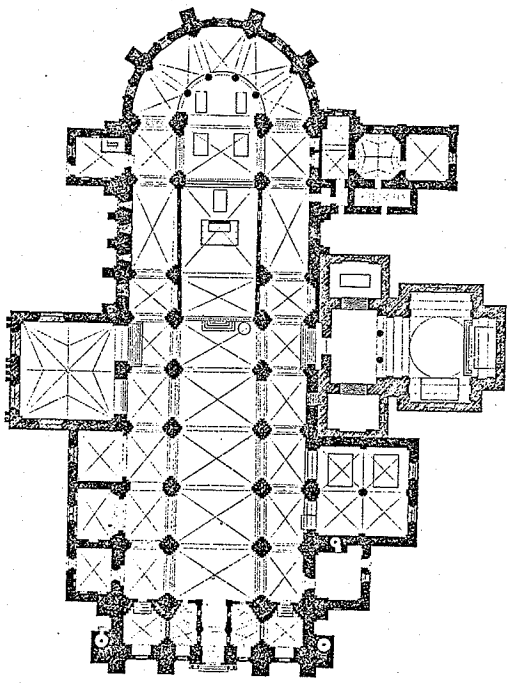
Materialerne udnyttes til det yderste.

Karakteristiske kendetegn er spidsbuen og krydshvælvet. Enorme glasvinduer bryder murene, og kirkerummene domineres af talrige søjleknipper. Murene afstives udvendigt af stræbepiller og buer, og dekoreres med småtårne og figurer.

Gotikken har bredt sig over det meste af Europa fra Frankring, hvor den er kommet rigest til udtryk i en lang række katedraler.



Perspektiv og plan af Roskilde domkirke, der er en blanding af romansk og gotisk byggemåde.

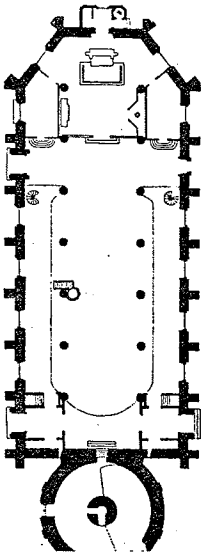


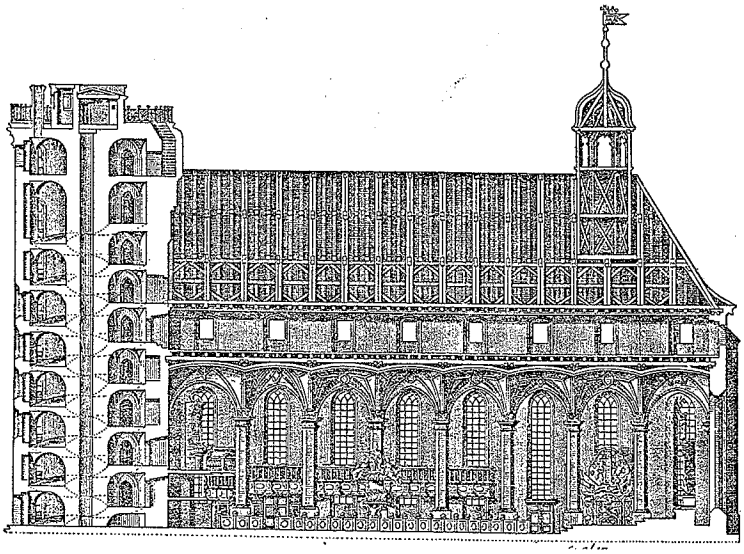
De rigt udsmykkede facader virker overvældende. Relieffer og statuer gengiver gammel-testamentlige beretninger, og de farvede glasruder, der kun virker indefra, udgør farveindslaget. Maleri, skulptur og arkitektur udgør et hele.

Formsproget er rigt og varieret, men geometrisk lovbestemt. På intet sted bryder skulpturerne de arkitektoniske rammer.

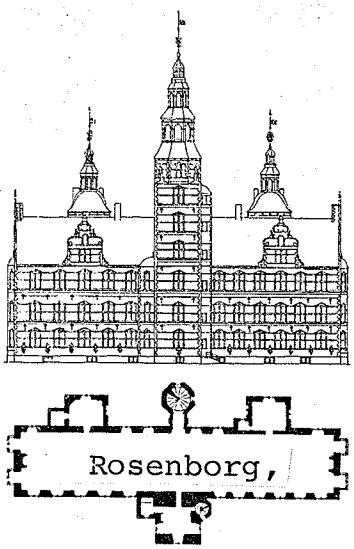
I det profane byggeri er det bindingsværkskonstruktionerne, der dominerer. Borgerhuset får under gotikken stilpræg og indgår i udviklingen af bygningskunsten. Individuelt udvikles der op gennem tiderne for hver egn karakteristiske hustyper i bindingsværk.

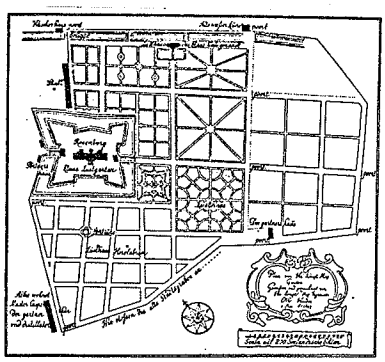
Gennem hele middelalderen er åndslivet afhængig af kirken og domineret af teologien.





Plan og snit i Trinitatis kirken og Rundetårn, bygget 1637-56.





Kongens have 1649. Rosenborg er her omgivet af en voldgrav.

I renæssancen sker der under indflydelse af adelen og den velhavende borgerstand en forskydning fra en religiøs til en mere æstetisk indstilling.

Det teologisk opbyggede verdensbillede ændrede form til et mere erfaringsbegrundet.

Afgørende for denne ændring var Kopernicus' idé om solen og ikke jorden som verdens midtpunkt. Brunos idé om universets uendelighed, og Galileis forståelse af, at man kun ved at beskrive målelige træk kan opstille eksakte naturlove.

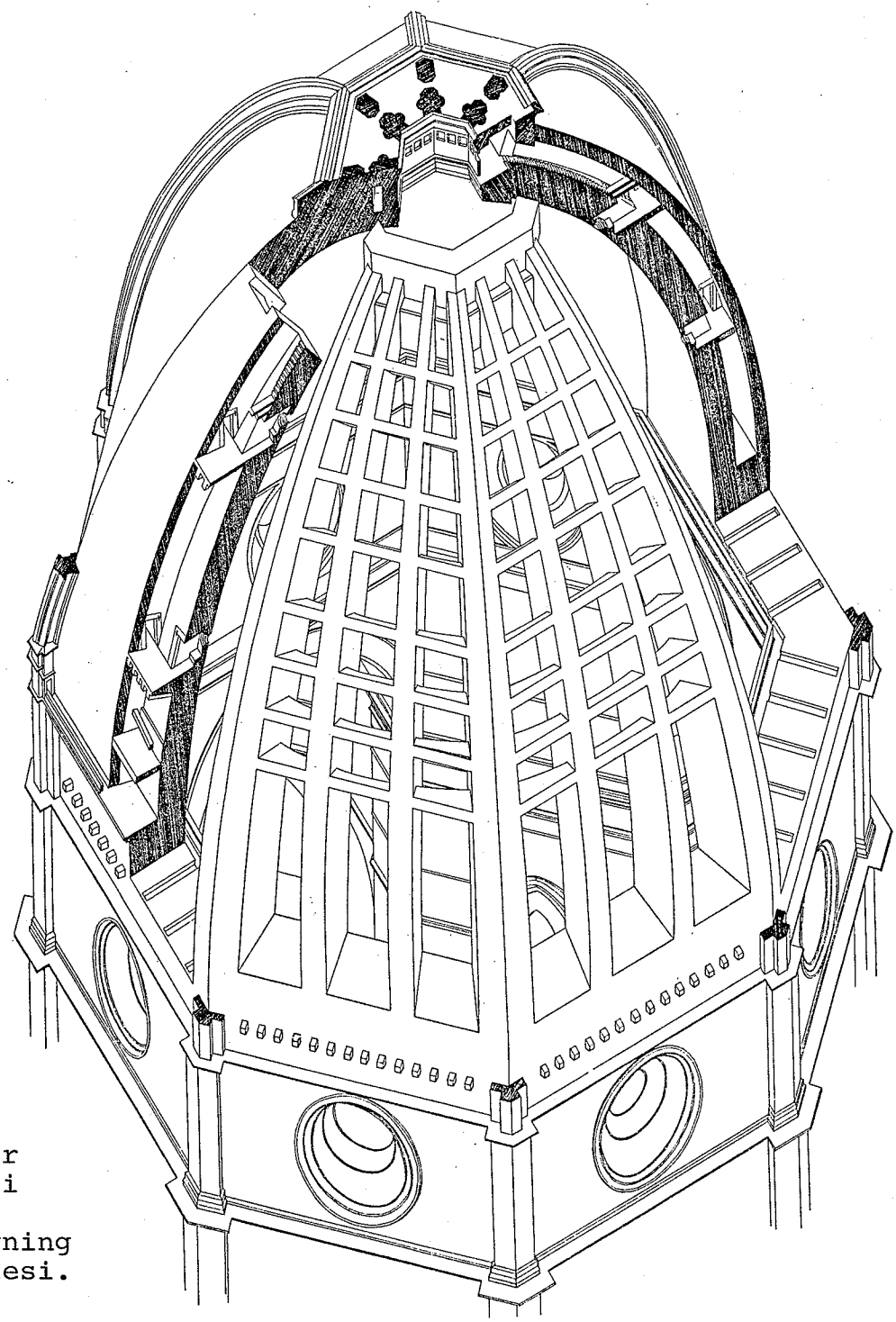
På det naturvidenskabelige område sker der ikke alene et brud med middelalderens, men også med antikkens idealer, idet man helt forkaster den aristoteliske fysik.

På de fleste øvrige områder bliver renæssancen - som navnet antyder - en genfødelse af antikkens ånd.

Som grundlag for bygningskunsten erkendes de klassiske principper omfattende regelbundne proportioner, harmoni, symmetrisk planmæssighed.

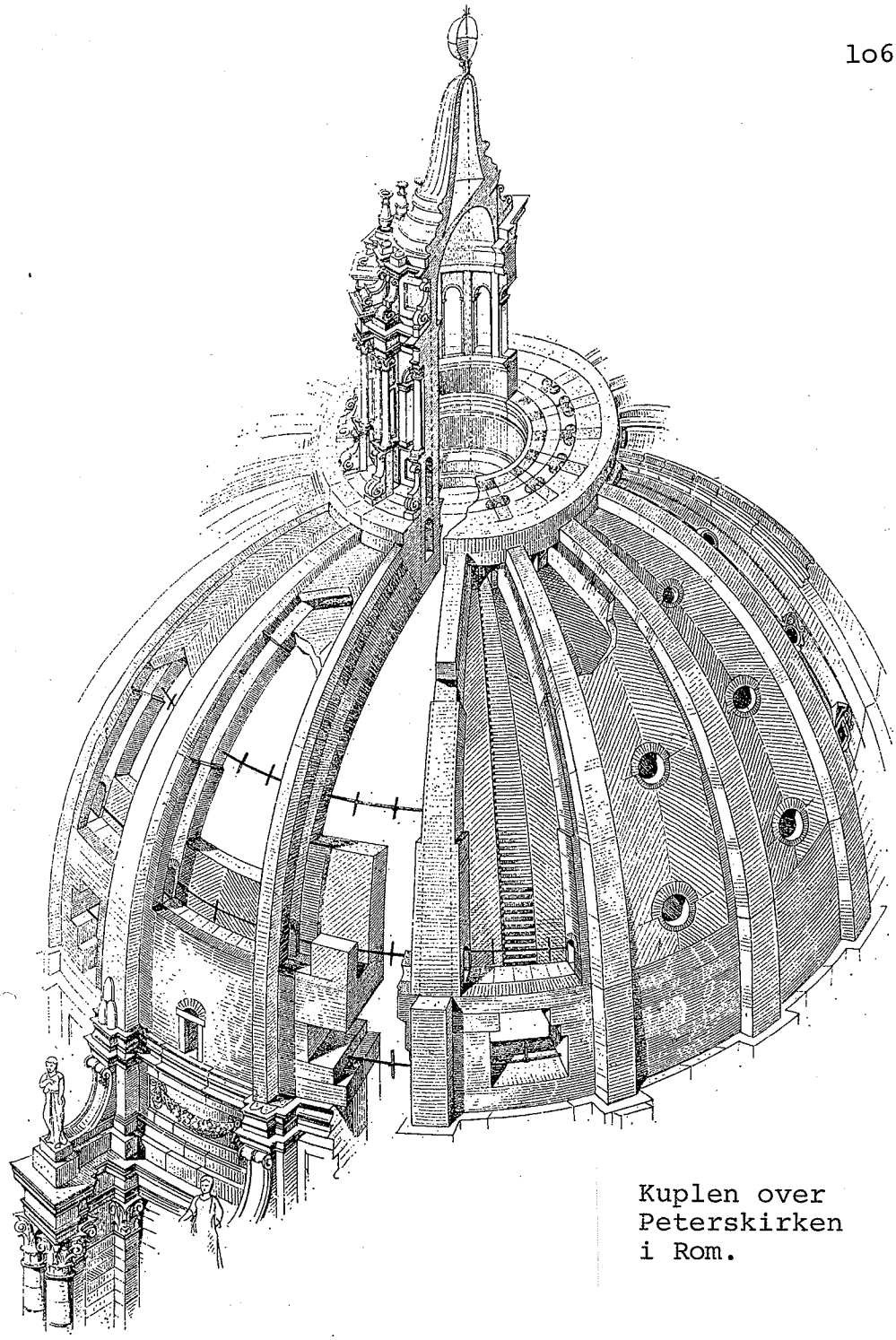
Bygningslegemerne er præget af klar konstruktiv og geometrisk opdeling. Forbillederne var for arkitekturen som for billedkunsten de fremdragne antikke skulpturer, og specielt den romerske bygningskunst.

Foruden de antikke søjler, pilastre og trekantede gavle indførtes et nyt element: kuplen, som ganske vist kendtes fra romerske bygværker, f.eks. Pantheon, men under renæssancen udvikles den efter gotiske traditioner.

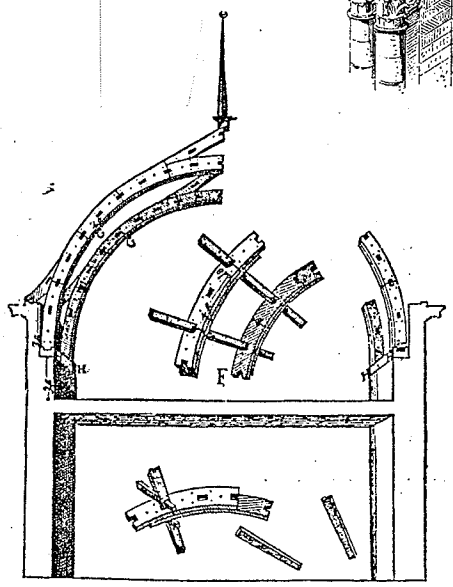


Kuplen over domkirken i Firenze. Principtegning af Sanpaolesi.

Filippo Brunellechi byggede i begyndelsen af 1400-tallet den otte-kantede kuppel over domkirken i Firenze som en ribbekonstruktion med mellemliggende dobbeltkapper - en konstruktionsmåde, som senere forædles af Michelangelo i Peterskirkens kuppel.



Kuplen over Peterskirken i Rom.

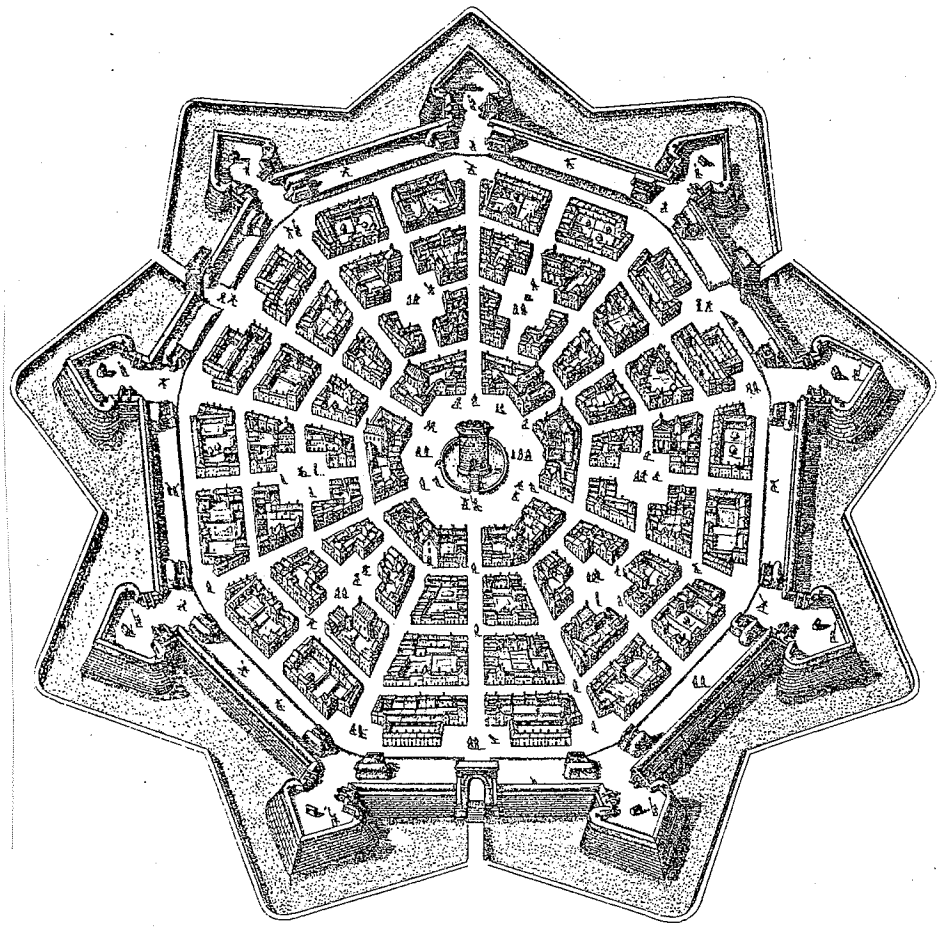


Trækonstruktion af Philibert de l'Orme, 1570.

I formsproget er renæssancen et opgør med gotikken, men en række af de anvendte konstruktionsprincipper er en direkte videreudvikling af middelaldertraditionen.

Analysen af den umiddelbart sete virkelighed er et særkende for renæssancen. På det grundlag udvikles nye konstruktioner.

Et eksempel er den franske arkitekt Philibert de l'Ormes arbejder. Han sammenfatter og videreudvikler middelalderens tømmerteknik. Hans trækonstruktioner, der var velegnede ved overdækninger af såvel krumme som kantede rumformer, bliver indledningen til en videnskabelig behandling af træteknologien.



Palma Nuova, grundlagt 1593, stik af Braun og Hogenberg.

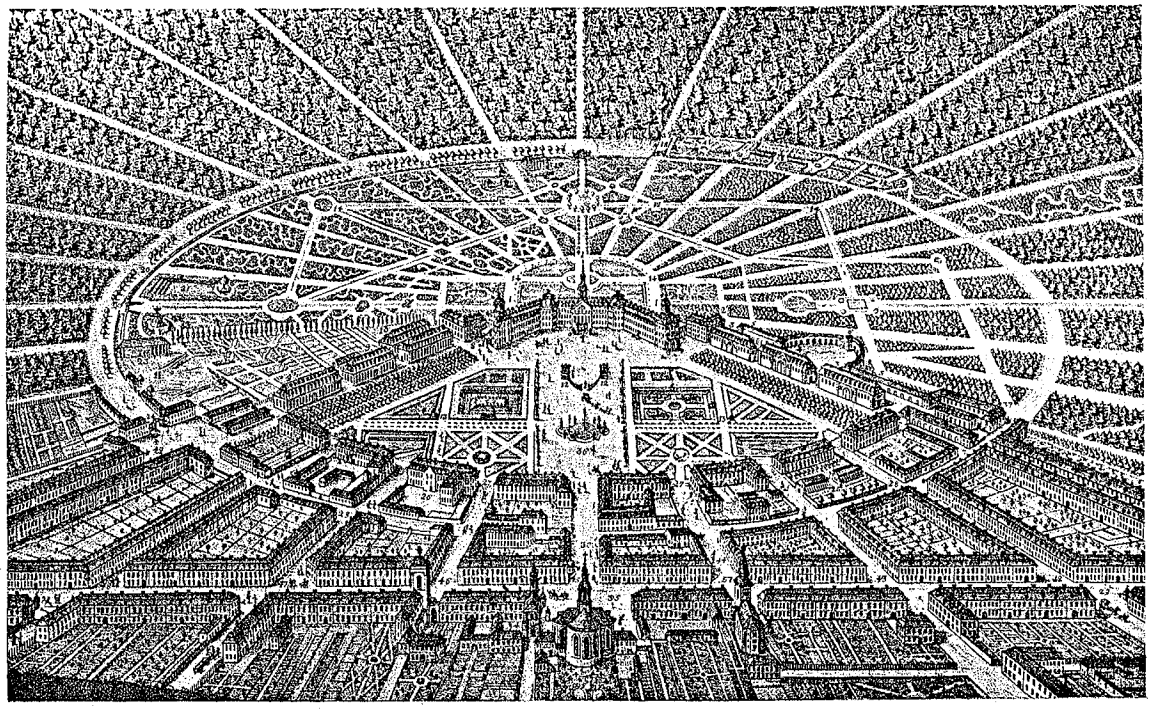
En analytisk og metodisk arbejdsmåde fører også til gennemgribende ændringer på byplanlægningen.

Der kendes fra renæssancen et væld af forslag til "idealbyer", hvor klimatiske forsvarsmæssige, merkantile og hygiejniske forhold er taget i betragtning.

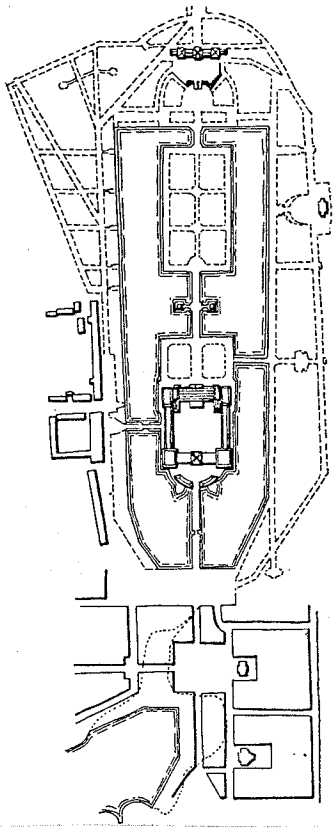
Forslagene havde stor indflydelse på udbygningen af eksisterende byer. Herhjemme f.eks. ved udbygningen af Christianshavn.

En enkelt, Palma Nuova, er bygget som ny by. Den blev grundlagt i 1593 i staten Venezia. Palma Nuova er anlagt med en voldpolygon af form som en ni-takket stjerne. Den har 3 byporte, radiærgader og et ni-kantet ringgadesystem.

Blandt en række polygoner, der lader sig konstruere, er her valgt en af de få, som ikke kan konstrueres. Det bliver den vel ikke mindre smuk af, men strengt taget er den ukorrekt.



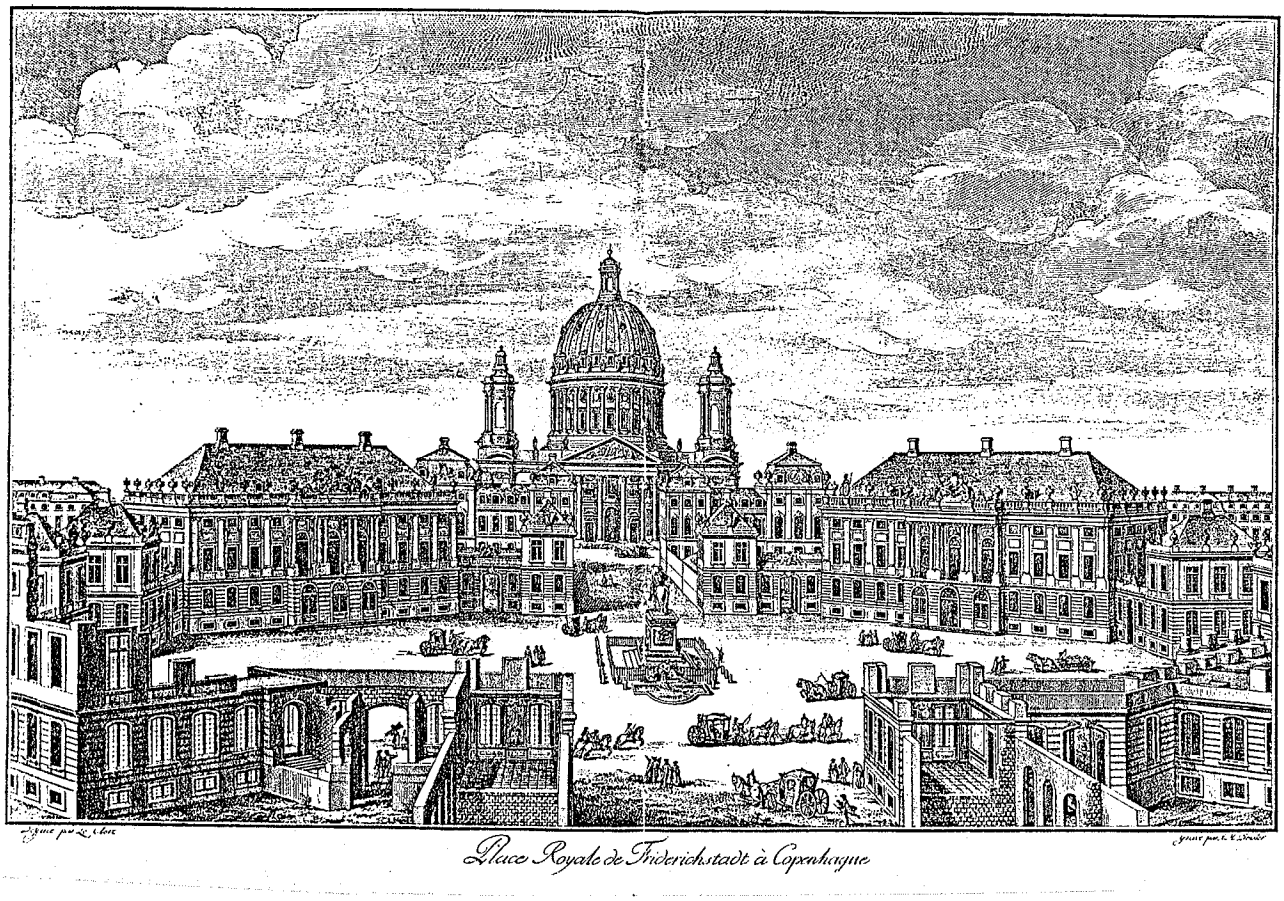
Karlsruhe 1715.



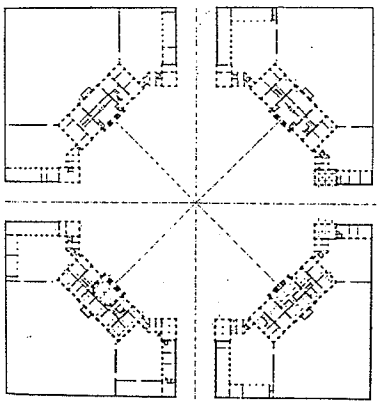
Laurids de Thurah:
Hørsholm slot 1733-44.

I løbet af 1600-tallet udvikler renæssancen sig til barokken. Formidleren er Michelangelo. Vægten lægges på bygningshelheden, rumformen og hele byanlæg. Samspillet mellem arkitektur, skulptur og maleri er stor. Forbilledet for formsproget er her som under den efterfølgende stilart rokokkoen fortrinsvis den romerske oldtid.

Med barokken begyndtes projekter af byen med regentboligen som dominerende faktor. Louis XIV's Versailles opstod som by om et tidligere jagtslot uden for Paris og Karlsruhe er et tilsvarende yngre tysk eksempel.



Amalienborg, stik af Preisler efter tegning af Le Clerc.

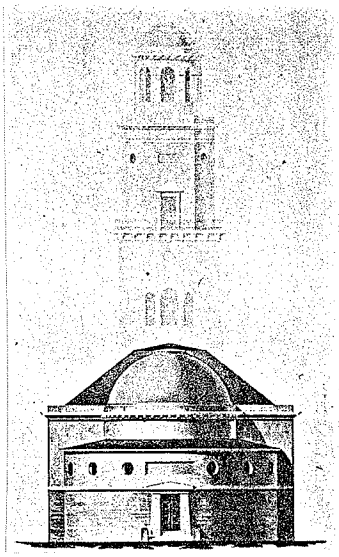


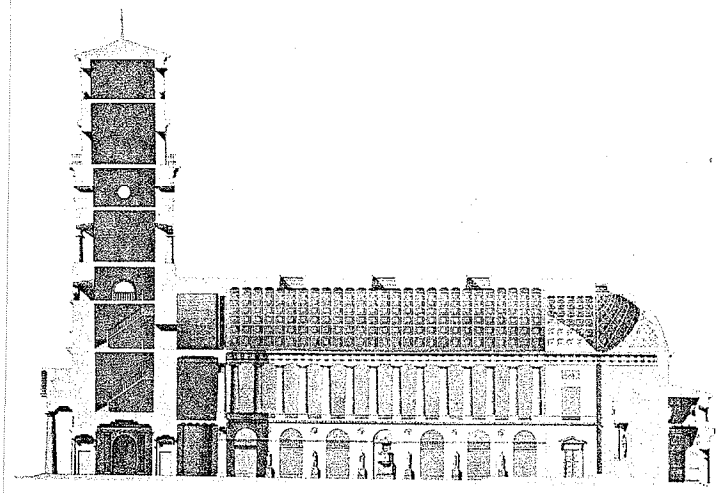
Plan af de fire palæer omkring Amalienborg slotplads.

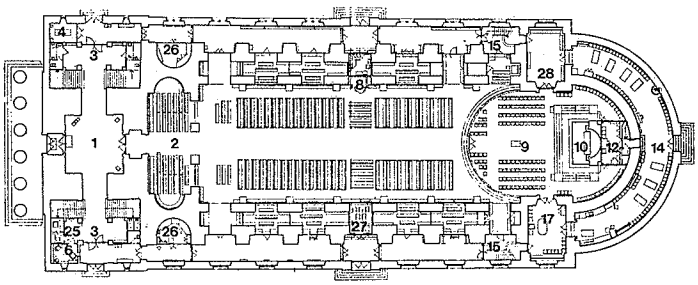
I Danmark er der ikke anlæg af den størrelsesorden fra denne periode, men i kvalitativ henseende er rokokkoen med Nikolai Eigtveds Frederiksstaden repræsenteret med noget af det ypperste, der er præsteret.

Anlægget omfatter den ottekantede statsplads med fire palæer, hver flankeret af to pavilloner, Amaliegade med den neutrale, regelmæssige huse, Frederiksgade med Bernstoffs og Dehns palæer og efter Nikolai Eigtveds plan tillige Frederikskirken som afslutning på gaden.

Kirken blev imidlertid først påbegyndt af Henri Jardin, der er den arkitekt, der baner vej for klassicismen, hvor det især er den antikke, græske kunst, der dyrkes som forbillede.







C.F. Hansen:
Vor Frue Kirke.
København 1811-29.
På opstalten har tårnet endnu ikke fået sin endelige form.

Kunsthistorien, som under klassicismen dyrkes på videnskabelige grundlag, intensiverer stilimmitationen og er sikkert i visse tilfælde med til at presse denne over i en gold efterligning.

Perioden efterfølges af en intens håndværksdyrkelse og efterligning af ældre national bygningskunst. Industrialismens gennembrud markerede ikke straks en ny retning, men trætheden ved historisme førte til mange forsøg på at finde en ny stil.

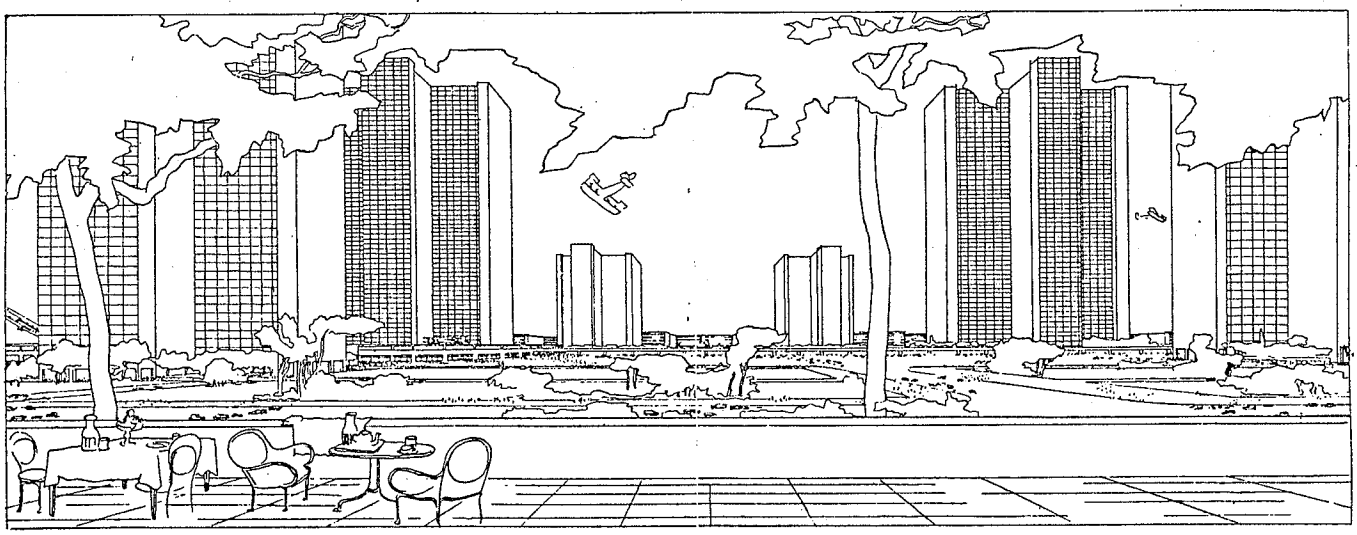
Sullivan i U.S.A., Henry von de Velde i Belgien og Perret i Paris søgte hver for sig frem mod en formgivning, der var i overensstemmelse med den nye tids krav og muligheder.

Forsøgene var mangeartede og opmærksomheden samledes en kort tid om jugendstilen, hvor der lægges vægt på god udførelse, ægte materialevirkninger og hensigtsmæssige rumformer.

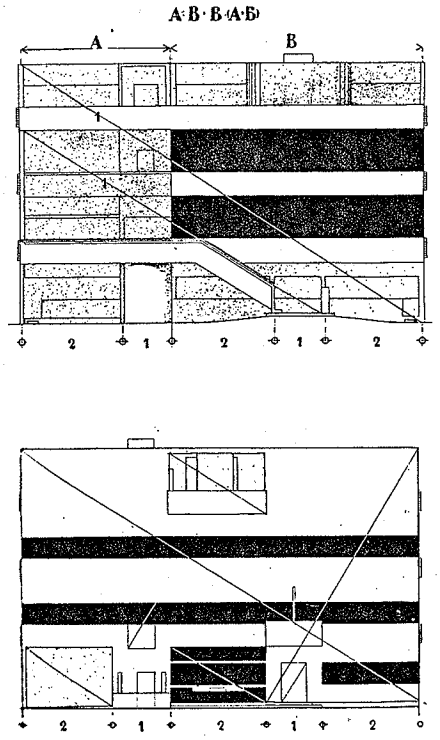
Stilen er karakteriseret ved et stærkt bevæget liniespil, assymetrisk komposition og stiliserede, dekorative naturformer med forbillede i bladstængler, åkander, tobaksrøg og skydannelser.



Th. Bindesbøl:
Jugendinspireret bomærke for Carlsberg Bryggerierne.



Le Corbusier: Fremtidsbyen.



Le Corbusier:
Villa: A. Garches, 1927.

Det er imidlertid først med funktionalismens gennembrud, der sker en afgørende, kunstnerisk principskifte. Formprincippet afløses i idégrundlaget af formålsprincippet.

Når funktionalismen i løbet af ganske få år fik verdensomspændende indflydelse skyldes det ikke mindst Bauhaus-institutionen, der oprettedes i 1919 i Weimar under ledelse af Walter Gropius.

En af institutionens bærende og mest originale idéer var, at kunstarterne skulle forenes i en "Gesammtkunst".

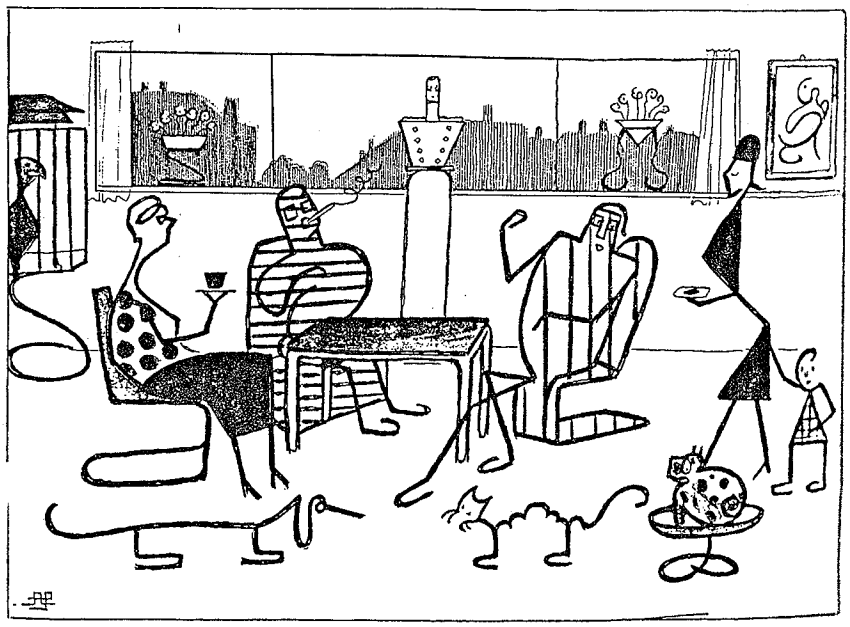
I dens undervisning deltog,udover arkitekter, malere som Paul Klee og Kadinsky, men også komponister som Stravinsky, Paul Hindemith og Bela Bartók.

For bygningskunsten er udgangspunktet her de kalkulérbare behov, nøgternhed og tilpasning til en teknisk verden.

Hver bygningsopgave skal løses ud fra sine egne forudsætninger.

Ikke desto mindre karakteriseres funktionalismens bygningskunst nu ud fra sit formsprog, som "den hvide stil", hvis harmonidyrkelse ligger tæt op ad de klassiske idealer.

Et "Funkis-Hjem", Alfred Schmidt i Blæksprutten



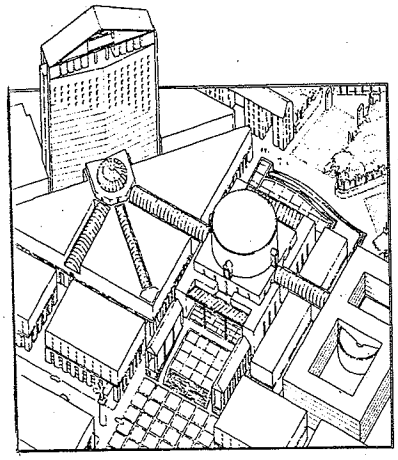
Den dekorationsløse, enkle, geometriske form egner sig til massefremstilling. Bolignøden efter 2. verdenskrig kan ad den vej afskaffes, men massefremstillingen af huse fører til en repetitionsarkitektur, som flere reagerer mod med en individuel ekspressionistisk arkitektur, som det f.eks. kommer til udtryk i Eero Saarinens TWH-bygning i New York, Jørn Utzons Sidney Opera-House, og i en lang række af Alvar Aaltos bygninger.

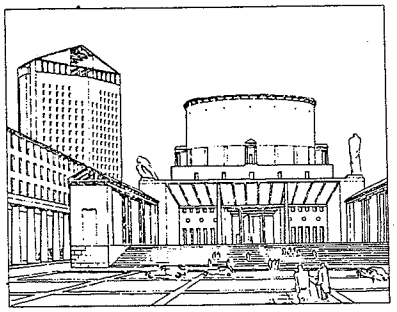
Fra enkeltpersoner og grupper demonstreres en række nye idékonstruktioner.

De spænder vidt, men fælles for dem alle er, at formen tildeles en værdi i sig selv.

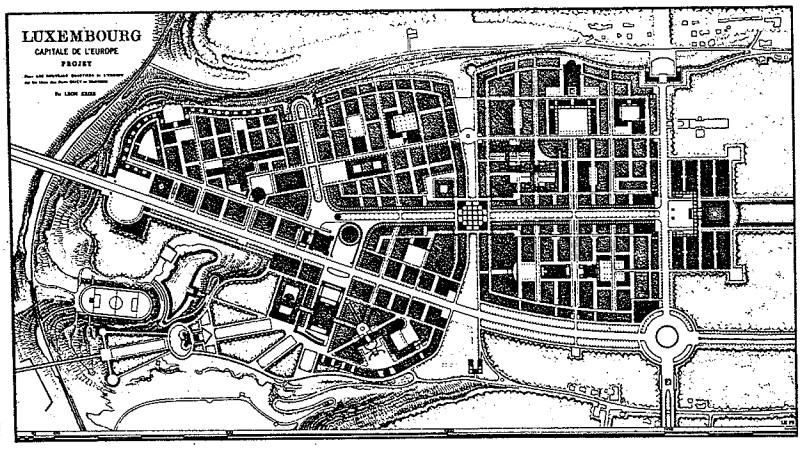
Den ene ende af spektret af nye teorier, repræsenteret af bl.a. Robert Venturi, manifesterer sig med en bygningskunst, der påpeger kvaliteten i kompleksiteten og det dobbelttydige.

De forsøger at være folkelige gennem et formsprog, der i kvalitativ henseende sætter lighedstegn mellem de klassiske formidealer og det kommercielle forbruger-samfunds reklamebilledsprog.





Leon Krier:
Luxembourg projekt,
1978



Den anden ende af spektret er repræsenteret af bl.a. arkitekterne Leon Krier og Aldo Rossi, der søger en byform, som gør det muligt at aflæse historien som en kontinuitet og forstå, at byens dele peger mod en fælles oprindelse.

De sigter efter eget udsagn mod en arkitektur, der kan forstås af alle og betjener sig i så henseende af få udvalgte, oftest særdeles monumentale elementer, præget af den enkle geometri.

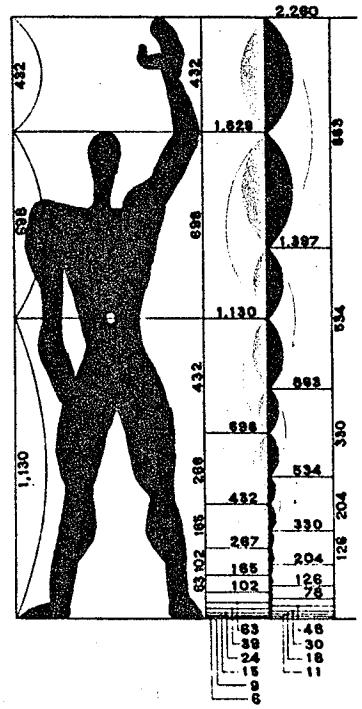
Den tydelighed, de udtrykker sig med, er en klar afvisning af såvel formalistisk proportionering som organisk byggemåde.

Mellem disse yderpunkter ligger en arkitektur, der seriøst inddrager det sociale aspekt og byder på en formrigdom, som vi har savnet i efterkrigstidens industrialiserede byggeri.

Denne retning er repræsenteret af bl.a. den engelske arkitekt Ralph Erskine, der har projekteret og opført interessante bebyggelser i flere forskellige egne af kloden.

Ralph Erskine afslører i forelæsninger og skrifter, når han beretter om intentionerne med sine arbejder, et stærkt engagement i spørgsmål, der har været centrale i den danske debat, f.eks. vedr. energi- og ressourceproblemerne, brugerindflydelse og hensynet til minoritetsgrupper som blinde og bevægelseshæmmede. I resultaterne kommer såvel det sociale engagement som den kunstneriske aktivitet stærkt til udtryk.

Meninger og holdninger lader sig ikke udlede metodisk, men den rationelle arbejdsmåde, som var karakteristisk for funktionalisterne kan være nyttig, når det drejer sig om behandling af begrænsede problemer, som lader sig beskrive.



Le Corbusier:
Principtegning
fra "Le Modulor".

Eksempler kan være Christopher Alexanders "Pattern Language" eller Le Corbusiers "Le Modulor".

Anvisninger af denne art er naturligvis ikke en garanti for et godt resultat. De kan sikre overblik over problemstillingen og en vis orden i resultatet, men det vil altid være det kunstnerisk betingede valg blandt flere muligheder, der er udslagsgivende.

Selv om grundsynet på, hvad der er smukt og harmonisk kan forblive det samme, vil kravene til de regler, man benytter sig af, ændre sig i takt med brugskravene og teknologien. De sociale og politiske forhold spiller ligeledes ind, idet de afspejler sig i de bygværker og den kunst, der lægges vægt på.

Der er væsensforskel i idéerne bag udformning af det offentlige monumentalbyggeri og borgerhusene, eksemplificeret ved f.eks. det græske tempel og en landsbygades bindingsværkshuse.

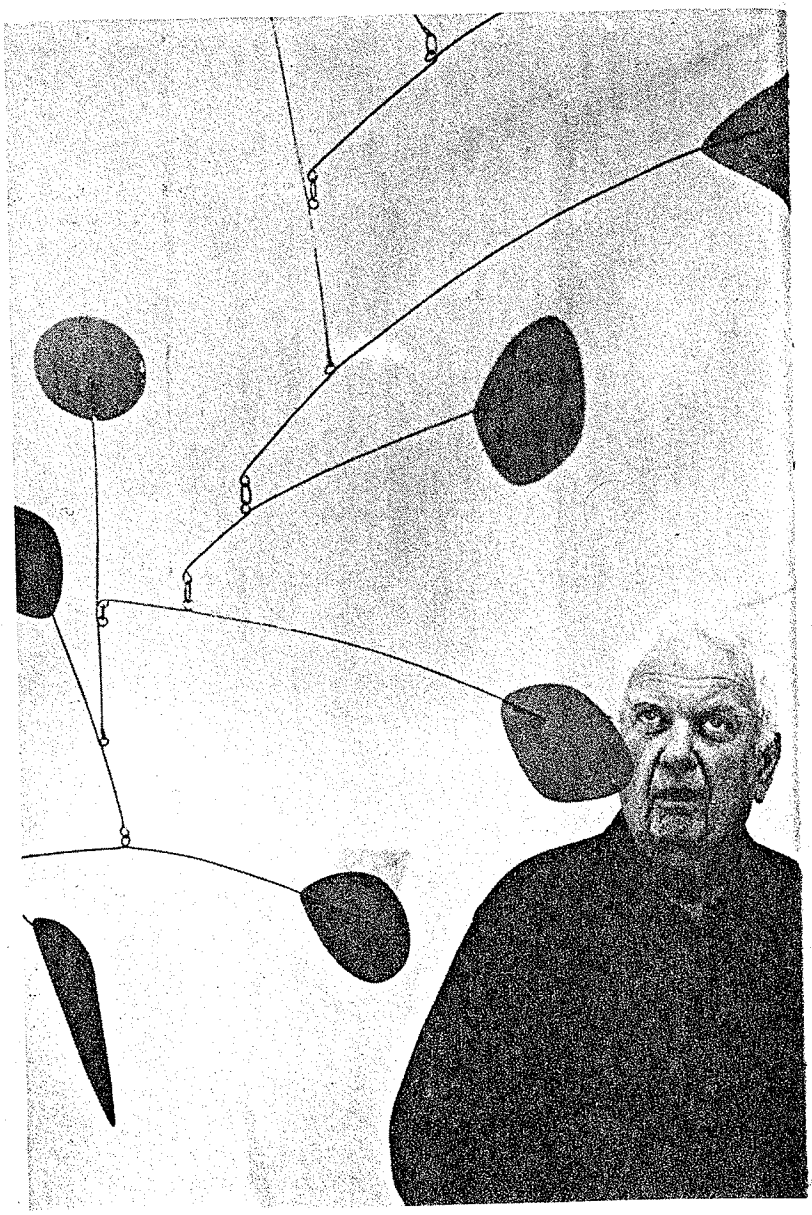
Vi kan i begge tilfælde opfatte en række højst tiltalende egenskaber ved bygværkerne, men den idémæssige baggrund for harmonien og skønheden ligger på forskellige planer.

Det danske bindingsværksbyggeri er analogt med det græske tempel forædlet gennem mange generationer og proportioneret i forhold til menneskelige størrelser. Modulmålene for bindingsværksbyggeriet var fastlagt i tommer og fod, der henviser til noget menneskeligt.

Med hensynet til at opnå bekvemme brugsmæssige kvaliteter og på fornuftig vis at respektere, at alle byggematerialer som sten, tømmer og brædder forefandtes i givne dimensioner, har her spillet en større rolle, end at hovedform og alle detaljer passede ind i et udbygget matematisk/teoretisk bestemt regelsæt.

Analyser af de brugsmæssige egenskaber, en bygning skal have, eller af mulige konstruktionsprincipper for givne materialer, kan være kvalitetskriterier, men fører ikke til éntydige svar på formproblemet.

Arkitekterne slipper ikke for at gøre valg og at tage standpunkter i såvel sociale som kunstneriske spørgsmål.



Alexander Calder, her fotograferet med en af sine mobiler i 1973- (Polfoto).

For formgivningen er problemstillingen komplex og valgmulighederne mange. Her reflekteres uhåndgribelige værdier, vores følelse for tingene.

Valget må, skriver Piet Mondrian i bl.a. "Le Neoplasticisme" (udgivet på tysk af Bauhaus 1925), afspejle to modsat rettede menneskelige tilbøjeligheder.

Den ene stræber efter at skabe universel skønhed, den anden at realisere sig selv eller at udforme tanker og følelser æstetisk.

Den ene bestræbelse går ud på at repræsentere virkeligheden, den anden det subjektive.

Problemet er at opnå balance mellem det objektive og det subjektive.

Ifølge Mondrian viser en omhyggelig iagttagelse af bygningskunst, skulptur og malerkunst gennem tiderne, at kunsten gradvis rendyrker sit billede eller plastiske hensigt. Den subjektive tendens opretholder det figurative formsprog. Den objektive tendens eliminerer det figurative.

Mens den første anvender mere eller mindre komplicerede og særlige former, bruger den sidste neutrale former, da universel skønhed ikke fremkaldes ved den særlige formkarakter, men ved de naturlige proportioners dynamiske rytme.

Mondrian finder de to modsat rettede tilbøjeligheder uundværlig, når hensigten er at skabe følelser hos tilskueren eller brugeren. Derfor kan kunstværket kun opstå gennem en virkelig forbindelse mellem det universelle og det individuelle.

Dette indebærer selvsagt også, at kunst ikke kan gøres til en matematisk opgave. For den subjektive bearbejdning af de neutrale former kan der ikke opstilles regler og metoder. De neutrale fromers egenskaber og indbyrdes relationer kan derimod, som det er tilstræbt i foregående afsnit, beskrives og dermed blive et redskab i arbejdet med formgivning.

Blandt såvel de to-dimensionale som de tre-dimensionale former findes der en række absolutte former. De enkleste af disse betragtes i denne sammenhæng som neutrale i kraft af deres opfattelige, markante, entydige udtryk.

Eksempler på neutrale to-dimensionale former er cirklen, den ligesidede trekant, -firkant, -femkant og -sekskant. Når kanternes antal øges mister polygonen sine iøjnefaldende egenskaber. Eksempler på neutrale tre-dimensionale former er kuglen og de regulære polyedre.

Ellipsen, parablen og hyperblen og de dertil hørende rumlige former: ellipsoiden, paraboloiden og hyperboloiden samt keglen, cylinderen og pyramiden har også en vis fundamental karakter, men er ikke absolutte former, da aksernes indbyrdes størrelsesforhold i de førstnævnte, og forholdet mellem højde og grundflade i de efterfølgende kan varieres.

KONSTRUKTION OG FORM

I enkelte tilfælde forekommer der bygningsopgaver af en art, hvor konstruktionen alene i naturlig overensstemmelse med funktionen behersker den pågældende form.

Der er her tale om former, der udelukkende defineres af det konstruktive skelet, hvor formvæggene består af et åbent gitter, hvis dimensioner og maskevidde nøje svarer til de konstruktive krav.

Opgaver af denne art kan være åbne haller, kraner eller master, der således er eksempler på byggearbejder, der i dens konstruktive skelet har deres endelige form.

I en brokonstruktion af stål og jernbeton, d.v.s. en flerstofsform, indføres allerede nogle af de problemer, der er særlig karakteristisk for husbygning. Hvor forskellige materialer og konstruktioner mødes, og hvor specifikke brugskrav må tilgodeses, stilles der ganske særlige krav til formgivningen.

I husbygning kulminerer antallet af forskelligartede bindinger for den endelige form, idet denne ud over konstruktive forhold påvirkes af omfattende tekniske installationer til opvarmning, ventilation, teknisk hygiejne, belysning og akustik.

Disse fagområder er tekniske med hensyn til midler, men er med hensyn til mål rettet mod mennesker, i forhold til såvel fysiologiske som psykologiske behov.

Disse mangeartede bindinger, der alle må tilgodeses, er en del af baggrunden for, at Le Corbusier bruger betegnelsen bomaskine om sine boligblokke.

I Pompidoucentret i Paris er formen karakteriseret mere af de tekniske installationer, end af den bærende konstruktion.

Samme forhold er ligeledes baggrunden for, at Louis Kahn udviklede sine teorier om betjenende og betjente arealer, der hver får sit ligeværdige udtryk i det samlede bygningsanlæg.

I almindelighed er det dog problemerne knyttet til den bærende konstruktion, der har størst indflydelse på bygningsformen.

Desværre er der for ofte - af hensyn til at bygningen let skal kunne nedfældes på tegnebordet - en tendens til at betragte konstruktionselementerne og deres belastninger i ét plan.

Dette fører nødvendigvis til store begrænsninger for formgivningen.

I middelalderen, da bygningerne ikke blev gennemtegnet på papiret i samme udstrækning som nu, var tendensen til at bruge konstruktionselementer i ét plan ikke så udbredt.

De gotiske hvælvinger er eksempelvis tredimensionale rumkonstruktioner.

Siden den tid og navnlig efter fremkomsten af stål og jern er enkeltplans-konstruktionerne blevet reglen.

Rumkonstruktionerne, der ikke kan opfattes i ét plan, har dog så mange fortrin og muligheder i sig, at der er grund til særlig at beskæftige sig med dem.

Der er i hovedsagen to typer rumkonstruktioner bestående af henholdsvis én- og to-dimensionale elementer (gitre og skaller).

At begge typer kan udvikles af stangsystemer med mindst 3 understøtningspunkter i rummet.

En tresidet pyramide, hvis kanter er dannet af stænger, er rumlig stabil. Erstattes i samme form kanternes stænger af plader i pyramidens sideflader, er skeletkonstruktionen erstattet af en rumlig, stabil skalkonstruktion, der består af 3 plader, der læner sig mod hinanden.

Konstruktioner af denne art kan bære sig selv over arealer af betydelig størrelse og i et stort antal forskellige former.

Hvor to stive planer danner en vinkel, optræder skæringslinien som en bjælke.

En tynd papplade lagt mellem to lineære understøtninger vil ved lodret belastning hurtig nedbøjes på grund af dens ringe tykkelse i belastningsretningen.

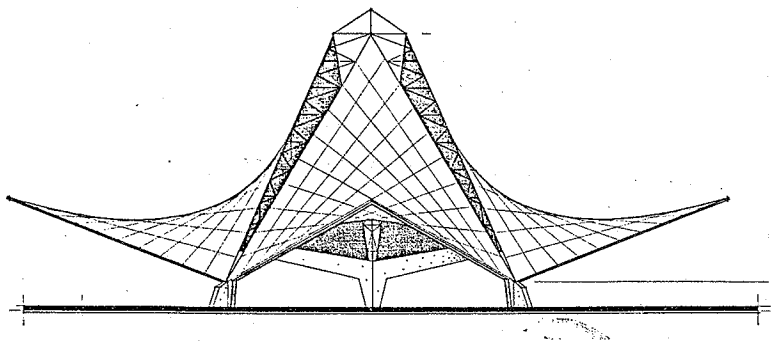
Bøjes pappladen op i en vinkel, vil den være langt mere modstandsdygtig overfor lodrette belastninger, som da kan fordele sig i siderne, der nu udnyttes som skiver.

En tilsvarende effekt opnås ved at læne to plader mod hinanden, hvis det sikres, at topforbindelsen er fikseret, og deres understøtninger hindres i at glide ud ved anordning af f.eks. trækbånd eller endeflader.

Jo flere foldninger konstruktionen besidder, jo mindre bliver de sekundære bøjningsmomenter hidrørende fra den lokale fordeling af belastningen ved pladevirkning til folderne.

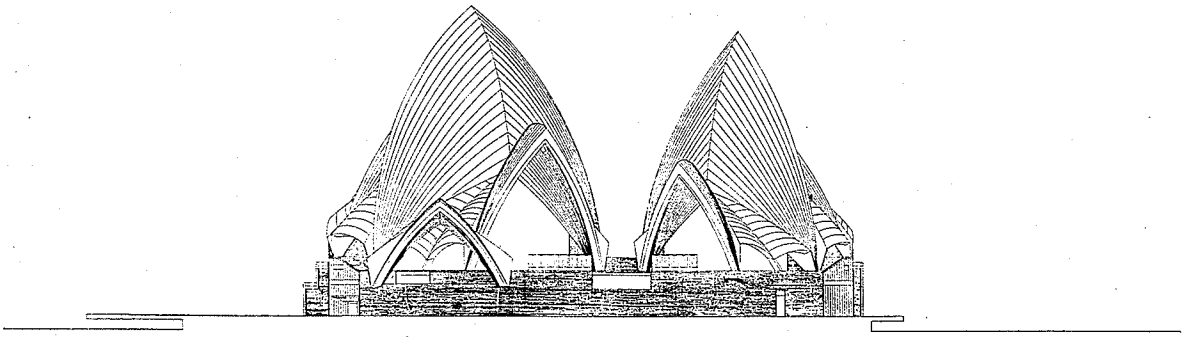
Med dette princip kan man udføre en mangfoldighed af tagformer. Konstruktionen kan udføres såvel konkav som konveks eller begge dele. Konstruktionens evne til at modstå de forskellige påvirkninger, den bliver udsat for, afhænger udover dens form naturligvis også af de valgte materialer og den måde, det pågældende materiale er anvendt på.

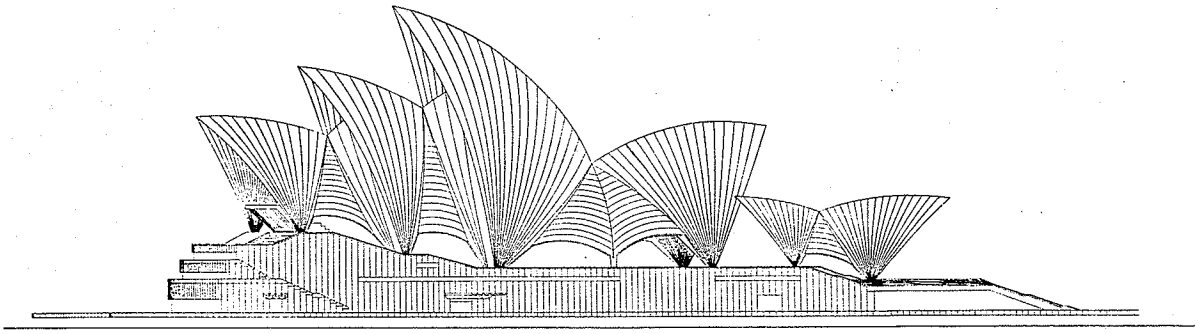
Hvilken enkelfaktor, der kan siges at have størst betydning for bæreevnen varierer for de forskellige konstruktionstyper. For skallerne er især formen væsentlig.

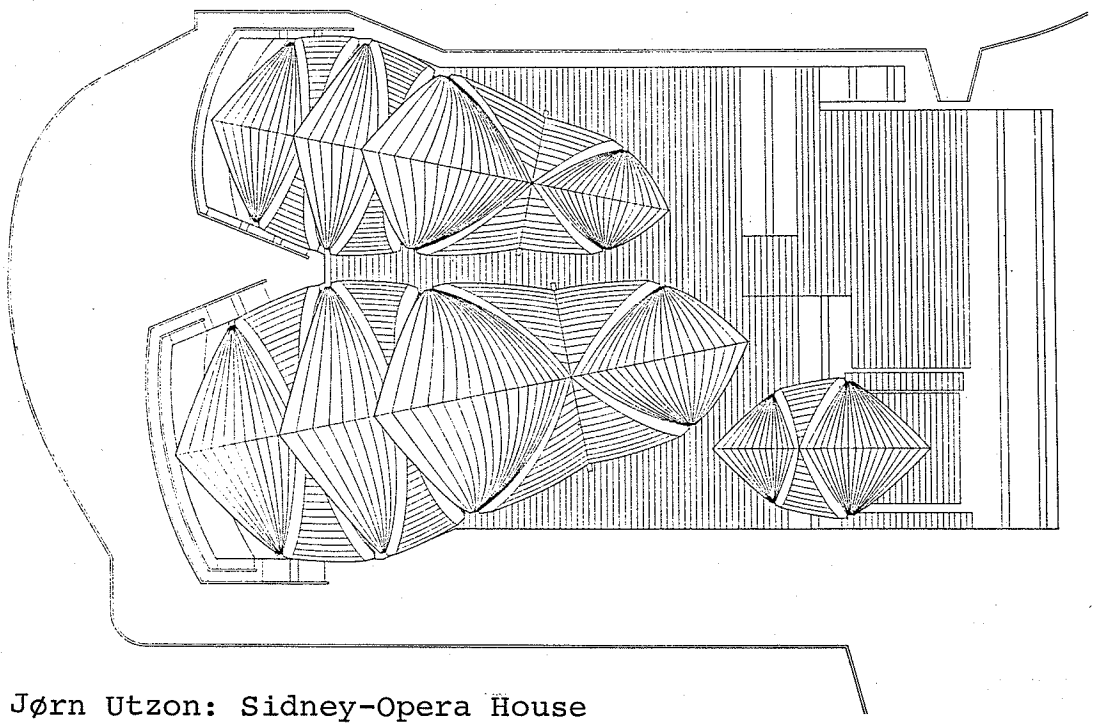


Felix Candela: Sankt-Vinzins-Kapellet.

Felix Candelas og Jørn Utzons arbejder er interessante eksempler på skalkonstruktioner, hvor henholdsvis den hyperbolske paraboloide og kuglen er de geometriske grundelementer.







Jørn Utzon: Sidney-Opera House

[13] Martin Johansen:
"VOLUMINALFIGURALE FÆNOMENER".

[14] Gyorgej Kepes:
"MODULE SYMETRY PROPORTION".
Studio Vista,
London 1966.

[15] Adolf Lomholt:
"REGULÆRE POLYEDRE".
Viborg, 1895.

[16] Niels-Ole Lund:
"TEORIDANNELSER I ARKITEKTUREN".
Arkitektens Forlag, 1970.

[17] Piet Mondrian:
"LE NEOPLASTICISME".
Tysk oversættelse,
Bauhaus 1925.

[18] Arne Næss:
"FILOSOFIENS HISTORIE".
Vinters Forlag, 1963.

[19] Frei Otto:
"TENSILE STRUCTURES".
The M.I.T. Press

[20] Steen Eiler Rasmussen:
"OM AT OPLEVE ARKITEKTUR".
G.E.C. Gads Forlag,
København 1966.

[21] Ture Wester:
"POLYEDRENES KONSTRUKTIVE ORDEN".
Kunstakademiets Arkitektskole,
1976.

[22] Fagtidsskrifterne:
"ARKITEKTEN og ARKITEKTUR".
Arkitektens Forlag,
København.

I tilfælde, hvor skaller ønskes sammensat af flere dobbeltkrumme flader, eller i tilfælde, hvor skallerne skal overdække arealer af kompleks geometrisk form, udføres ofte modeller af disse skaller ved ophængning af menbraner over huller af tilsvarende form som skallerne skal overdække.

Membranen kan påføres et materiale, der senere hærder. Formen kan derefter vendes og betragtes som skal.

En skalform kan også fremkomme ved at anvende den pneumatiske metode, d.v.s. at etablere trykforskel på membranens to sider.

En tredie metode, som bl.a. Frei Otto har anvendt ved bestemmelse af skalformer, er ophængning af belastede kædenet, som markerer de rumlige tryklinier i skallen i dens omvendte form.

Trykliniernes geometriske form bestemmes alene af belastningerne, hvorimod trykliniernes maksimale højder bestemmes af andre forhold, f.eks. af den højde, der ønskes eller er til rådighed for den færdige konstruktion.

LITTERATURHENVISNINGER

[1] Gunnar Asplund:
"ACCEPTERA".
Bogförlagsaktiebolaget Tiden,
Stockholm 1931.

[2] Gunnar Bomann:
"MATEMATIK".
Gads Fagleksikon,
København 1979.

[3] Peter Broberg og Karen Zahle:
"STRUKTUR FRIHED FORM".
Arkitektens Forlag,
1976.

[4] Odd Brochmann:
"OM GRIMT OG SMUKT".
Gyldendals Forlag,
1969.

[5] Tons Brunés:
"ANCIENT GEOMETRY".
Rhodos, 1967.

[6] Elias Cornell:
"BYGGNADSTEKNIKEN".
Stellan Ståls Tryckerie, 1970.

[7] Keith Critohlow:
"ORDER IN SPACE".
Thames and Hudson,
London 1973.

[8] H. Martyn Cundy:
"MATHEMATICAL MODELS".
Oxford, At The Clarendon Press,
1961.

[9] Heinrich Engel:
"TRAGSYSTEME".
Deutsche Verlags-Anstalt,
1967.

[10] Euklid:
"ELEMENTER".
Dansk oversættelse fra 1895.

[11] Karl Fruckmann:
"PROPORTIONEN IN DER ARCHITEKTUR".
Verlag Georg D.W. Callwey,
München 1965.

[12] Gjerløv-Knudsen:
"BYGNINGSKUNSTENS FORMLÆRE".
G.E.C. Gads Forlag, 1963.