

INSTITUTTET FOR HUSBYGNING

Rapport nr. **111**

BJARNE CHR. JENSEN
**NOGLE PLASTICITETSTEORETISKE
BEREGNINGER AF BETON OG JERNBETON**

Den polytekniske Lærestalt, Danmarks tekniske Højskole
Lyngby 1976

BJARNE CHR. JENSEN

NOGLE PLASTICITETSTEORETISKE
BEREGNINGER AF BETON OG JERNBETON

FORORD

Denne afhandling er udarbejdet som et led i betingelserne for erhvervelse af den tekniske licentiatgrad.

Licentiatarbejdet er udført ved Institutet for Husbygning med professor, civ. ing. Johs. F. Munch-Petersen som faglærer og med professor, dr.techn. Mogens Peter Nielsen, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, som medfaglærer. Begge takkes for at have givet mig mulighed for at gennemføre licentiatstudiet samt for råd og vejledning under studiet.

I forbindelse med studiet har jeg modtaget værdifuld bistand fra en lang række medarbejdere ved Instituttet for Husbygning og ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner. Specielt har en gruppe ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, bestående af professor, dr.techn. Mogens Peter Nielsen, lic.techn. Finn Bach og lic.techn. Mikael W. Bræstrup, haft stor betydning, idet jeg her har haft lejlighed til at deltage i meget nyttige diskussioner om plastiske beregninger af jernbeton.

Sluttelig vil jeg gerne takke de mennesker, der gennem adskillige års indsats gjorde det muligt for akademiingeniører at påbegynde et licentiatstudium.

Lyngby, december 1975

Bjarne Chr. Jensen

INDHOLD

FORORD

INDHOLD

SYMBOLER

1.	INDLEDNING	1
2.	BETONS BRUDBETINGELSE OG ARBEJDSLINIER	
2.1	Coulombs brudhypotese	5
2.2	Coulombs modificerede brudhypotese	7
2.3	Brudbetingelse for beton	8
2.4	Arbejdslinier for beton	12
3.	PLASTICITETSTEORI FOR COULOMB-MATERIALER	
3.1	Forudsætninger	14
3.2	Indre arbejde for Coulomb-materialer	17
3.3	Plan deformationstilstand i Coulomb-materialer	22
3.4	Plan deformationstilstand i modificeret Coulomb-materiale	29
3.5	Plan spændingstilstand	32
3.6	Betons plastiske egenskaber	37
Eksempel 3.1	Enakset stræk	20
Eksempel 3.2	Liniebrud langs logaritmisk spiral	24
Eksempel 3.3	Bæreevne af skråning (stabilitet)	26
Eksempel 3.4	Bæreevne af skråning	28
Eksempel 3.5	Drucker, Prager og Chens løsning	31
Eksempel 3.6	Tilnærmelse ved diskontinuitetslinier	35
Eksempel 3.7	Trykforsøget	36
4.	UARMERET STØBESKEL	
4.1	Indledning	40
4.2	Glidningsbrud	40
4.3	Glidnings- og adskillelsesbrud	43
Eksempel 4.1	Forsøg af Johansen	46
5.	FORSKYDNING	
5.1	Indledning	48
5.2	Plan deformationstilstand	49

5.3	Plan spændingstilstand	52
5.4	Normalkraftens indflydelse	55
5.5	Forskydning i beton	56
5.6	Formeloversigt	58
Eksempel 5.1	Forskydning i monolitisk beton	60
Eksempel 5.2	Forskydning i armeret støbeskel	62
Eksempel 5.3	Fortandede vægfugers bæreevne	66
Eksempel 5.4	Forskydnings-friktionsteorien	68
6.	KONCENTREREDE BELASTNINGER PÅ UARMERET BETON	
6.1	Indledning	73
6.2	Lineærelastiske løsninger	73
6.3	Plastiske løsninger	80
6.3.1	Plane brudfigurer	80
6.3.2	Rumlige brudfigurer	84
6.4	Empiriske løsninger	87
6.4.1	Højdens indflydelse	90
6.5	Konklusion	92
Eksempel 6.1	Etagekryds	92
Eksempel 6.2	Bøjlesamling	94
7.	KONCENTREREDE BELASTNINGER PÅ ARMEREDE BETONPRISMER	
7.1	Indledning	99
7.2	Gunstig placering af armering	99
7.3	Bæreevnebestemmelse	102
7.4	Konklusion	105
8.	LITTERATUR	106

SYMBOLER

I afhandlingen anvendes de symboler, man traditionelt anvender i Danmark. Det har betydet, at enkelte bliver anvendt i flere betydninger, dog aldrig samme sted i afhandlingen. Ulempen ved dette menes opvejet af, at symbolerne og deres betydning vil være velkendt af de fleste.

Nedenfor gives en oversigt over de hyppigst anvendte symboler og den betydning, de oftest er anvendt i.

a	Længde
b	Længde
c	Længde Kohæsion
c'	Kohæsion, reduceret i forhold til c
f	Armeringsforholdet $\frac{F}{A}$ Belastet areal ved koncentreret last Funktion
h	Længde
k	$\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}$ i Coulombs brudhypotese Konstant < 1
e	Længde
p	Belastning pr. længdeenhed, evt. pr. arealenhed
t	Længde
A	Betonareal
A _i	Indre arbejde
A _{ia}	Indre arbejde fra armering
A _{ib}	Indre arbejde fra beton
A _y	Ydre arbejde
B	Tværsnit fra "tænderne" i den fortandede vægfuge
F	Armeringstværsnit "Aktivt" areal ved koncentreret last

I_ϵ	Første tøjningsinvariant = $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$
N	Kraft
P	Kraft
P_{br}	Brudkraft
Q	Kraft
V	Deformationsvektor
W	Indre arbejde pr. volumenenhed
W_1	Indre arbejde pr. længdeenhed af diskontinuitetslinie
α	Vinklen imellem V og diskontinuitetslinie
β	Vinkel, der angiver hældning på diskontinuitetslinie
δ	Højde af deformationszone
ϵ	Længdetøjning
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	Hovedtøjninger
ϵ^+	Positiv hovedtøjning
ϵ_i	Tøjningstensor
λ	Positiv konstant
μ	Friktionskoefficient
ν	Poissons forhold
	Effektivitetskoefficient
σ	Normalspænding
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hovedspændinger
σ_c	Enakset trykstyrke. Ved beton sat lig med cylindertrykstyrken
σ_f	Brudspænding ved koncentreret last
σ_i	Spændingstensor
σ_t	Enakset trækstyrke
σ_F	Adskillelsesstyrke
σ_F	Flydespænding for armering
	Ved koncentreret last også brudstyrken når hele arealet F belastes
σ_N	$\frac{N}{A}$

σ_T	Terningtrykstyrke for beton
σ_{br}	Brudbelastning bestemt ved en øvre værdiløsning
σ'_t	Trækstyrke reduceret i forhold til σ_t
σ'_N	$\frac{N}{\sqrt{A}}$
σ'_{br}	Brudbelastning bestemt ved en nedreværdiløsning
τ	Forskydningsspænding $\frac{P}{A}$
τ_{br}	$\frac{P_{br}}{A}$
τ'_{br}	$\frac{P_{br}}{\sqrt{A}}$
φ	Friktionsvinkel
φ'	Friktionsvinkel reduceret i forhold til φ
φ_{xy}	Vinkelændring i xy-planen
ψ	Vinkel
	Airys spændingsfunktion
θ	Topvinkel i logaritmisk spiral
Φ	Armeringsgrad $\frac{F\sigma_F}{A\sigma_C}$
Φ'	$\frac{F\sigma_F}{\sqrt{A}\sigma_C}$
Φ^*	Ækvivalent armeringsgrad $\Phi - \frac{\sigma_N}{\sigma_C}$

1. INDLEDNING

I forbindelse med nogle forsøg med moment-overførende bøjlesamlinger imellem armerede betonbjælker opstod min interesse for brudberegninger i beton, specielt i forbindelse med samlinger imellem præfabrikerede betonelementer.

Brudberegninger i beton er vanskelige, bl.a. fordi beton ikke kan betegnes som udpræget elastisk eller udpræget plastisk. I denne afhandling betragtes beton imidlertid som et stift plastisk materiale, der som flydebetingelse har Coulombs modificerede brudhypotese.

Hvis der tages et passende hensyn til den begrænsede flydeevne for beton, viser det sig, at man kan nå overordentlig langt med bæreevneberegninger ved hjælp af plasticitetsteorien. På den anden side er den begrænsede flydeevne årsag til at resultater, fundet ved hjælp af plasticitetsteorien, skal anvendes med megen forsigtighed, indtil de er verificeret ved forsøg.

Plasticitetsteorien bliver her næsten udelukkende anvendt til at finde øvregrænseværdier for bæreevner. Dette gøres ved at regne på brudmekanismer, der i mange tilfælde kun kan vælges på få fornuftige måder. Hvis man fra forsøg har erfaret, hvorledes et legeme bryder, har man herved ofte et godt skøn på en brudmekanisme. Et udmærket eksempel herpå er brud ved en koncentreret last på et betonprisme, se fig. 1.1.

Blot dette at betragte en brudmekanisme kan give værdifulde resultater. Et eksem-

pel er igen den koncentrerede belastning. Som det er beskrevet i kapitel 7, ser man let, at en tværgående armering er lige virksom imod brud, uanset om den anbringes, hvor en elasticitetsteoretisk beregning giver tværgående træk, eller der hvor den giver tværgående tryk, se fig. 1.2.

Som før nævnt, er Coulombs modificerede brudhypotese anvendt som brudbetingelse for beton. Såvel denne, som den almindelige brudhypotese af Coulomb, er gennemgået i kapitel 2. Den modificerede brudbetingelse er sammenlignet med brudforsøg for beton, og betons arbejdslinie ved enakset tryk og enakset træk er omtalt. Kapitlet indeholder intet nyt og er kun medtaget for at vise, at den modificerede brudhypotese kan anvendes for beton.

I kapitel 3 er udledt udtryk for det indre arbejde pr. volumenenhed for materialer, der følger Coulombs brudhypotese og Coulombs modificerede brudhypotese. I afsnittet er der lagt speciel vægt på diskontinuitetslinier i flytninger ved plan spændingstilstand og plan deformationstilstand.

Kapitlet er et af afhandlingens væsentligste, idet det giver en samlet fremstilling af plasticitetsteorien for Coulomb-materialer samt indeholder adskilligt originalt arbejde. De opstillede udtryk i kapitlet er baggrunden for de plastiske beregninger senere i afhandlingen.

Kapitel 4 er et lille kapitel, som formodentlig kun har teoretisk interesse. Det viser, hvorledes man ved hjælp af plasti-

cititetsteorien kan finde bæreevnen af et støbeskel i uarmeret beton. Kun for støbeskel, hvori der ikke forekommer et rent glidningsbrud, indeholder afsnittet nogle egentlig nye betragtninger.

I kapitel 5 opstilles færdige formler for forskydningsbæreevnen i armeret beton, hvor armeringen er vinkelret på forskydningsnittet. I kapitlet indføres en størrelse, der tager hensyn til den begrænsede flydeevne. Dette blev første gang gjort af Nielsen [69.1] ved plastiske forskydningsberegninger af armerede betonbjælker.

Indholdet er stort set originalt, hvori-
mod princippet ved opstilling af formlerne følger det af Nielsen og Bræstrup i [75.1] anvendte ved øvreværdiberegning af jernbetonbjælkers forskydningsbæreevne.

Koncentrerede belastninger på uarmerede betonprismer behandles i kapitel 6. Det indeholder en plastisk, elastisk og empirisk behandling af problemet.

De plastiske brudberegninger fører næsten alle til formler, der kun er en variant af én, som tidligere er fundet af Chen og Drucker [69.2]. Dette afsnit indeholder således kun lidt nyt. Brudbæreevnen ved koncentrerede belastninger på beton kan desværre ikke bestemmes ved hjælp af de udledte formler.

Bæreevneberegninger ved hjælp af elasticitetsteorien viser sig også at være umulig. Det elastiske beregninger viser i øvrigt, at trækstyrken for beton er mindre betydningsfuld end hidtil antaget, idet brud indledes med glidningsbrud.

Man er således øjensynlig stadig henvist til at bestemme bæreevnen ved hjælp af empiriske formler. En tidligere offentliggjort formel er medtaget i det empiriske afsnit, hvor også betydningen af små prismehøjder er diskuteret.

I kapitel 7 behandles det tilsvarende problem med armering i betonprismet. I kapitlet er på baggrund af plasticitetsteorien opstillet en tilnærmet formel for bæreevnen. Denne formel skal imidlertid anvendes med forsigtighed, idet den endnu ikke er tilstrækkelig verificeret.

2. BETONS BRUDBETINGELSE OG ARBEJDSLINIER

2.1 Coulombs brudhypotese

Coulombs brudhypotese (også kaldet friktionshypotesen) blev fremsat i 1773 af C.A. Coulomb [1773.1], der havde bemærket, at brud i stenprismer påvirket med enakset tryk forløb langs visse flader, et forhold der også gjaldt brud i jord bag støttemure, når disse gav efter for trykket. Disse flader kaldes glideflader, og brud af denne type kaldes glidningsbrud. Coulomb antog, at der i glidefladen skulle overvindes dels en indre kohæsion, der er konstant, og dels en indre friktion, der er proportional med normaltrykket på glidefladen.

Denne antagelse kan formuleres

$$(2-1) \quad |\tau| = c - \mu\sigma = c - \sigma \tan\varphi$$

hvor

τ = forskydningsspændingen langs glidefladen

c = kohæsion

μ = friktionskoefficienten

σ = normalspændingen vinkelret på glidefladen (positiv som træk)

φ = friktionsvinklen

Den matematiske formulering af Coulombs brudhypotese blev dog først foretaget af O. Mohr i forbindelse med dennes generelle brudhypotese fra 1882 [1882.1].

Efter Mohrs brudhypotese antages spændingerne i en glideflade at opfylde betingelsen:

$$(2-2) \quad f(\sigma, \tau) = 0$$

hvor $f(\sigma, \tau)$ er en for materialet karakteristisk funktion. Coulombs brudhypotese er således et specialtilfælde af Mohrs.

På fig. 2.1 er Coulombs brudhypotese afbildet i et σ, τ -koordinatsystem. På figuren er endvidere indtegnet Mohrs cirkler for spændingerne i et punkt, hvor brudhypotesen er opfyldt. Det er forudsat, at $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Ved hjælp af figuren ser man, at (2-1) kan skrives på hovedspændingsform:

$$(2-3) \quad \frac{1}{2} \sigma_1 (1 + \sin \varphi) - \frac{1}{2} \sigma_3 (1 - \sin \varphi) - c \cos \varphi = 0$$

som gælder for $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Ændres hovedspændingernes indbyrdes størrelse skal (2-3) ændres tilsvarende. På hovedspændingsform kommer brudhypotesen derfor til at bestå af 6 ligninger, der har samme form som (2-3). I et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinatsystem udgør brudhypotesen en irregular hexagonal pyramide med akse i retningen $(1, 1, 1)$. Pyramidens toppunkt er $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cot \varphi$.

(2-3) kan skrives på den enklere form:

$$(2-4) \quad k \sigma_1 - \sigma_3 = 2c\sqrt{k}$$

hvor konstanten k er givet ved:

$$(2-5) \quad k = \left(\frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^2 = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

Den enaksede trykstyrke σ_c indføres som den spændingstilstand, der er givet ved

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, -\sigma_c)$, og som netop giver brud efter hypotesen. Af (2-4) og (2-5) finder man, at der gælder:

(2-6)

$$\sigma_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

og at (2-4) nu kan skrives:

(2-7)

$$k\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c$$

På tilsvarende måde som den enaksede trykstyrke kan den enaksede trækstyrke σ_t indføres som den spændingstilstand, der er givet ved $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_t, 0, 0)$ og som giver brud efter hypotesen. Af (2-7) finder man

(2-8)

$$k\sigma_t = \sigma_c$$

Brudhypotesen kan herefter skrives:

(2-9)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_t} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} = 1$$

Coulombs brudhypotese er fuldstændig bestemt af to parametre, f.eks. c og φ i (2-1) eller af σ_c og σ_t i (2-9).

På fig. 2.2 er brudhypotesen afbildet sammen med Mohrs cirkler for spændingstilstandene ved enakset trykbrud og enakset trækbrud.

2.2 Coulombs modificerede brudhypotese

Den af Coulomb antagne glidningshypotese kan suppleres med endnu en hypotese, nemlig adskillelsesbrudhypotesen. Ved et ad-

skillelsesbrud bevæger brudfladerne sig fra hinanden vinkelret på brudsnittet. Adskillelsesbrud indtræder, når den største trækspænding bliver lig med adskillelsesmodstanden σ_A , d.v.s.

$$(2-10) \quad \sigma_1 = \sigma_A$$

Den brudhypotese, der fremkommer ved kombination af (2-7) og (2-10) kaldes Coulombs modificerede brudhypotese. Brudhypotesen er på fig. 2.3 afbildet i et σ, τ -koordinatsystem, og består af en cirkelbue, der går gennem $(\sigma, \tau) = (\sigma_A, 0)$ og som tangerer de rette linier, der ligger til venstre for tangeringspunkterne.

I et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinatsystem udgør Coulombs modificerede brudhypotese en irregulær pyramide med akse i retningen $(1, 1, 1)$, og afskåret af tre planer parallelt med koordinatplanerne.

Det bemærkes, at den enaksede trækstyrke σ_t kan være mindre end eller lig med σ_A . og at Coulombs modificerede brudbetingelse kræver 3 parametre for at være bestemt, f.eks. k , σ_c og σ_A .

2.3 Brudbetingelse for beton

Ved brud- og flydebetingelser forstås de kriterier, der skal være opfyldt for at brud eller flydning indledes.

Formålet med at opstille brud- og flydebetingelser er, at man ved hjælp af simple prøvemethoder kan bestemme parametrene i brud- og flydebetingelserne, hvorefter faren for brud eller flydning i konstruktioner med komplicerede spændingstilstan-

de kan vurderes.

Vi vil her se på, hvor velegnet Coulombs modificerede brudhypotese med $\sigma_t = \sigma_A$ er som brudbetingelse for beton, idet hypotesen vil blive sammenlignet med resultaterne fra nogle simple prøvemethoder. Først er det imidlertid nødvendigt at knytte nogle få velkendte bemærkninger til prøvemethoderne, idet disse nok er simple at udføre, men ikke altid er helt pålidelige.

De styrkeparametre, prøvemethoderne resulterer i, er afhængige af bl.a. prøvelegemets form, størrelse, alder og lagring. De målte styrkeparametre er også afhængige af prøveomstændighederne, f.eks. i form af fugtighed og belastningshastighed.

Den valgte prøvemethode har betydning. Det er således velkendt, at den målte trækstyrke for beton er afhængig af, om den findes ved spalteforsøg, bøjeforsøg eller ved enaksede trækforsøg. Endelig er det også et spørgsmål, om prøvelegemet er tilstrækkeligt repræsentativt for betonen i den færdige konstruktion. Alt i alt kan man sige, at de resultater, man finder ved simple prøvninger, afviger en del fra egenskaberne for betonen i den færdige konstruktion. Den brudbetingelse, man anvender for beton, skal stå i et rimeligt forhold hertil.

Et af de forholdsvis simple forsøg med beton er treaksede trykforsøg, hvor et cylinderformet prøvelegeme udsættes for et hydrostatisk tryk, der overlejres af træk eller tryk i cylinderaksens retning. Forsøg udført af Richart m.fl. [28.1] er af-

bildet på fig. 2.4. På figuren er også afbildet forsøg med spiralarmerede cylindre af Richart m.fl. [29.1]. Ved afbildningen er cylindertrykstyrken sat lig σ_c og $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Til sammenligning er (2-7) indtegnet med $k = 4$ og overensstemmelsen ses at være god.

Richart m.fl. foreslår selv $k = 4,1$. Forslaget $k = 4,0$ skyldes Johansen [58.1]. Nielsen [55.1] foreslår $k = 5$, ligeledes på baggrund af forsøg der, som de her referede, har to af hovedspændingerne ens.

Endebrock og Traina [72.1] har udført treaksede forsøg på terningformede prøvelegemer, hvor alle tre hovedspændinger kunne varieres uafhængigt af hinanden. Prøvelegemets form er uheldig, idet den ekaksede trykstyrke bestemmes som terningstyrken. Sættes $k = 4$ bliver friktionsvinklen $\varphi = 37^\circ$. Ved enakset tryk er brudbetingelsen opfyldt i snit, der danner vinklen $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ med kraftretningen, se fig. 2.5. Brud kan således kun udvikles frit, hvis $h \geq 2d$, hvor betydningen af h og d fremgår af fig. 2.5. Terningtrykstyrken er derfor større end cylindertrykstyrken, normalt ca. 25%.

På fig. 2.6 er Endebrock og Trainas forsøg afbildet sammen med (2-7), hvor $k = 4$, idet terningtrykstyrken dog er sat lig σ_c og $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Overensstemmelsen er her knap så god som i fig. 2.4, men må siges at være acceptabel.

Efter Coulombs brudhypotese har den mellemste hovedspænding ingen indflydelse på bæreevnen. Forsøg viser imidlertid, at den har, hvilket f.eks. ses ved toaksede

trykforsøg. På fig. 2.7 er optegnet det principielle forløb af brudbetingelsen, som den er fundet ved toaksede trykforsøg af bl.a. Liu m.fl. [72.2], Endebrock og Traina [72.1] og Kupfer [73.1]. Til sammenligning er Coulombs brudhypotese for tryk og plan spændingstilstand indtegnet. Af figuren ses tydeligt den mellemste hovedspændings betydning, som dog er forholdsvist behersket. Forsøgene viser således, at for $\sigma_1/\sigma_c = \pm 0,6$ er $\sigma_3/\sigma_c = \pm 1,2$ - $\pm 1,4$, hvor Coulombs brudhypotese siger $\sigma_3/\sigma_c = \pm 1,0$.

Forsøgsmængden til bestemmelse af brudbetingelsen for beton, når der indgår træk, er ikke så stor som ved tryk. På fig. 2.8 er afbildet det principielle udseende, som det er fundet i [72.1] og [73.1] ved toaksede forsøg. Til sammenligning er Coulombs modificerede brudhypotese indtegnet, og man ser, at brudhypotesen øjensynlig er lidt på den usikre side, når der optræder trækspændinger.

Det kan således konstateres, at Coulombs modificerede brudhypotese ikke fuldstændig beskriver betons brudbetingelse.

Brudhypotesen er alligevel anvendelig som brudbetingelse for beton, da afvigelserne er beherskede, hvilket som tidligere nævnt skal ses i sammenhæng med styrkeegenskaberne store afhængighed af prøveomstændighederne.

Når de resultater, der i det følgende udledes af brudhypotesen, sammenlignes med forsøg, vil ϕ normalt blive sat til 37° , svarende til $k = 4,0$. For den enaksede

trykstyrke σ_c vil cylindertrykstyren blive anvendt, idet forsøg viser, at trykbrudstyrken kun falder lidt med voksende h for $h \geq 2d$, jfr. fig. 2.5. Den enaksede trækstyrke σ_t er sjældent målt, og det er derfor vanskeligt at angive en anvendelig værdi, idet såvel bøjletrækforsøget som det oftest anvendte spaltetrækforsøg giver for store værdier, se f.eks. Wright [52.2] og Jensen og Nielsen [75.2]. I færdige konstruktioner kompliceres dette yderligere, ved at trækstyrken nogle steder kan være nul på grund af revner. Ofte regnes σ_t til nul; men f.eks. ved koncentrerede belastninger giver dette misvisende resultater, se kapitel 6. I de få tilfælde hvor σ_t bliver anvendt, vil den valgte værdi være yderligere kommenteret.

2.4 Arbejdslinier for beton

Arbejdslinien ved enakset træk og enakset tryk er den grafiske afbildning af sammenhængen mellem den enaksede spænding og tøjningen i samme retning som spændingen.

Ligesom mange faktorer har indflydelse på brudbetingelsen, har mange faktorer indflydelse på arbejdslinien. På trods af dette kan der dog peges på nogle generelle træk for arbejdslinierne.

Ved enakset træk er beton næsten lineær-elastisk indtil brud. Ved tryk er arbejdslinien krum (nedad hul) og maximal trykspænding opnås for en tøjning på ca. $\div 2\%$. Efter maximum falder arbejdslinien, og

brud indtræder ved en tøjning på $\div 3 - \div 5\%$. For beton med stor trykstyrke, er arbejds-
linien normalt mindre krum og brudtøjning-
gen er også mindre. En meget stærk beton
har således et næsten skørt trykbrud. Ty-
piske arbejdslinier er vist på fig. 2.9.

Der kan imidlertid optræde arbejdslinier,
der afviger væsentligt fra de her beskrev-
ne. Nylander og Sahlin [55.2] har ved bøj-
ningsforsøg målt brudtøjninger på $\div 40 -$
 $\div 50\%$. Andre ekstreme arbejdslinier er
vist på fig. 2.10, efter Hughes og Chap-
mann [66.1]. Ved disse forsøg bestod til-
slaget i de enkelte betontyper dog af korn
med stort set samme størrelse.

En idealisering af beton til et stift,
idealplastisk materiale ses således at væ-
re et meget drastisk skridt. Idealiserin-
gen kan dog retfærdiggøres, hvis den sam-
men med den valgte brudbetingelse fører
til simple og anvendelige beregningsme-
toder. De efterfølgende afsnit vil vise,
at idealiseringen i mange tilfælde er ac-
ceptabel.

3. PLASTICITETSTEORI FOR COULOMB-MATERIALER

3.1 Forudsætninger

I dette afsnit vil der blive givet en kort gennemgang af teorien for stift-plastiske materialer. I de efterfølgende afsnit vil der blive udledt udtryk for det indre virtuelle arbejde pr. volumenenhed for stift-plastiske materialer, hvis flydebetingelse følger Coulombs brudhypotese eller Coulombs modificerede brudhypotese. Sådanne materialer vil blive benævnt Coulomb-materialer eller modificerede Coulomb-materialer. I afsnit 3.6 vil mulighederne for plastiske beregninger af beton og jernbeton kort blive diskuteret.

Ved en flydebetingelse for et materiale vil vi her forstå den spændingskombination, der kan give flydning i materialet. Udtrykt ved hovedspændingerne kan flydebetingelsen skrives som

$$(3-1) \quad f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

Fortegnene i $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vælges sådan, at man har $f < 0$ for spændingstilstande, hvor der ikke kan forekomme flydning. Når vi som her arbejder med den stift-plastiske materialemodel, betyder det, at der ikke er nogen deformation for $f < 0$. Når $f = 0$ betyder det, at flydning, d.v.s. blivende deformation netop kan finde sted. $f > 0$ svarer til spændingstilstande, der ikke kan forekomme.

I en rumlig afbildning med σ_1 , σ_2 og σ_3 som koordinataksler fremstiller (3-1) en flade, den såkaldte flydeflade. Den tilsvarende kurve for en plan spændingstilstand kaldes flydekurven.

Den indbyrdes sammenhæng mellem de tøjninger, der kan forekomme ved en given spændingstilstand, der tilfredsstiller (3-1), bestemmes af flydeloven

$$(3-2) \quad \epsilon_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Opfatter man (3-2) som en vektor i $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinatsystemet, er det en normalvektor til flydefladen. Kræves det plastiske arbejde $\sigma_i \cdot \epsilon_i \geq 0$, fås $\lambda \geq 0$. (3-2) er altså en udadrettet normal til flydefladen (3-1), og flydeloven kaldes derfor ofte normalitetsbetingelsen. Man bemærker, at deformationernes retning, men ikke deres størrelse, er bestemt.

Normalitetsbetingelsen er en forudsætning, der gøres i plasticitetsteorien. Den er på forskellig vis begrundet af v. Mises [28.2], Gvozdev [38.1] og Drucker [51.1]. Disse begrundelser kræver, at flydefladen er konveks, hvilket er opfyldt for Coulomb-materialer og modificerede Coulomb-materialer.

Flydebetingelse og flydelov er her omtalt med hovedspændinger og hovedtøjninger. De kan imidlertid udtrykkes mere generelt ved hjælp af generaliserede spændinger og tøjninger, sådan som Gvozdev [38.1] og Prager [52.2] har gjort det.

Hvis flydefladen er en differentiabel flade, bestemmer normalitetsbetingelsen entydigt retningen af tøjningsvektoren til en given spændingstilstand på flydefladen. Hvis flydefladen består af stykvis differentiable flader, skal tøjningsvektoren for spændingstilstande, der ligger på to

fladers skæringskurve, ligge i vinkelrummet imellem normalerne til de tilstødende flader.

Vi vil nu definere nogle begreber, der i det følgende vil vise sig at være praktiske.

En statisk tilladelig spændingstilstand er en spændingstilstand, som opfylder ligevægtsbetingelserne og de statiske randbetingelser.

En sikker spændingstilstand er en spændingstilstand, hvor man overalt har $f \leq 0$.

En geometrisk mulig brudfigur er en deformationstilstand, der opfylder kompatibilitetsbetingelserne og de geometriske randbetingelser.

Bæreevnen af et legeme, der består af et stift-plastisk materiale, er den belastning, ved hvilke deformationer bliver mulige. Bæreevnen kaldes også flydelasten.

Herefter vil vi se på ekstremalprincipperne, der udgør et vigtigt værktøj ved bæreevnebestemmelse af legemer, der består af idealt-plastiske materialer (herunder også stift-plastiske materialer). Ekstremalprincipperne er vist af Gvozdev [38.1], Hill [51.2] og Drucker m.fl. [52.3].

Ekstremalprincipperne kan f.eks. formuleres således:

Øvre værdisætningen:

Den belastning, man finder af arbejdslicingen for en vilkårlig geometrisk mulig brudfigur, er større end eller lig med legemets flydelast.

Nedreværdisætningen:

Den til en sikker og statisk tilladelig spændingstilstand hørende belastning er mindre end eller lig med legemets flydelast.

Entydighedssætningen:

Hvis der til en belastning svarer en geometrisk mulig brudfigur samt en sikker og statisk tilladelig spændingstilstand, er belastningen lig med legemets flydelast.

En belastning, der er større end eller lig med et legemes flydelast, kaldes en øvre værdi for flydelasten. Tilsvarende er en nedre værdi en værdi, der er mindre end eller lig med flydelasten.

I denne afhandling vil der væsentligst blive brugt den teknik, der fører til øvre værdier, øvre værditeknikken. Til dette bruges, som nævnt i øvre værdisætningen, arbejdsligningen, og der vil i det følgende blive udledt udtryk for det indre virtuelle arbejde for Coulomb-materialer og modificerede Coulomb-materialer, der udsættes for deformationer. Arbejdsligningen er ikke identisk med det virtuelle arbejdes princip, idet spændingerne, der hører til en valgt deformation, ikke behøver at tilfredsstille ligevægtsbetingelserne.

3.2 Indre arbejde for Coulomb-materialer

Flydebetingelsen for et Coulomb-materiale kan ifølge (2-3) skrives som

$$(3-3) \quad f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) =$$

$$\frac{1}{2}\sigma_1(1+\sin\varphi) - \frac{1}{2}\sigma_3(1-\sin\varphi) - c \cos\varphi = 0$$

når $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Man ser at, (3-3) er af samme form som (3-1), hvorved de tilhørende tøjninger umiddelbart kan findes af normalitetsbetingelsen (3-2). Her får man

$$(3-4) \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= \lambda_1 \frac{1}{2}(1+\sin\phi), \quad \epsilon_2 = 0, \\ \epsilon_3 &= \lambda_1 \frac{1}{2}(1-\sin\phi) \end{aligned}$$

Det indre arbejde for et materiale, der deformeres med tøjningerne $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ er

$$(3-5) \quad A = \int_V (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) dV = \int_V W dV$$

hvor W er det indre arbejde pr. volumen-
enhed, på engelsk: dissipation.

Med (3-4) får man her

$$(3-6) \quad W = \lambda_1 (\frac{1}{2}\sigma_1(1+\sin\phi) - \frac{1}{2}\sigma_3(1-\sin\phi))$$

som ved hjælp af (3-3) kan skrives som

$$(3-7) \quad W = \lambda_1 c \cos\phi$$

Ved hjælp af den positive tøjning i (3-4) kan (3-7) skrives som

$$(3-8) \quad \begin{aligned} W &= 2c \frac{\cos\phi}{1+\sin\phi} \epsilon_1 \\ &= 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \epsilon_1 \end{aligned}$$

For den første tøjningsinvariant I_ϵ får man

$$(3-9) \quad I_\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \lambda_1 \sin\phi$$

Af (3-9) kan man altså slutte:

Coulomb-materialer flyder
under volumenudvidelse.

Man kan ved hjælp af (3-9) også skrive (3-7) som

$$(3-10) \quad W = c \cot \varphi I_{\varepsilon}$$

Ovenstående er udledt for $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, d.v.s. for en af de seks sider i den pyramide, som flydefladen udgør i et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinatsystem. For de øvrige sider kan analoge formler til (3-8) - (3-10) opstilles, når man i (3-8) erstatter ε_1 med den tilsvarende positive tøjning.

Ved skæringslinien imellem to sider i flydefladen vil tøjningsvektoren være en vilkårlig positiv linearkombination af tøjningsvektorerne hørende til de to sider. Vi betragter nu skæringslinien imellem (3-4) og

$$(3-11) \quad \frac{1}{2}\sigma_2(1+\sin\varphi) - \frac{1}{2}\sigma_3(1-\sin\varphi) - c \cos\varphi = 0$$

De tilhørende tøjninger findes til

$$(3-12) \quad \varepsilon_1 = \lambda_1 \frac{1}{2}(1+\sin\varphi), \quad \varepsilon_2 = \lambda_2 \frac{1}{2}(1+\sin\varphi)$$

$$\varepsilon_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{1}{2}(1-\sin\varphi)$$

Analogt med (3-7) kan man finde

$$(3-13) \quad W = \lambda_1 c \cos\varphi + \lambda_2 c \cos\varphi$$

Ved hjælp af de positive tøjninger i (3-12) kan (3-13) skrives som

$$(3-14) \quad W = 2c \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Den første tøjningsinvariant I_ϵ findes af (3-12), og ved indsættelse i (3-13) ser man, at (3-10) også gælder her.

Lignende beregninger kan gøres ved de øvrige skæringslinier. Når der bortses fra flydefladens toppunkt ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cot \phi$), kan det indre arbejde pr. volumenenhed skrives som

$$(3-15) \quad W = 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} \sum \epsilon^+$$

$$(3-16) \quad W = c \cot \phi I_\epsilon$$

Her betyder ϵ^+ de positive hovedtøjninger.

I flydefladens toppunkt gælder (3-16) også, hvorimod (3-15) ikke gælder, hvilket umiddelbart ses ved at betragte tøjningsvektoren $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 > 0$, som hører til i toppunktet. I dette tilfælde er summen af de positive tøjninger lig med den første tøjningsinvariant, og (3-15) giver dermed et andet resultat end (3-16).

(3-15) er angivet af Chen [69.3], som dog ikke gør opmærksom på, at den ikke gælder i toppunktet.

Generelt kan det indre arbejde pr. volumenenhed for et Coulomb-materiale derfor skrives som (3-16).

Eksempel 3.1. Enakset stræk

Et terningsformet legeme af et Coulomb-materiale påføres på den ene side en belastning σ . Legemet er fastholdt, så det kun kan deformere sig i samme retning, som den påførte spænding virker, se fig. 3.1.

For at finde en øvre værdi $\sigma = \sigma_{br}$ for bæreevnen tænkes den frie side bevæget stykket Δl i spændingens positive retning. Med legemets kantlængde lig l findes hovedtøjningerne til

$$(a) \quad \epsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$$

Vi har således enakset stræk.

Nu bruges arbejdsligningen, hvor det ydre arbejde A_y sættes lig det indre arbejde A_i . Til at finde A_i anvendes (3-16), og idet legemets volumen er l^3 findes

$$(b) \quad \sigma_{br} l^2 \Delta l = c \cot \phi \left(\frac{\Delta l}{l} + 0 + 0 \right) l^3$$

Flydespændingen findes således til

$$(c) \quad \sigma_{br} = c \cot \phi$$

Denne værdi er en øvre værdi for flydelasten; men vi finder let en nedre værdi, ved at lade legemet være udsat for et hydrostatisk træk. Det hydrostatiske træk, der netop opfylder flydebetingelsen er

$$(d) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cot \phi$$

Øvre og nedre værdien er altså sammenfaldende og flydelasten er dermed bestemt af (c).

Til deformationstilstanden enakset stræk hører derfor spændingstilstanden hydrostatisk træk, hvorimod vi naturligvis ikke kan slutte omvendt.

3.3 Plan deformationstilstand i Coulomb-materiale

Det ses af (3-4), at den ene af hovedtøjningerne er nul, når man befinder sig på en af siderne på flydefladen for et Coulomb-materiale.

Vi vil i det følgende betragte det tilfælde, hvor $\varepsilon_3 = 0$, og hvor flydebetingelsen er

$$(3-17) \quad \frac{1}{2}\sigma_1(1+\sin\varphi) - \frac{1}{2}\sigma_2(1-\sin\varphi) - c \cos\varphi = 0$$

Beregninger som de efterfølgende kan naturligvis udføres for alle 6 sider på flydefladen.

For tøjningerne til (3-17) gælder

$$(3-18) \quad \varepsilon_1 = \lambda \frac{1}{2}(1+\sin\varphi), \quad \varepsilon_2 = -\lambda \frac{1}{2}(1-\sin\varphi)$$

$$(3-19) \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \lambda$$

For tøjningerne i et x,y-koordinatsystem vinkelret på 3. hovedakse gælder

$$(3-20) \quad \left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varphi_{xy}^2}$$

$$(3-21) \quad \varphi_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Ved at indsætte (3-19) i (3-7) og ved anvendelse af (3-20) og (3-21) kan det indre arbejde pr. volumenenhed ved plan deformationstilstand også skrives som

$$(3-22) \quad W = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) c \cos\varphi$$

$$(3-23) \quad W = \varphi_{\max} c \cos\varphi$$

$$(3-24) \quad W = c \cos \varphi \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \varphi_{xy}^2}$$

Ovenstående formler er angivet af Chen [69.3]. Som (3-15) gælder heller ikke disse for $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cot \varphi$, hvilket Chen ikke gør opmærksom på. For plan deformationstilstand bør derfor anvendes det generelle udtryk (3-16).

Vi vil nu betragte en plan homogen deformationstilstand, som finder sted i en smal zone med højden δ imellem to stive dele, mærket I og II på fig. 3.2.

Del II bevæges V i forhold til del I, som vist på fig. 3.2. I deformationszonen findes tøjningerne

$$(3-25) \quad \epsilon_y = \frac{V}{\delta} \sin \alpha, \quad \epsilon_x = 0, \quad \varphi_{xy} = \frac{V}{\delta} \cos \alpha$$

Hovedtøjningerne bliver

$$(3-26) \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{array} \right\} = \frac{V}{2\delta} (\sin \alpha \pm 1)$$

Af (3-26) får man

$$(3-27) \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\sin \alpha + 1}{\sin \alpha - 1}$$

Ser man bort fra flydefladens toppunkt, skal (3-18) samtidig være opfyldt, og ved at danne det tilsvarende forhold med tøjningerne i (3-18) som i (3-27) findes betingelsen $\alpha = \varphi$.

Sættes tykkelsen lig med 1 i deformationszonen i fig. 3.2 kan det indre arbejde pr. længdeenhed $W_1 = W\delta$ opskrives ved anvendelse af (3-26) og $\alpha = \varphi$. For W anvendes (3-16).

(3-28)

$$W_1 = V c \cos \varphi$$

(3-28) er uafhængig af højden δ , hvilket har ført til indførelse af de regningsmæssigt bekvemme diskontinuitetslinier, hvor $\delta \rightarrow 0$, men V bibeholdes og (3-28) stadig er et udtryk for det indre arbejde pr. længdeenhed. Diskontinuitetslinier kan betragtes som idealiserede tilstande på linie med de velkendte flydelinier i pladeteorien.

Diskontinuitetslinier med $\alpha > \varphi$ eksisterer også, idet de hører til spændingstilstanden i flydefladens toppunkt. For sådanne linier skal i stedet for (3-28) anvendes

(3-29)

$$W_1 = V c \cot \varphi \sin \alpha$$

Betingelsen $\alpha \geq \varphi$ ved plan deformationstilstand betyder, at:

Ved plan deformationstilstand i et Coulomb-materiale er forskydning langs en diskontinuitetslinie altid ledsaget af bevægelse vinkelret på linien.

Eksempel 3.2. Liniebrud langs logaritmisk spiral

En geometrisk mulig brudfigur ved plan deformationstilstand i et Coulomb-materiale er et brud langs en diskontinuitetslinie, der har form som en logaritmisk spiral, se fig. 3.3. Bruddet vælges sådan, at legemet drejes som et stift legeme om spiralens pol, og vinklen imellem bevægelsen i et punkt og den logaritmiske spiral er φ .

Den logaritmiske spiral er givet ved

$$(a) \quad r = r_0 e^{\psi \tan \phi}$$

Ethvert sted langs spiralen har en bevægelse V , der er proportional med længden af r det pågældende sted, og som står vinkelret på r , d.v.s.

$$(b) \quad V = V_0 e^{\psi \tan \phi}$$

Vi vil nu opskrive et udtryk for det indre arbejde langs en spiralformet diskontinuitetslinie, idet betegnelserne fra fig. 3.3 anvendes.

En lille vinkel $d\psi$ betragtes.

Den tilhørende længde af spiralen er

$$(c) \quad s = \frac{r d\psi}{\cos \phi}$$

For $d\psi$ findes det indre arbejde af (c) og (3-28)

$$(d) \quad dW = V c r d\psi$$

Ved anvendelse af (a) og (b) og ved integration fra 0 til θ findes det indre arbejde for brud langs en spiral med topvinklen θ til

$$(e) \quad W = \frac{1}{2} c V_0 r_0 \cot \phi [e^{2\theta \tan \phi} - 1]$$

Tykkelsen er her sat til 1.

Det bemærkes, at en logaritmisk spiral (herunder en ret linie) opfylder kravet om en konstant vinkel ϕ imellem bevægelse og diskontinuitetslinie. Et krav der

ved plan deformation gælder overalt på flydefladen undtagen i toppunktet.

Den betragtede brudform er den samme som den man i geotekniske beregninger kalder liniebrud.

Har man derimod zonebrud i en logaritmisk spiral, d.v.s. en brudform, hvor hele spiralen er i brud, gælder der følgende udtryk for det indre arbejde

$$(f) \quad W = c V_0 r_0 \cot \varphi [e^{2\theta \tan \varphi} - 1]$$

For V gælder også her (b).

Udtrykket er bl.a. fundet af Chen [69.3].

Eksempel 3.3. Bæreevne af skråning (stabilitet)

En belastning p anbragt på en overflade nær en skrånende kant betragtes. En øvre værdi for p kan findes ved at antage en brudfigur, som vist på fig. 3.4. Brudfiguren er en logaritmisk spiral, der som et stift legeme drejer sig om polen O . θ fastlægges af parametrene β og r_0 . V_0 i A danner vinklen φ med spiralens tangent i A .

Med betegnelserne i fig. 3.4 kan arbejds-ligningen opskrives. Det bemærkes dog, at θ er en afhængig variabel. θ afhænger af β , r_0 og det belastede legemes geometri. Den gennemsnitlige lodrette flytning af p er

$$(a) \quad V_p = V_0 \cos \alpha \left(1 - \frac{b}{2r_0 \cos \alpha} \right)$$

Det ydre arbejde bliver

$$(b) \quad A_y = p b V_o \cos \alpha \left(1 - \frac{b}{2r_o \cos \alpha} \right)$$

Det indre arbejde findes af (e) fra eksempel 3.2.

$$(c) \quad A_i = \frac{1}{2} c V_o r_o \cot \varphi [e^{2\theta \tan \varphi} - 1]$$

Af $A_y = A_i$ finder man følgende øvre værdi for p

$$(d) \quad p = c \cot \varphi \frac{r_o^2}{2r_o b \cos \alpha - b^2} [e^{2\theta \tan \varphi} - 1]$$

En geoteknisk stabilitetsberegning efter Harremoës m.fl. [70.1] eller Lundgren og Brinch Hansen [58.2] ville for samme problem i et vægtløst materiale se således ud:

En logaritmisk spiral vælges som brudfigur og polen fastlægges (0 i fig. 3.4).

Som drivende moment er der kun belastningen p , der giver momentet

$$(e) \quad M_D = p b \left(r_o \cos \alpha - \frac{b}{2} \right)$$

Til det stabiliserende moment bidrager kun c langs spiralen. Momentet af c kan efter [58.2] eller [70.1] skrives som

$$(f) \quad M_s = \frac{1}{2} (r_1^2 - r_o^2) c \cot \varphi$$

Man har, at

$$(g) \quad r_1 = r_o e^{\theta \tan \varphi}$$

Ved nu at sætte $M_D = M_s$ findes en øvre værdi for p . Øvre værdien findes til at være bestemt ved (d).

En geoteknisk stabilitetsberegning bygger altså på, at normalitetsbetingelsen er opfyldt, hvilket man normalt ikke mener er tilfældet ved geotekniske problemer.

Eksempel 3.4. Bæreevne af skråning

Nu betragtes en skråning, der er belastet som vist på fig. 3.5. Som brudfigur vælges to ligebenede trekanter, der bevæges som stive legemer. Imellem dem anbringes en logaritmisk spiral, som skal have zonebrud.

Langs strækningen AB er bevægelsen V_O , som danner vinklen φ med diskontinuitetslinien. Langs BC vokser V samtidig med, at den drejes, og langs CD har den værdien

$$(a) \quad V = V_O e^{\theta \tan \varphi}$$

Det ydre arbejde findes til

$$(b) \quad \begin{aligned} A_y &= p \cdot 2r_O \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) V_O \cos\left(90 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \varphi\right) \\ &= p r_O V_O (1 - \sin \varphi) \end{aligned}$$

Til det indre arbejde fås 3 bidrag. Bidragene fra diskontinuitetslinierne AB og CD findes af (3-28), og bidraget fra zonebruddet i OBC findes af (f) i eksempel 3.2.

Idet der gælder

$$(c) \quad r = r_O e^{\theta \tan \varphi}$$

får man

$$(d) \quad A_i = c r_o V_o \cos\varphi + c r_o e^{\theta \tan\varphi} V_o e^{\theta \tan\varphi} \cos\varphi \\ + c r_o V_o \cot\varphi [e^{2\theta \tan\varphi} - 1]$$

Ved anvendelse af $A_y = A_i$ finder man

$$(e) \quad p = \frac{c}{1 - \sin\varphi} [\cos\varphi - \cot\varphi + (\cos\varphi - \cot\varphi) e^{2\theta \tan\varphi}]$$

Efter nogen omskrivning og ved indførelse af $\theta = \beta - \frac{\pi}{2}$ finder man

$$(f) \quad p = c \cot\varphi \left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{(2\beta - \pi)\tan\varphi} - 1 \right]$$

I det tilfælde hvor $\beta = \pi$, bliver (f) til

$$(g) \quad p = c \cot\varphi \left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\pi \tan\varphi} - 1 \right]$$

hvilket er identisk med den løsning Prandtl fandt i 1920 [20.1]. Ovenstående eksempel er gengivet efter Chen [69.3].

3.4 Plan deformationstilstand i modificeret Coulomb-materiale

Ved plan deformationstilstand i et modificeret Coulomb-materiale, hvor $\varepsilon_3 = 0$ og $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, er flydebetingelsen sammensat af følgende to betingelser

$$(3-30) \quad \frac{1}{2}\sigma_1(1 + \sin\varphi) - \frac{1}{2}\sigma_2(1 - \sin\varphi) - c \cos\varphi = 0$$

$$(3-31) \quad \sigma_1 - \sigma_A = 0$$

Her svarer (3-30) til glidningsbrud, og det tilhørende arbejde pr. volumenenhed findes af (3-16). For diskontinuitetslinier gælder (3-28). (3-31) svarer til et adskillelsesbrud, og de tilhørende tøjninger findes v.h.a. (3-2) til

$$(3-32) \quad \epsilon_1 = \lambda' \quad \epsilon_2 = 0$$

For adskillelsesbruddet bliver det indre arbejde pr. volumenenhed

$$(3-33) \quad W = \sigma_A \epsilon_1$$

Betragter vi deformationszonen i fig.

3.2, ser vi af (3-26), at der som ventet er adskillelsesbrud for $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Det indre arbejde pr. længdeenhed findes af (3-33) og (3-26) til at være uafhængigt af δ_1 , og det bliver

$$(3-34) \quad W = \sigma_A V$$

Når både (3-30) og (3-31) er opfyldt samtidig, findes de tilhørende tøjninger af (3-18) og (3-32) til at være

$$(3-35) \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2}\lambda(1+\sin\varphi)+\lambda' \quad \epsilon_2 = -\frac{1}{2}\lambda(1-\sin\varphi)$$

Det indre arbejde pr. volumenenhed er

$$(3-36) \quad W = \sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2$$

Ved indsættelse af (3-35) i (3-36), og idet både (3-30) og (3-31) er opfyldt, finder man

$$(3-37) \quad W = \lambda c \cos\varphi + \lambda' \sigma_A$$

Igen betragtes deformationszonen i fig. 3.2, hvor (3-26) og (3-35) skal være opfyldt.

Hvis $\lambda' = 0$ får man det rene glidningsbrud, og (3-28) er gældende. Hvis $\lambda = 0$, får man adskillelsesbrud, og (3-34) er

gældende. Hvis både $\lambda' \neq 0$ og $\lambda \neq 0$, bliver $\frac{\pi}{2} > \alpha > \varphi$. Af (3-26) og (3-35) kan λ og λ' findes, og ved indsættelse i (3-37) får man, at arbejdet pr. længdeenhed er uafhængig af δ . Man finder

$$(3-38) \quad W_1 = V \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 - \sin \varphi} c \cos \varphi + \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{1 - \sin \alpha} \sigma_A \right), \quad \alpha \geq \varphi$$

Det ses, at (3-28) også gælder i de tilfælde, hvor $\alpha = \varphi$ og $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Formlen giver altså det indre arbejde pr. længdeenhed af en diskontinuitetslinie i et modificeret Coulomb-materiale.

En omskrivning af (3-38), så den enaksede trykstyrke σ_c indgår, kan foretages v.h.a. (2-6). Man finder dermed

$$(3-39) \quad W_1 = V \left(\frac{1 - \sin \alpha}{2} \sigma_c + \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_A \right), \quad \alpha \geq \varphi$$

I ovenstående er anvendt adskillelsesstyrken σ_A . Hvis det enaksede trækbrud er et adskillelsesbrud, er $\sigma_t = \sigma_A$ og σ_t kan i så fald indsættes i (3-38) og (3-39).

Eksempel 3.5. Drucker, Prager og Chens løsning

Drucker og Prager [52.4] har fundet (3-28) og (3-38) for $\sigma_A = 0$ ved at se på brudbetingelsen for et Coulomb-materiale og et modificeret Coulomb-materiale i et σ, τ -koordinatsystem. På samme måde har Chen og Drucker [69.2] fundet (3-38).

Normalitetsbetingelsen sammen med (3-25) viser, at V skal danne en vinkel $\alpha \geq \varphi$ med diskontinuitetslinien, se fig. 3.6. Det indre arbejde pr. længdeenhed af en

diskontinuitetslinie findes som δ multipliceret med vektorproduktet af spændingsvektoren og tøjningsvektoren.

$$(a) \quad w_1 = \delta \vec{OP} \frac{\vec{V}}{\delta}$$

Resultaterne fra plan deformationstilstand i diskontinuitetslinier er således ikke nye men har ikke før været udledt på baggrund af flydebetingelsen på hovedspændingsform.

3.5 Plan spændingstilstand

Nu betragtes igen deformationszonen i fig. 3.2. Vi antager, at såvel den plane spændingstilstand som deformationstilstanden i deformationszonen er homogen. Problemet kan nu behandles som et plant problem, idet vi kun ser på det, der sker i papirets plan.

For et Coulomb-materiale eller modificeret Coulomb-materiale, hvor $\sigma_A > \sigma_t$, er flydebetingelsen ved plan spændingstilstand, hvor $\sigma_3 = 0$, optegnet på fig. 3.7. Der indlægges et tøjningskoordinatsystem sammenfaldende med spændingskoordinatsystemet, og det kan nu let afgøres, hvor en forelagt tøjningstilstand hører til, idet tøjningsvektoren skal være normal til flydekurven.

Tøjningerne i den betragtede deformationszone er igen givet ved (3-26), og man ser, at $\epsilon_1 > 0$ og $\epsilon_2 \leq 0$, d.v.s. man på fig. 3.7 befinder sig i området 1-2-3. I punkt 1 kan tøjningsvektoren dog kun være parallel med ϵ_1 akse. For det indre arbejde pr. volumenenhed i det nævnte område kan følgende formler opstilles

I punkt 3

$$(3-40) \quad W = -\sigma_c \varepsilon_2 \quad \varepsilon_2 \leq -\frac{1}{k} \varepsilon_1$$

I punkt 2

$$(3-41) \quad W = \sigma_t \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \geq -\frac{1}{k} \varepsilon_1$$

Langs 2-3

$$(3-42) \quad W = \sigma_t \varepsilon_1 = -\sigma_c \varepsilon_2 = -\frac{1}{k} \varepsilon_1$$

Langs 1-2 og i 1

$$(3-43) \quad W = \sigma_t \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 = 0$$

For tøjningerne indføres (3-26), og for k indføres den sidste sammenhæng i (2-5). Man ser dermed, at (3-42) er opfyldt, når $\alpha = \varphi$.

Af formlerne (3-40) - (3-43) findes arbejdet pr. længdeenhed $W_1 = W \delta$ i deformationszonen til

$$(3-44) \quad W_1 = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha), \quad \alpha \leq \varphi$$

$$(3-45) \quad W_1 = \frac{1}{2} \sigma_c V \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} (1 + \sin \alpha), \quad \alpha \geq \varphi$$

Her giver (3-44) det indre arbejde pr. længdeenhed i 3 og langs 2-3 og (3-45) i 2, langs 1-2 og langs 2-3. Udtrykkene er uafhængige af δ , således at vi ved plan spændingstilstand på samme måde som ved plan deformationstilstand kan indføre diskontinuitetslinier, hvor $\delta \rightarrow 0$.

For et modificeret Coulomb-materiale, hvor $\sigma_t = \sigma_A$, er flydebetingelsen ved plan spændingstilstand vist på fig. 3.8.

Igen er 1-2-3 de mulige placeringer af tøjningsvektoren fra deformationszonen i fig. 3.2.

Koordinaterne til 2 er

$$(3-46) \quad (\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_t, k\sigma_t - \sigma_c)$$

I dette punkt bliver det indre arbejde pr. volumenenhed

$$(3-47) \quad W = \sigma_t \varepsilon_1 + (k\sigma_t - \sigma_c) \varepsilon_2 \quad \varepsilon_2 \geq -\frac{1}{k} \varepsilon_1$$

Langs den øvrige del af flydekurven gælder som før (3-40), (3-42) og (3-43), i det dog kun den sidste relation i (3-42) er gyldig.

På samme måde som ved Coulomb-materialet kan man nu ved det modificerede Coulomb-materiale finde det indre arbejde pr. længdeenhed af en diskontinuitetslinie.

Man finder

$$(3-48) \quad W_1 = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha) \quad \alpha \leq \varphi$$

$$(3-49) \quad W_1 = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha) + \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_t V \quad \alpha \geq \varphi$$

(3-48) giver det indre arbejde pr. længdeenhed i 3 og langs 2-3 og (3-49) i 2, langs 1-2 og langs 2-3.

På fig. 3.9 er flydebetingelsen vist for plan spændingstilstand og $\sigma_t = 0$. Til det indre arbejde pr. volumenenhed giver kun negative tøjninger bidrag, hvilket kan skrives som

$$(3-50) \quad W = \frac{1}{2} \sigma_c (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2))$$

Det indre arbejde pr. længdeenhed af en diskontinuitetslinje kan findes af (3-50) og (3-26). Man finder

$$(3-51) \quad W_1 = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha)$$

Det samme resultat ville man naturligvis også finde af (3-48) og (3-49) for $\sigma_t = 0$. (3-50) og (3-51) er udledt af Nielsen [69.4] i forbindelse med hans arbejde med jernbetonskiver.

Det bemærkes, at for $\sigma_t = \sigma_A$ er (3-49) identisk med (3-39). Man bemærker også, at for $\alpha = \varphi$ er (3-44) og (3-45) identisk med (3-28). I nogle områder af flydekurven for plan spændingstilstand vil den tilhørende tøjningstilstand altså også være plan. For flydebetingelsen i fig. 3.7 gælder det naturligt nok, når $\alpha = \varphi$. For flydebetingelserne i fig. 3.8 og 3.9 gælder det for $\alpha \geq \varphi$.

Omvendt kan man ikke slutte, at man ved plan deformationstilstand, hvor (3-28) eller (3-29) gælder, også har plan spændingstilstand.

Disse forhold er betinget af, at den mellemste hovedspænding ingen indflydelse har ved de her anvendte flydebetingelser.

Eksempel 3.6. Tilnærmelse ved diskontinuitetslinier

Vi vil igen se på deformationszonen i fig. 3.2, og vi antager, at der er plan spændingstilstand. I dette eksempel vil vi se på, hvad der sker i deformationszonen, når vi forlader den plane teori. Legemet med deformationszonen har nu en

udstrækning vinkelret på papirets plan, og i den homogene deformationszone vil der være en tøjning ϵ_3 , som ikke er nul, bortset fra det specielle tilfælde, hvor vi både har plan spændings- og deformationstilstand.

Hvis man har en plan spændingstilstand, der hører til i pkt. 3 i enten fig. 3.7, 3.8 eller 3.9, må der derfor være inhomogene overgangsområder imellem den homogene deformationstilstand og de stive dele I og II på fig. 3.2. Bidraget til det indre arbejde fra disse overgangsområder er der således set bort fra, når man anvender formlerne i afsnit 3.5.

Eksempel 3.7. Trykforsøget

En skive udsat for et enakset tryk p betragtes. Brudbetingelsen er den på fig. 3.9 angivne. Brud antages at foregå langs en diskontinuitetslinje med hældning β , se fig. 3.10. Bevægelsen V danner vinklen α med diskontinuitetslinjen.

Det ydre arbejde A_y findes til

$$(a) \quad A_y = p b V \cos (90 - (\beta - \alpha))$$

Det indre arbejde fra diskontinuitetslinjen findes af (3-51)

$$(b) \quad A_i = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha) \frac{b}{\cos \beta}$$

Af $A_y = A_i$ finder man

$$(c) \quad p = \frac{1}{2} \sigma_c \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \beta \sin(\beta - \alpha)}$$

(c) er en øvre værdi for bæreevnen og ved

at minimalisere med hensyn til α og β finder man minimum for

$$(d) \quad \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

Minimum findes som ventet til

$$p = \sigma_c.$$

3.6. Betons plastiske egenskaber

Vi vil her ganske kort se på, hvor godt beton opfylder betingelserne for at kunne beregnes efter de regler, som i dette kapitel er opstillet for det modificerede Coulomb-materiale, med $\sigma_t = \sigma_A$.

I afsnit 2.3 blev forsøgresultater for beton sammenlignet med Coulombs modificerede brudhypotese, og overensstemmelsen fandtes at være rimelig. Hypotesen er altså anvendelig som flydebetingelse, idet de simple brudforsøg passer med hypotesen. Derimod kunne fig. 2.8 tyde på, at flydebetingelsen for beton ikke altid er konveks, når trækspændinger optræder. Man skal imidlertid være forsigtig med at drage denne slutning, idet eksisterende forsøgsresultater ikke er entydige på dette punkt, og forsøgene er vanskelige at udføre tilfredsstillende.

De simple tryk- og trækarbejdslinier for beton blev behandlet i afsnit 2.4, og vi så, at en idealisering af beton til et stift-plastisk materiale var en drastisk idealisering.

I virkeligheden vil der også forekomme elastiske tøjninger; men i den stift-plastiske model betragtes kun den sluttill-

stand, hvor flydespændingen er opnået så mange steder og i så store områder, at en geometrisk mulig brudfigur kan udvikles.

For at kunne anvende denne fremgangsmåde, må de elastiske tøjninger være små i forhold til de plastiske. For beton så vi i afsnit 2.4, at dette ikke er tilfældet, hverken ved enakset tryk eller enakset træk. Vi så også, at for tryk falder spændingen efter at have opnået sin maksimalværdi, og at for træk er der sjældent nogen evne til fortsat deformation, efter at maximalspændingen er opnået.

Bidraget til det indre arbejde fra områder med adskillelsesbrud vil altså oftest være forsvindende. Fra glidningsbrud vil bidraget ofte være mindre end bestemt ved formlerne i dette kapitel, idet hele brudfladen ikke vil være fuldt aktiv. For dette forhold kan vi indføre en effektivitetskoefficient $v \leq 1$, som en brudflade skal multipliceres med for at give en ækvivalent fuldt udnyttet brudflade.

Det kan også gøres ved at multiplicere σ_c med v , hvorved man får en ækvivalent brudspænding over hele arealet. Dette er gjort af Nielsen [69.1] i forbindelse med opstilling af en nedreværdiløsning for bjælkers forskydningsbæreevne.

I forbindelse med armeret beton vil en hensigtsmæssig armeringsplacering formentlig kunne øge v .

Sluttelig skal der her gøres opmærksom på, at normalitetsbetingelsen kræver en volumenudvidelse under flydning. En vis

volumenudvidelse er fundet ved forsøg, men der foreligger ikke resultater, der kan bekræfte eller afkræfte normalitetsbetingelsen.

De resultater, man finder ved plastiske beregninger, skal altså anvendes med forsigtighed, idet det endnu er uafklaret, i hvor høj grad forudsætningerne for de plastiske beregninger er til stede. I den udstrækning forsøg understøtter beregningerne, kan de naturligvis altid anvendes.

4. UARMERET STØBESKEL

4.1 Indledning

I dette kapitel betragter vi et støbeskel, der er anbragt, så det danner en vinkel β med en normal til belastningsretningen, se fig. 4.1. Støbeskellets plan er vinkelret på papirets plan.

Et støbeskel vil normalt betyde en svækkelse af legemets bæreevne langs selve støbeskellet. Regner man med, at Coulombs brudhypotese også kan anvendes som brudbetingelse for støbeskellet, kan denne svaghed tages i regning ved indførelse af nye værdier for c og ϕ gældende i støbeskellet. Udføres støbeskellet med nogen ruhed, vil man ofte have samme ϕ som i monolitisk beton, hvilket der vil blive vist eksempler på i dette og i næste kapitel. I sådanne tilfælde kan man i støbeskellet indføre $c' < c$, medens friktionsvinklens størrelse bibeholdes.

4.2 Glidningsbrud

Vi ser nu på en brudmekanisme, hvor der indtræder et glidningsbrud langs støbeskellet, hvorved vi får plan deformationstilstand, og diskontinuitetslinien falder sammen med støbeskellet. Ved beregningerne skal vi derfor bruge støbeskellets styrkeparametre.

Deformationsvektoren V danner vinklen ϕ' med diskontinuitetslinien. ϕ' er friktionsvinklen gældende for støbeskellet. Denne vinkel behøver som før nævnt ikke at være lig med friktionsvinklen ϕ for den monolitiske beton.

Med betegnelserne fra fig. 4.2 findes det ydre arbejde til

$$(4-1) \quad A_y = \sigma_{br} b t V \cos(90 - \beta + \varphi')$$

Det indre arbejde findes af (3-28) og det bliver her

$$(4-2) \quad A_i = V c' \cos \varphi' \frac{b}{\cos \beta} t$$

Af disse udtryk findes en øvre værdi for bæreevnen til

$$(4-3) \quad \sigma_{br} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \beta \sin(\beta - \varphi')} c'$$

Den mindste bæreevne findes, når støbeskellet har hældningen $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}$ og den bliver

$$(4-4) \quad \sigma_{br, \min} = \frac{2c' \cos \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

Ved sammenligning med (2-6) ser vi, at $\sigma_{br, \min}$ er trykstyrken for en beton, der har støbeskellets styrkeegenskaber.

Hvis støbeskellets hældning øges eller mindskes i forhold til $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}$ stiger styrken. Denne kan dog aldrig blive større end σ_c for den monolitiske beton. Hvis β har en størrelse, så man af (4-3) får $\sigma_{br} > \sigma_c$, vil der blot ske brud uden for støbeskellet. Bæreevnen ved sådan et brud vil være $\sigma_{br} = \sigma_c$.

Denne bæreevne findes i øvrigt, uanset om man forudsætter plan spændingstilstand eller plan deformationstilstand ved brud i den monolitiske beton. For plan spændingstilstand er dette vist i eksempel

3.7 og for plan deformationstilstand fremgår det af (4-3) og (4-4), idet c' og φ' erstattes af c og φ ved den monolitiske beton. (4-3) er da det generelle øvreværdiudtryk, der har minimum (4-4) for $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$.

Denne overensstemmelse mellem bæreevnen ved plan deformationstilstand og plan spændingstilstand følger af, at den mellemste hovedspænding ikke indgår i brudbetingelsen. Et forhold der er nærmere omtalt i afsnit 3.5.

Den fundne øvreværdi for bæreevnen (4-3) er i øvrigt en eksakt løsning, hvilket ses af følgende nedreværdibetragtning.

I støbeskellet er brudbetingelsen

$$(4-5) \quad |\tau| = c' - \sigma \tan \varphi'$$

En ydre belastning σ giver anledning til en forskydningskraft og en normalkraft i støbeskellet. Regnes disse ensformig fordelt langs støbeskellet, findes sammenhængen mellem den ydre belastning σ' og spændingerne (σ, τ) i støbeskellet med hældningen β til (se fig. 4.3):

$$(4-6) \quad \sigma = -\sigma' \cos^2 \beta$$

$$(4-7) \quad \tau = \sigma' \sin \beta \cos \beta$$

En nedre værdi for brudbæreevnen σ'_{br} findes ved at sætte $\sigma' = \sigma'_{br}$ i (4-6) og (4-7) samt at indsætte disse i (4-5).

$$(4-8) \quad \sigma'_{br} \sin \beta \cos \beta = c' - \sigma'_{br} \cos^2 \beta \tan \varphi'$$

Denne kan omskrives til

$$(4-9) \quad \sigma'_{br} = \frac{c' \cos \varphi'}{\cos \beta \sin(\beta - \varphi')}$$

Øvreværdien (4-3) og nedreværdien (4-9) er altså ens, og den fundne løsning er dermed den eksakte løsning.

Bæreevnens afhængighed af støbeskellets hældning β er optegnet på fig. 4.4. De vandrette linier svarer til brud uden for støbeskellet, og den krumme del af kurven stammer fra glidningsbrud i støbeskellet.

4.3 Glidnings- og adskillelsesbrud

Vi ser nu på det tilfælde, hvor brudbetingelsen for støbeskellet følger Coulombs modificerede brudhypotese.

Brudfiguren ved brud i støbeskellet ser nu ud som på fig. 4.5, og det indre arbejde findes ved hjælp af (3-38), idet dog c' og φ' anvendes.

Bidragene til arbejdslikningen bliver

$$(4-10) \quad A_y = \sigma_{br} b t V \cos(90 - \beta + \alpha)$$

$$(4-11) \quad A_i = V \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 - \sin \varphi'} c' \cos \varphi' + \frac{\sin \alpha - \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \sigma'_t \right) \frac{b}{\cos \beta} t$$

En øvreværdi for bæreevnen findes heraf til

$$(4-12) \quad \sigma_{br} = \frac{(1 - \sin \alpha) c' \cos \varphi' + \sigma'_t (\sin \alpha - \sin \varphi')}{\cos \beta \sin(\beta - \alpha) (1 - \sin \varphi')}$$

Heri betegner σ'_t trækstyrken vinkelret på støbeskellet. Denne trækstyrke vil normalt være mindre end trækstyrken i den monolitiske beton. For at lette beregningerne udtrykker vi trækstyrken som en del af trykstyrken for en beton med støbeskellets egenskaber, d.v.s. som en del af

(4-4)

$$(4-13) \quad \sigma'_t = k \frac{2c' \cos \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

hvor konstanten $k < 1$. For monolitisk beton er den ofte omkring $\frac{1}{10}$. (4-12) bliver herefter

$$(4-14) \quad \sigma_{br} = \frac{c' \cos \varphi'}{(1 - \sin \varphi') \cos \beta \sin(\beta - \alpha)} \cdot \left(1 - \sin \alpha + \frac{2k(\sin \alpha - \sin \varphi')}{1 - \sin \varphi'} \right)$$

I dette udtryk er α variabel, og minimum findes for

$$(4-15) \quad \tan(\beta - \alpha) = \frac{(1 - \sin \varphi')(1 - \sin \alpha) + 2k(\sin \alpha - \sin \varphi')}{(1 - \sin \varphi') \cos \alpha - 2k \cos \alpha}$$

Ligningerne gælder, når $\alpha \geq \varphi'$. Ved det normale glidningsbrud er $\alpha = \varphi'$ og (4-3) er stadig gældende.

Vi betragter først det tilfælde, hvor trækstyrken vinkelret på støbeskellet er nul, d.v.s. $k = 0$. (4-14) og (4-15) bliver dermed til

$$(4-16) \quad \sigma_{br} = \frac{c' \cos \varphi' (1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \varphi') \cos \beta \sin(\beta - \alpha)}$$

$$(4-17) \quad \tan(\beta - \alpha) = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Af (4-17) findes minimum, når $\alpha = 2\beta - \frac{\pi}{2}$ og minimum bliver

$$(4-18) \quad \sigma_{br} = \frac{2c' \cos \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

Som nævnt gælder (4-18), når $\alpha \geq \varphi'$, d.v.s. når støbeskellet har en hældning $\beta \geq \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}$. For et støbeskel med mindre hældning gælder (4-2), dog således at $\sigma_{br} \leq \sigma_c$, hvor σ_c er den monolitiske betons trykstyrke.

Den fundne bæreevne er vist på fig. 4.6.

Dernæst betragter vi det tilfælde, hvor $\sigma_t' > 0$, d.v.s. $k > 0$. I dette tilfælde gælder (4-14) og (4-15) for $\alpha \geq \varphi'$ og (4-3) for $\alpha = \varphi'$.

I grænsen for formlernes gyldighed er støbeskellets hældning β_1 givet ved

$$(4-19) \quad \tan(\beta_1 - \varphi') = \frac{(1 - \sin \varphi')^2}{(1 - \sin \varphi') \cos \varphi' - 2k \cos \varphi'}$$

Dette kan omskrives til

$$(4-20) \quad \tan(\beta_1 - \varphi') = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) \frac{1 - \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi' - 2k}$$

Da vi har $k > 0$, bliver faktoren på $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$ større end 1 og dermed viser (4-20), at støbeskellets hældning ved overgangen fra (4-3) til (4-14) og (4-15) er

$$\beta_1 > \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}$$

En forøgelse af trækstyrken i støbeskellet ($\sim$ forøgelse af k) forøger dermed gyldighedsområdet af (4-3). Princippet i bæreevnens afhængighed er vist på fig. 4.7.

Eksempel 4.1. Forsøg af Johansen

Blandt de ældste forsøg med støbeskel (muligvis de ældste) er Johansens [30.1] fra 1930.

Ved forsøgene støbtes nederste del af prøvelegemet med den skrå flade imod en parafinbehandlet stålplade. Efter 7 eller 14 døgn fugtedes den skrå flade, og den øverste del af prøvelegemet påstøbtes.

Prøveresultaterne er afbildet i et τ, σ -koordinatsystem, hvor τ, σ er spændingerne ved brud i støbeskellet, jfr. (4-6) og (4-7). Denne afbildning har den fordel, at glidningsbrudbetingelsen for støbeskellet (4-5) afbildes som en ret linie, og værdierne for c' og φ' er lette at aflæse. Derimod ses betydningen af støbeskellets hældning ikke så godt, ligesom det er svært at se en eventuel indflydelse fra en lille trækstyrke.

Af figuren og oplysningerne i [30.1] findes v.h.a. (4-6) og (4-7) sammenhængen imellem brudstyrken σ_{br} og støbeskellets hældningsvinkel β . Disse er indtegnet på fig. 4.8 sammen med (4-3), hvori $c' = 3\text{MN/m}^2$ og $\tan\varphi' = 0,75$ ($\varphi' = 37^\circ$). (Johansen angav selv $c' = 3\text{MN/m}^2$ og $\varphi' = 0,8$).

De indtegnede forsøgsresultater er middel af 4, bortset fra $\beta = 45,6$, hvor ét af forsøgsresultaterne er udelukket, idet det var markant lavere end de øvrige.

Resultaterne passer godt med (4-3), hvilket også var at vente, da (4-3) er identisk med den velkendte (4-5). Dette blev vist ved nedreværdibetragtingen sidst i afsnit 4.1.

Den anvendte monolitiske beton havde styrken $\sigma_c = 30 \text{ MN/m}^2$, hvortil svarer $c = 7,5 \text{ MN/m}^2$, når $\phi = 37^\circ$. Støbeskellet har altså nedsat c med 60%.

En vurdering af de formler, der er opstillet i afsnit 4.2, har ikke været muligt p.g.a. manglende forsøgsresultater.

5. FORSKYDNING

5.1 Indledning

I dette kapitel vil vi se på nogle bæreevneproblemer i armeret beton. Armeringen antages ligesom betonen at være stiftplastisk med flydespændingen σ_F . Ligeledes antages det, at armeringen kun kan tage kræfter i længderetningen.

Fig. 5.1 viser princippet i det forskydningsproblem, vi betragter. Et legeme belastes af to modstående kræfter, og brud optræder ved, at den ene del bevæger sig nedad og bort fra den anden. Denne bevægelse foregår langs en diskontinuitetslinje imellem de ydre belastninger. Vinkelret på diskontinuitetslinjen er anbragt armering med et samlet areal på F .

Højden af forskydningsbruddet betegnes h , se fig. 5.1 og bredden vinkelret på papirets plan b . Idet betontværsnittet er meget større end F , bliver det $b \cdot h$. Armeringsgraden indføres som forholdet imellem armeringens trækflydekraft og betonen trykbrudkraft vinkelret på linien imellem de ydre belastninger, d.v.s.

$$(5-1) \quad \Phi = \frac{F \sigma_F}{h b \sigma_c}$$

Den ydre belastning P regnes jævnt fordelt over tværsnittet, således at forskydningsspændingen τ er givet ved

$$(5-2) \quad \tau = \frac{P}{b h}$$

De efterfølgende beregninger vil blive udført som øvreværdiberegninger. Ved opstilling af arbejdsligningen kommer der nu

to bidrag til det indre arbejde. Det ene fra armeringen og det andet fra betonen. Betonen vil vi i første omgang betragte som et materiale med en brudbetingelse, der følger Coulombs modificerede brudhypotese. I afsnit 5.5 vil vi indføre en faktor, med hvilken vi søger at tage hensyn til, at der ikke kan opnås fuld virkning fra betonen.

Her er kun behandlet tilfældet med armering vinkelret på diskontinuitetslinien. Skrå armering kan naturligvis behandles tilsvarende.

5.2 Plan deformationstilstand

Brudfiguren på fig. 5.2 anvendes, og idet vi har plan deformationstilstand, ved vi, at vinklen α imellem V og diskontinuitetslinien er større end eller lig med friktionsvinklen φ . Beregningerne deles i to dele, afhængig af om $\alpha = \varphi$ eller $\alpha > \varphi$.

$$\underline{\alpha = \varphi}$$

Bidragene til arbejdsligningen bliver

$$(5-3) \quad A_y = P_{br} V \cos \varphi$$

Fra betonen findes af (3-39)

$$(5-4) \quad A_{ib} = \frac{1 - \sin \varphi}{2} \sigma_c V h b$$

Idet armeringen kun tager kræfter i længderetningen bliver

$$(5-5) \quad A_{ia} = F \sigma_F V \sin \varphi$$

Af $A_y = A_{ia} + A_{ib}$ finder man, idet (5-1) og (5-2) indføres

$$(5-6) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \frac{1-\sin\varphi}{2 \cos\varphi} + \Phi \tan\varphi$$

I et $\Phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}$ -koordinatsystem er (5-6) en ret linie.

$$\alpha > \varphi$$

Analogt til (5-3) og (5-5) findes

$$(5-7) \quad A_y = P_{br} V \cos\alpha$$

$$(5-8) \quad A_{ia} = F \sigma_F V \sin\alpha$$

Bidraget fra betonen findes igen af (3-39).

$$(5-9) \quad A_{ib} = \left(\frac{1-\sin\alpha}{2} \sigma_c + \frac{\sin\alpha-\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \sigma_t \right) V h b$$

Den samlede arbejdslikning giver analogt med (5-6)

$$(5-10) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \frac{1-\sin\alpha}{2 \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha-\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)\cos\alpha} \frac{\sigma_t}{\sigma_c} + \Phi \tan\alpha$$

Dette er en øvreværdi, hvori α er variabel. Den værdi af α , der giver minimum, findes efter nogen regning til

$$(5-11) \quad \sin\alpha = 1 - 2 \frac{\left(\Phi + \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) (1-\sin\varphi)}{1-\sin\varphi - 2 \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \sin\varphi}$$

Minimum for (5-10) findes herefter til

$$(5-12) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \sqrt{\left(\Phi + \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \left(\frac{1-\sin\varphi - 2 \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \sin\varphi}{1-\sin\varphi} - \left(\Phi + \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \right)}$$

I et $\Phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}$ -koordinatsystem er (5-12) en cirkel, der har centrum i

$$(5-13) \quad \left(\Phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\sigma_t}{\sigma_c}, 0\right)$$

Cirkelens radius er

$$(5-14) \quad r = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \frac{\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$$

Betingelsen for af (5-12) er gyldig, er at $\alpha > \varphi$, d.v.s.

$$(5-15) \quad \sin\alpha > \sin\varphi$$

Af (5-15) og (5-11) finder vi, at (5-12) er gyldig, når

$$(5-16) \quad \Phi < \frac{1-\sin\varphi}{2} - (1+\sin\varphi) \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$$

Overgangen fra den rette linie (5-6) til cirklen (5-12) finder sted i det punkt, hvor linien tangerer cirklen. Dette punkt er

$$(5-17) \quad \left(\Phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{1-\sin\varphi}{2} - (1+\sin\varphi) \frac{\sigma_t}{\sigma_c}, \right.$$

$$\left. \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} \left(\frac{1-\sin\varphi}{2} - \sin\varphi \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)\right)$$

På fig. 5.3 er (5-6) og (5-12) optegnet, og nogle karakteristiske punkter er påskrevet. For $\Phi < 0$ er kurven tegnet punkteret, idet den ikke har nogen fysisk mening, (se dog afsnit 5.4). Bemærk i øvrigt kurvens store analogi med Coulombs modificerede brudhypotese, fig. 2.3.

5.3 Plan spændingstilstand

Nu betragter vi et problem helt analogt med det foregående, bortset fra at forudsætningerne er plan spændingstilstand. Bidraget til det indre arbejde fra betonen findes af (3-48) og (3-49), idet brudbetingelsen er den i fig. 3.8 viste. Beregningerne opdeles i 4 tilfælde, afhængig af vinklen α på fig. 5.2.

$$\underline{\alpha = 0}$$

I dette tilfælde giver armeringen intet bidrag til det indre arbejde, da bevægelsen er vinkelret på armeringen. Bidraget fra betonen findes af (3-48), hvorved vi får

$$(5-18) \quad A_y = P_{br} V$$

$$(5-19) \quad A_i = A_{ib} = \frac{1}{2} \sigma_c V h b$$

Resultatet bliver dermed

$$(5-20) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \frac{1}{2}$$

Det bemærkes, at (5-20) er uafhængig af armeringsgraden ϕ .

$$\underline{0 < \alpha < \varphi}$$

De tre bidrag til arbejdslikningen bliver:

$$(5-21) \quad A_y = P_{br} V \cos \alpha$$

$$(5-22) \quad A_{ib} = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha) h b$$

$$(5-23) \quad A_{ia} = F \sigma_F V \sin \alpha$$

En øvre værdi for bæreevnen findes dermed til

$$(5-24) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \frac{1 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha} + \phi \tan \alpha$$

Minimum for (5-24) findes for

$$(5-25) \quad \sin \alpha = 1 - 2\phi$$

Minimum bliver

$$(5-26) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \sqrt{\phi(1-\phi)}$$

I et $\phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}$ -koordinatsystem er (5-26) en cirkel med centrum

$$(5-27) \quad \left(\phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Cirkelns radius bliver

$$(5-28) \quad r = \frac{1}{2}$$

(5-26) gælder for $0 < \alpha < \phi$, d.v.s.

$$(5-29) \quad 0 < \sin \alpha < \sin \phi$$

Af (5-29) og (5-25) findes gyldighedsområdet for (5-26) til

$$(5-30) \quad \frac{1 - \sin \phi}{2} < \phi < \frac{1}{2}$$

I $\phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}$ -koordinatsystemet er (5-20) tangent til (5-26) i punktet

$$(5-31) \quad \left(\phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{\alpha = \varphi}$$

Bortset fra ændring af α til φ bliver arbejdslikningens bidrag lig med (5-21), (5-22) og (5-23), og i stedet for (5-24) finder man

$$(5-32) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi} + \varphi \tan\varphi$$

(5-32) er identisk med (5-6) og er en ret linie i et $\varphi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}$ -koordinatsystem. (5-32) tangerer cirklen (5-26) i det ene endepunkt for cirkelns gyldighedsområde, d.v.s.

$$(5-33) \quad \left(\varphi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{1-\sin\varphi}{2}, \frac{\cos\varphi}{2}\right)$$

$$\underline{\alpha \geq \varphi}$$

Betonens bidrag til arbejdslikningen findes af (3-49) og bliver

$$(5-34) \quad A_{ib} = \left(\frac{1-\sin\alpha}{2} \sigma_c + \frac{\sin\alpha-\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \sigma_t\right) V h b$$

De øvrige bidrag til arbejdslikningen er identiske med (5-21) og (5-23). En øvre-værdi for bæreevnen findes herefter til

$$(5-35) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \frac{1-\sin\alpha}{2\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha-\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)\cos\alpha} \frac{\sigma_t}{\sigma_c} + \varphi \tan\alpha$$

Ligningen er identisk med (5-10), hvorfor vi kender minimum

$$(5-36) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \sqrt{\left(\varphi + \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) \left(\frac{1-\sin\varphi - 2 \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \sin\varphi}{1-\sin\varphi} - \left(\varphi + \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)\right)}$$

(5-36) er en cirkel, der er gyldig, når (5-16) er opfyldt. Cirklen tangerer (5-32) i et punkt, der er givet ved (5-17).

For $\alpha \geq \varphi$ er bæreevneformlerne ved plan spændingstilstand sammenfaldende med bæreevneformlerne ved plan deformationstilstand. Dette er endnu et eksempel på, at plan spændingstilstand i en del tilfælde er ledsaget af plan deformationstilstand. Dette skyldes som nævnt i afsnit 3.5, at den mellemste hovedspænding er uden betydning ved Coulombs brudhypotese og modificerede brudhypotese.

På fig. 5.4 er bæreevneformlerne for plan spændingstilstand optegnet. Nogle enkelte karakteristiske værdier er påskrevet, (se også fig. 5.3).

5.4 Normalkraftens indflydelse

En ydre normalkraft, som vist på fig. 5.5, kan let tages i regning.

Med en given værdi af normalkraften N giver det ydre arbejde ved den viste brudfigur

$$(5-37) \quad A_y = P_{br} V \cos \alpha + N V \sin \alpha$$

Det indre arbejde fra betonen betegnes blot A_{ib} og er afhængig af α men i øvrigt identisk med de udtryk, der er anvendt i afsnit 5.2 og 5.3. Fra armeringen findes som sædvanlig

$$(5-38) \quad A_{ia} = F \sigma_F V \sin \alpha$$

Arbejds ligningen giver hermed

$$(5-39) \quad P_{br} V \cos \alpha + N V \sin \alpha = A_{ib} + F \sigma_F V \sin \alpha$$

Vi indfører nu spændingen σ_N som den jævnt

fordelte normalspænding, der stammer fra N , d.v.s.

$$(5-40) \quad \sigma_N = \frac{N}{b \cdot h}$$

Herefter kan (5-39) skrives som

$$(5-41) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{A_{ib}}{V \sigma_c} + \left(\Phi - \frac{\sigma_N}{\sigma_c} \right) \tan \alpha$$

Dette udtryk er fuldstændig analogt med de tilsvarende udtryk i afsnit 5.2 og 5.3. Den eneste forskel er, at Φ nu er erstattet med $\Phi - \frac{\sigma_N}{\sigma_c}$. Indfører vi

$$(5-42) \quad \Phi^* = \Phi - \frac{\sigma_N}{\sigma_c}$$

kan alle de før indregnede formler anvendes ved at indsætte Φ^* i stedet for Φ .

Formlerne viser som ventet, at en ydre trykkraft øger bæreevnen. Forøgelsen er lig med en forøgelse af armeringen, svarende til en flydekraft, der er lig med den ydre trykkraft.

På samme måde svarer en trækraft til, at armering fjernes.

På fig. 5.3 og 5.4 viser en normalkraft sig ved en forskydning af $\frac{\tau_{br}}{\sigma_c}$ akse.

5.5 Forskydning i beton

De forudgående beregninger er foretaget for et stift-plastisk modificeret Coulomb-materiale.

Som nævnt i afsnit 3.6 er beton ikke stift-plastisk. Brudtøjningen er begrænset, og de elastiske tøjninger er af samme størrelsesorden som de plastiske. Yder-

ligere er betonens trykarbejdslinie faldende for større tøjninger end den, der svarer til $\sigma = \sigma_{\max} = \sigma_c$.

Disse ting medfører, at man ikke kan forvente, at et brudsnit giver et betonbidrag til modstandsevnen, der er så stort, som formlerne i afsnit 3 angiver.

For en given konstruktion kan vi nu indføre en faktor (effektivitetskoefficient) $v \leq 1$, som skal multipliceres med arealet $b h$ for at få et ækvivalent areal, som vi kan regne med giver et fuldt bidrag til det indre arbejde. Det betyder, at samtlige de foregående formler vil være gyldige, hvis vi erstatter τ_{br} , Φ og σ_N med

$$(5-43) \quad \tau'_{br} = \frac{P_{br}}{v b h}$$

$$(5-44) \quad \Phi' = \frac{F \sigma_F}{v b h \sigma_c}$$

$$(5-45) \quad \sigma'_N = \frac{N}{v b h}$$

Sammenhængen mellem disse størrelser og de tilsvarende ikke mærkede størrelser findes til

$$(5-46) \quad \tau'_{br} = \frac{1}{v} \tau_{br}$$

$$(5-47) \quad \Phi' = \frac{1}{v} \Phi$$

$$(5-48) \quad \sigma'_N = \frac{1}{v} \sigma_N$$

Da det er de ikke mærkede størrelser, det er behageligst at arbejde med, opskrives formlerne ved hjælp af disse. Fremgangsmåden er at erstatte alle τ_{br} , Φ og σ_N

i de udregnede formler med τ'_{br} , Φ' og σ'_N , hvorefter (5-46) - (5-48) anvendes for at få formlerne udtrykt ved τ_{br} , Φ og σ_N . I afsnit 5.6 er der givet en systematisk oversigt over formlerne.

Med indførelse af effektivitetskoefficienten v kan man sige, at vi har fjernet os noget fra øvreværditeknikken. Imidlertid kan øvreværditeknikken alene ikke anvendes til bæreevnebestemmelse. Den må enten sammenholdes med nedreværdiløsninger, eller man må verificere øvreværdiløsningernes brugbarhed ved forsøg.

En vurdering af formlerne i afsnit 5.6 ved hjælp af forsøgsresultater må i første omgang gælde en sammenligning af formlen for bæreevnens afhængighed af armeringsgraden. Kan denne sammenlignes med fig. 5.3 eller fig. 5.4, må det derefter undersøges, hvilke v der i forskellige tilfælde kan regnes med.

Det væsentligste for denne afhandling er at vise, at den udviklede teori kan anvendes i en hel del tilfælde. Derfor indeholder eksemplerne her i kapitel 5 først og fremmest en eftervisning af, at bæreevnen i de aktuelle tilfælde kan sammenlignes med fig. 5.3 og fig. 5.4. Et nærmere studium af v er ikke foretaget; men en del konklusioner, der kan foretages på grundlag af de eksisterende forsøg, er i de enkelte tilfælde medtaget.

5.6 Formeloversigt

De i afsnit 5.3 og 5.4 udregnede formler med den modificering, der skal til ved beton, ser herefter således ud:

Plan_deformationstilstand

$$(5-49) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \sqrt{(\Phi + \nu \frac{\sigma_t}{\sigma_c}) \left(\nu \frac{1 - \sin\varphi - 2 \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} - (\Phi + \nu \frac{\sigma_t}{\sigma_c}) \right)}$$

for

$$(5-50) \quad \Phi \leq \nu \left(\frac{1 - \sin\varphi}{2} - (1 + \sin\varphi) \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)$$

For større Φ gælder

$$(5-51) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \nu \frac{1 - \sin\varphi}{2 \cos\varphi} + \Phi \tan\varphi$$

Plan_spændingstilstand

$$(5-52) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \sqrt{(\Phi + \nu \frac{\sigma_t}{\sigma_c}) \left(\nu \frac{1 - \sin\varphi - 2 \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} - (\Phi + \nu \frac{\sigma_t}{\sigma_c}) \right)}$$

for

$$(5-53) \quad \Phi \leq \nu \left(\frac{1 - \sin\varphi}{2} - (1 + \sin\varphi) \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)$$

$$(5-54) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \nu \frac{1 - \sin\varphi}{2 \cos\varphi} + \Phi \tan\varphi$$

for

$$(5-55) \quad \nu \left(\frac{1 - \sin\varphi}{2} - (1 + \sin\varphi) \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \leq \Phi \leq \nu \frac{1 - \sin\varphi}{2}$$

$$(5-56) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \sqrt{\Phi(\nu - \Phi)}$$

for

$$(5-57) \quad \nu \frac{1 - \sin\varphi}{2} \leq \Phi \leq \nu \frac{1}{2}$$

$$(5-58) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = v \frac{1}{2}$$

for

$$(5-59) \quad \Phi \geq v \frac{1}{2}$$

I tabel 5.1 og tabel 5.2 er bæreevneformlerne opskrevet med karakteristiske værdier for φ og σ_t indsat. Man bemærker, at for aftagende værdier af σ_t nærmer (5-52) sig (5-56), og de er sammenfaldende for $\sigma_t = 0$. Det bemærkes også, at forsøgsresultater med armeringsgrader $\Phi \leq v \frac{1-\sin\varphi}{2}$ ikke sætter os i stand til at afgøre, om vi bør regne med plan spændingstilstand eller plan deformationstilstand.

I tilfælde af normalkræfter bruges de udledte formler, når blot Φ erstattes af Φ^* , der findes af (5-42).

Eksempel 5.1. Forskydning i monolitisk beton

Hofbeck, Ibrahim og Mattock [69.5] har udført forsøg med monolitiske prøvelegemer, der havde det på fig. 5.6 viste udseende.

Bæreevnens afhængighed af armeringsgraden er vist på fig. 5.7. På figuren er også indtegnet de fundne bæreevnekurver for plan spændingstilstand, hvor φ er sat til 37° og $v = 2/3$.

Den anvendte værdi for φ er den, vi normalt bruger for beton. v er valgt, så overensstemmelsen mellem forsøg og formlerne bliver god. (5-52) er ikke indtegnet, idet en skønnet trækstyrke på $\frac{1}{10}$ af trykstyrken kun giver en ganske lille forskel mellem (5-52) og (5-54) for $0 \leq \Phi \leq 0,04 v$, se fig. 5.4.

Bortset fra $\Phi = 0$ er overensstemmelsen mellem bæreevneformlerne og forsøgsresultaterne særdeles god.

Når bæreevnen for $\Phi = 0$ er mindre, end teorien forudsiger, kan det skyldes et eller flere af følgende forhold: Den forsvindende flydeevne ved træk gør sig gældende, trækstyrken er mindre end forudsat, eller det kan være en statistisk set normalt afvigelse.

Mattock og Hawkins [72.3] har udført 6 forsøg med prøvelegemer, der belastedes med træk, men i øvrigt efter princippet i fig. 5.6. Udformningen af prøvelegemerne var dog lidt anderledes, således at vi ikke kan forvente samme effektivitetskoeficient som hos Hofbeck m.fl.

Forsøgsresultaterne er indtegnet på fig. 5.8 sammen med bæreevnekurverne for plan spændingstilstand. Igen er $\varphi = 37^\circ$ og (5-52) er udeladt. v er sat til 0,38.

Der er kun få resultater, og der er en del spredning på dem. Overensstemmelsen med teorien ses at være acceptabel, omend den ikke er så god som på fig. 5.7.

Rajendran og Morley [74.1] har også vurderet forsøgene af Hofbeck m.fl. [69.5] ved hjælp af plasticitetsteorien.

Ved at sætte trækstyrken til nul og anvende plan spændingstilstand har de fundet (5-26) som en nedreværdi for bæreevnen. De nævner i øvrigt uden at vise det, at der findes en brudfigur, der giver samme bæreevne som nedreværdien, således at (5-26) er en korrekt løsning, når $\sigma_t = 0$.

For at få forsøgsresultaterne til at passe med teorien anvender Rajendran og Mor-

ley også en betonbrudstyrke, der er mindre end den målte. Det svarer helt til den her indførte effektivitetskoefficient.

Rajendran og Morley arbejder kun med plan spændingstilstande. Det har ført dem til den konklusion, at plasticitetsteorien ikke kan forklare forskellen imellem bæreevnen af de her beskrevne prøvelegemer og tilsvarende, der er revnede langs forskydningssnittet. Som vi skal se i eksempel 5.2, kan forskellen forklares ved anvendelse af formlerne for plan deformationstilstand.

Eksempel 5.2. Forskydning i armeret støbeskel

Vi betragter igen fig. 5.6 og antager, at forskydningssnittet er svækket i forhold til den monolitiske beton. Svækkelsen kan f.eks. være i form af et støbeskel.

Den introducerede svækkelse giver sig til kende ved en mindre kohæsion c i støbeskellet end i den monolitiske beton. Eksempel 4.1 viser, at ϕ derimod kan forventes ofte at være den samme i støbeskellet som i den monolitiske beton.

For støbeskellet betyder dette, at effektivitetskoefficienten v tilsyneladende bliver mindre end for det tilsvarende tilfælde i monolitisk beton. Yderligere vil bruddet i støbeskellet ske som plan deformationstilstand, når armeringsgraden er passende lille. Ved store armeringsgrader sker bruddet som i monolitisk beton, og dermed også med en effektivitetskoefficient, der svarer til dette. Denne ændring fra brud i støbeskellet til brud i det monolitiske legeme er helt analog

til den tilsvarende ændring i det uarmerede støbeskel i kapitel 4. Princippet i sammenhængen imellem bæreevnen og armeringsgraden er vist på fig. 5.9.

Hofbeck, Ibrahim og Mattock [69.5] har udført forsøg, der er tilsvarende de monolitiske, der er afbildet på fig. 5.6. I forskydningssnittet havde man blot introduceret en svaghed, nemlig en spalterevne, der etableredes efter samme princip, som man udfører spalteforsøget til bestemmelse af betons spaltetrækstyrke.

Forsøgsresultaterne er indtegnet på fig. 5.10. Bæreevneformlerne for plan deformationstilstand er indtegnet, idet $\varphi = 37^\circ$ og $\sigma_t = 0$. (Trækstyrken i betonen er nul vinkelret på forskydningssnittet). v er sat til 0,45 svarende til ca. 70% af effektivitetskoefficienten i det monolitiske tilfælde. Også bæreevnekurverne for plan spændingstilstand, d.v.s. bæreevnen for monolitiske prøvelegemer, er vist. Denne kurve er lig med den, der er vist på fig. 5.7.

Bæreevnen skulle herefter bestemmes af den af de to sæt kurver, der giver mindst bæreevne. For $\Phi < 0,28$ sker bruddet med plan deformationstilstand, og $v = 0,45$, og for $\Phi > \text{ca. } 0,28$ sker bruddet som i det monolitiske tilfælde, d.v.s. med plan spændingstilstand, og $v = 2/3$.

Overensstemmelsen mellem forsøgsresultaterne og teorien ses at være god.

Mattock og Hawkins [72.3] har også udført forsøg med revnede prøvelegemer, der bortset fra dette svarede til deres forsøg med

monolitiske prøvelegemer og træk, som er behandlet i eksempel 5.1.

Resultaterne er vist på fig. 5.11 sammen med bæreevnekurver, der er analog med de på fig. 5.10 viste. Kurven for plan deformationstilstand er optegnet med $\nu = 0,27$, altså også her en effektivitetskoefficient på 70% af den fra det monolitiske tilfælde.

Også her ses overensstemmelsen mellem teorien og forsøgsresultater at være god.

Anderson [60.1] udførte forsøg med egentlige støbeskel. Prøvelegemet så principielt ud som vist på fig. 6.5. Den ene halvdel, d.v.s. til forskydningssnittet støbtes først. Efter hældning vaskedes det ru forskydningssnit i cementmørtel, og den anden halvdel støbtes.

Forsøgsdatane er yderst sparsomme, idet resultaterne er angivet i en figur med forskydningsstyrken τ_{br} som funktion af armeringsarealet F i forhold til betonarealet $b \cdot h$. Desuden er angivet, at første halvdel af prøvelegemet støbtes af beton med $\sigma_c = 7500 \text{ psi}$ ($\sim 52 \text{ MN/m}^2$) og den anden halvdel af beton med enten $\sigma_c = 7500 \text{ psi}$ eller $\sigma_c = 3000 \text{ psi}$ ($\sim 21 \text{ MN/m}^2$).

Hvis vi skønner en flydespænding for armeringen, kan forsøgsresultaterne optegnes i vort sædvanlige koordinatsystem. Denne skønnes til $\sigma_F = 53000 \text{ psi}$ (370 MN/mm^2), og resultaterne er optegnet i fig. 5.12, idet middelstyrken $\sigma_c = 5300 \text{ psi}$ (37 MN/m^2) er anvendt for prøvelegemet af beton med forskellig styrke. Det bemærkes, at resultaterne fra de to seri-

er ved denne optegning stort set bliver sammenfaldende.

Idet prøvelegemerne i de to serier var ens, bortset fra betonstryken og den tværgående armeringsmængde kan vi regne med samme v i de to serier. Vi kan ikke finde v af forsøgsresultaterne, idet flyde-spændingen for armeringen er skønnet. Derimod kan vi af fig. 5.12 se, at styrken i et støbeskel imellem beton med to forskellige styrker kan bestemmes ved hjælp af middelstyrken for de to betontyper.

Denne konklusion bør anvendes med varsomhed, idet man skal være opmærksom på, at man kan udføre støbeskellene så stærke, at brud vil indtræde i den svageste beton som monolitisk brud.

Houborg og Sørensen [74.2] har i forbindelse med et eksamensarbejde ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner udført forsøg med tre typer støbeskel. Den ene halvdel af prøvelegemet støbtes med forskydningssnittet opad. Forskydningssnittet blev behandlet på én af følgende tre måder:

- 1) Afrevet med stålskinne og derefter glittet med murske.
- 2) Afrevet med stålskinne.
- 3) Afrevet med stålskinne og efter ca. 2 time børstet med stålbørste.

Efter to døgn støbtes den modsatte del af prøvelegemet.

Resultaterne fra forsøgene med støbeskellene behandlet efter metode 3 er afbildet på fig. 5.13. Resultaterne passer godt med forudsætningen om plan deforma-

tionstilstand, hvilket ses af den indtegnede linie, som er (5-51) med $v = 0,58$ og $\varphi = 37^\circ$.

Støbeskellene behandlet efter metode 1 og 2 viser sig at give mindre bæreevne end de, der er behandlet efter metode 3. Dette er i og for sig ikke særlig overraskende. Hvad der er mere overraskende, er, at metode 1 og metode 2 er lige gode, hvilket ses af fig. 5.14. Man ser også af figuren, at forudsætningen om plan deformationstilstand er god, blot er friktionsvinklen nu nedsat til ca. $26,5^\circ$, og v er ligeledes mindsket.

Da den glittede behandling af støbeskellet formodentlig er den glatteste form for støbeskel, der kan forekomme, tyder forsøgene derfor på, at friktionsvinklen i et støbeskel altid kan regnes større end 26° .

Eksempel 5.3. Fortandede vægfugers forskydningsbæreevne

I det præfabrikerede skivebyggeri sammenbygges bærende vægelementer ofte ved hjælp af en fortandet, armeret vægfuge. Princippet er vist på fig. 5.15.

Vægelementerne anbringes i forlængelse af hinanden, hvorefter det lodrette jern sættes ned imellem bøjlerne. Til sidst udstøbes med en fugemørtel. Den fortandede vægfuge er et specialtilfælde af et støbeskel, hvor dog kun tandarealet er aktivt ved brud, se fig. 5.16.

Idet trækstyrken vinkelret på fugen sættes til nul, kan det let vises (se [75.3]), at formlerne for plan deformationstilstand fører til

$$(a) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \sqrt{\Phi \left(v \frac{B}{A} - \Phi \right)}$$

$$(b) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = v \frac{B}{A} \frac{1 - \sin \varphi}{2 \cos \varphi} + \Phi \tan \varphi$$

Grænsen mellem de to formlers gyldighed er givet ved

$$(c) \quad \Phi = v \frac{B}{A} \frac{1 - \sin \varphi}{2}$$

I formlerne er anvendt de sædvanlige betegnelser, og $\frac{B}{A}$ er fortandingsforholdet. Her er A hele tværsnittet af fugemørtlen, og B er tværsnittet af knasterne i fugemørtlen, d.v.s. den del hvori der er brud på fig. 5.16. Effektivitetskoefficienten v er stadig et mål for hvor stor en del af brudfladen B, man kan medregne med fuldt bidrag.

Forskydningsbæreevnen af de fortandede vægfigurer har været undersøgt ved forsøg i mange år. En mængde forsøgsresultater er blevet behandlet af en gruppe forskere [74.3], og de har fundet en empirisk formel

$$(d) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = 0,09 \frac{B}{A} + \Phi \quad \text{for } 0,01 \leq \Phi \leq 0,08$$

Man ser, at (d) bortset fra grænserne er identisk med (b), hvis $\varphi = 45^\circ$ og $v = 0,43$. Grænserne for gyldigheden af (d) er bestemt af det område, hvori man har forsøgsresultater.

Teorien viser imidlertid, at vi ikke har en ret linie i hele området, men at vi for små Φ har en cirkel, der går igennem

$$\left(\Phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} \right) = (0,0). \text{ Forsøgsresultaterne,}$$

der hører til denne cirkel, har formodentlig medvirket til, at man har valgt en lidt lav faktor foran $\frac{B}{A}$ i (d). En mere realistisk værdi for ν er 0,55 i stedet for 0,43. Derved bliver bæreevneformlerne til:

$$(e) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = \sqrt{\Phi(0,55 \frac{B}{A} - \Phi)} \quad \Phi \leq 0,08 \frac{B}{A}$$

$$(f) \quad \frac{\tau_{br}}{\sigma_c} = 0,11 \frac{B}{A} + \Phi \quad \Phi \geq 0,08 \frac{B}{A}$$

På fig. 5.17 er vist nogle forsøgsresultater med $\frac{B}{A} = 0,22$ af Pommeret [71.1], her taget fra [74.3]. På figuren er også indtegnet (e) og (f), og overensstemmelsen ses at være udmærket.

Eksempel 5.4. Forskydnings-friktionsteorien

Forskydnings-friktionsteorien (The Shear-Friction Theory) anvendes ofte i USA til beregninger af en del forskydningsproblemer, f.eks. forskydningsbæreevnen af støbeskel. Da de formler, som forskydnings-friktionsteorien fører til, minder meget om de heri udledte formler for plan deformationstilstand, skal teorien gennemgås og kommenteres her.

Birkeland og Birkeland [66.2] fremsatte i 1966 forskydningsfriktions-teorien, idet de antog, at et støbeskel var savtakket, og at tænderne havde vinklen ψ , se fig. 5.18a. Som det fremgår af fig. 5.18b, kræver en forskydning af den øverste del i forhold til den nederste, at der sker en tv rudvidelse. Tv rudvidelsen giver anledning til deformationer og dermed spændinger i tværarmeringen. Brud indtræder, når armeringen flyder.

Ved at antage, at trykket imellem "tænderne" står vinkelret på disse, finder man med betegnelserne i fig. 5.18c

$$(a) \quad Q = P \tan\psi = F \sigma_F \tan\psi$$

Her er F arealet af den tværgående armering.

Vi kan indføre forskydningsspændingen ved division med betonarealet A

$$(b) \quad \tau_{br} = \frac{F}{A} \sigma_F \tan\psi = f \sigma_F \tan\psi$$

Her er indført betegnelsen f for armeringsforholdet $\frac{F}{A}$.

For $\tan\psi$ angav Birkeland og Birkeland 0,8-1,0 for almindeligt støbeskel og for beton imod stål, 1,4 for ru støbeskel og 1,7 for monolitisk beton. Som øvre grænse for τ_{br} anbefaltes 800 psi (5,5 MN/m²), idet forsøgsresultaterne var begrænset til $\tau_{br} \leq 800$ psi.

Mast [68.1] angiver også $\tan\psi = 1,4$ for ru støbeskel; men 0,7 for glatte støbeskel og 0,7-1,0 for beton imod stål.

Sammenligning af (b) med forskellige forskydningsforsøg, f.eks. en del af de i eksempel 5.1 nævnte, har senere ført til, at såvel Birkeland [71.2] som Mattock og Hawkins [72.3] sætter $\tau_{br} = 0,2\sigma_c$ som øvre grænse for gyldigheden af (b).

Den udledte formel (b) er lig med (5-51), bortset fra at betonens bidrag i (b) er udeladt. I et $(\phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c})$ -koordinatsystem betyder det, at (b) går igennem (0,0). Af fig. 5.19 fremgår umiddelbart, hvorfor

man har fået de store værdier for $\tan\psi$ samt den øvre grænse for gyldigheden af (b), uanset om man har sammenlignet med forsøg, hvor der har været tale om plan deformationstilstand eller plan spændingstilstand.

Trækstyrken i beton har altid voldt store problemer, og man gør derfor ofte den tilnærmelse at se bort fra den. Når man derfor udførte forsøg til bæreevnebestemmelse (f.eks. [69.5] og [72.3], se eksempel 5.1), valgte man at spalte prøvelegemerne først, således at trækstyrken vinkelret på forskydningssnittet i fig. 5.6 var nul. Uden armering må forskydningsbæreevnen derfor være nul, og en bæreevneformel skal derfor gå igennem $(\Phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}) = (0,0)$. Dette krav tilfredsstilles af (b).

Ved at foretage spaltningen tvinger man imidlertid prøvelegemet til ved små armeringsgrader at bryde ved plan deformationstilstand i stedet for ved plan spændingstilstand, som det er beskrevet i eksempel 5.1. Brudbæreevnen ved plan deformationstilstand søger man derefter at beskrive ved en ret linie gennem

$(\Phi, \frac{\tau_{br}}{\sigma_c}) = (0,0)$, hvilket fører til de store hældninger, da man mangler betonbidraget.

For at få den rette linie til at passe bedre med forsøgsresultaterne foreslog Mattock og Hawkins [72.3] en alternativ beregning af de revnede prøvelegemer

$$\begin{aligned} (c) \quad \tau_{br} &= 200 + 0,8f \sigma_f && (\text{psi}) \\ (\tau_{br} &= 1,38 + 0,8f \sigma_f) && (\text{MN/m}^2)) \end{aligned}$$

Samtidig med at den rette linie således blev løftet og fik en mindre hældning (fra $\tan\psi = 1,4$ til $\tan\psi = 0,8$), blev den øvre grænse for gyldigheden ændret fra $\tau_{br} = 0,2\sigma_c$ til $\tau_{br} = 0,3\sigma_c$.

Mattock [74.4] har senere yderligere hævet linie ved at foreslå

$$\begin{aligned} \tau_{br} &= 400 + 0,8f\sigma_F & (\text{psi}) \\ (d) \quad (\tau_{br} &= 2,76 + 0,8f\sigma_F) & (\text{MN/m}^2) \end{aligned}$$

stadig med øvregrænse på $\tau_{br} = 0,3\sigma_c$, men nu også $f\sigma_F \leq 200 \text{ psi}$ ($1,38 \text{ MN/m}^2$).

Det bemærkes, at (c) og (d) er fremsat uafhængig af betonstyrken, og at flytningen af den rette linie er eksperimentelt begrundet.

En forklaring på flytningen af den rette linie blev først givet af Hermansen og Cowan [74.5], der generelt foreslog

$$(e) \quad \tau_{br} = c + 0,8f\sigma_F$$

Den optrædende størrelse c kaldes den tilsyneladende kohæsion, og (e) kaldes for den modificerede forskydnings-friktionsteori. Betonens bidrag er således c , og Hermansen og Cowan foreslår i øvrigt, at den for urevnede prøvelegemer af typen på fig. 5.6 og for forskydningsbrud i konsoller kan sættes til 4 MN/m^2 uanset betonstyrke.

Hvis vi i (5-51) indfører (2-6), kan den skrives på formen

$$(f) \quad \tau = \nu c + \tan \phi \sigma_F$$

og (e) er således stort set identisk med (5-51).

Forskellen imellem (e) og (d) er ubetydelig, bortset fra, at (d) er fremsat til beregning af revnede tværsnit, medens (e) er fremsat for urevnede tværsnit. Som det fremgår af eksemplerne 5.1 og 5.2 er en ret linie korrekt i et meget stort område for revnede tværsnit, medens det kun er korrekt i et lille område for urevnede tværsnit.

6. KONCENTREREDE BELASTNINGER PÅ UARMERET BETON

6.1 Indledning

I forbindelse med overførelse af belastninger til en konstruktionsdel, vil man ofte komme ud for, at disse skal overføres gennem et begrænset areal, hvorved vi får fænomenet: Koncentrerede belastninger. Et eksempel er vist på fig. 6.1.

Vi vil her begrænse os til at behandle det tilfælde, hvor et uarmeret betonprisme er understøttet på den ene flade, og den koncentrerede belastning angriber på den modstående flade, se fig. 6.2. Sigtet med behandlingen her er at finde en fremgangsmåde til beregning af brudbelastningen for sådanne betonlegemer. Behandlingen vil blive dels en lineærelastisk, dels en stift-plastisk og, der vil, da resultaterne fra disse ikke er anvendelige til bæreevnebestemmelse, blive foreslået nogle empiriske bæreevneformler.

6.2 Lineærelastiske løsninger

Brug af elasticitetsteorien til bæreevnebestemmelse er mulig for et legeme af et materiale, der er lineær-elastisk indtil brud. Hvis dette ikke er tilfældet, vil elasticitetsteorien give sikre værdier for bæreevnen.

Det er velkendt, at der et stykke under den koncentrerede belastning optræder trækspændinger vinkelret på den koncentrerede lasts retning. Hvis disse trækspændinger kan være årsag til brud, d.v.s. hvis (2-10) er opfyldt, er det nærliggende at forsøge at anvende elasticitetsteorien til bæreevnebestemmelse, idet beton

ofte er næsten lineærelastisk til enakset trækbrud, jfr. afsnit 2.4.

Ved plan spændingstilstand kan man indføre Airys spændingsfunktion $\psi(x,y)$, hvor x og y er stedkoordinaterne i et retvinklet koordinatsystem.

Idet der ses bort fra massekræfterne, indføres den således, at

$$(6-1) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

En entydig løsning til et problem med plan spændingstilstand findes ved at tilfredsstille den biharmoniske ligning

$$(6-2) \quad \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0$$

samt de til problemet hørende randbetingelser.

Plan deformationstilstand kan løses på samme måde, blot bestemmes spændingen σ_z vinkelret på den plane deformationstilstand af

$$(6-3) \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

hvor ν er poissons forhold.

Den biharmoniske ligning (6-2) med tilhørende randbetingelser kan kun løses eksakt i få tilfælde, se f.eks. Timoshenko og Goodier [70.2]. Man må derfor ofte ty til tilnærmelsesmetoder, f.eks. rækkeudvikling.

For en halvuendelig skive, belastet på de tre frie sider har Iyengar [60.2], [62.1] og [62.2] angivet en løsning ved hjælp af

Fourier-rækker. Udtrykkene er særdeles komplicerede og vil normalt kræve mulighed for EDB-beregninger for at kunne anvendes.

For en del belastningstilfælde har Iyengar udarbejdet tabeller [60.2] og optegnet kurver [60.2], [62.1] og [62.2].

Det belastningstilfælde, der især har haft forskernes interesse, er en centralt angribende belastning, som vist på fig. 6.3. På figuren er også vist det principielle forløb af spændingen σ_y langs med x-aksen.

En vurdering af bæreevnen efter elasticitetsteorien kan nu foretages ved at sætte $\sigma_{y,max}$ lig med betons trækstyrke σ_t .

Vi vil her se på en forsøgsserie af Rathkjen [73.2], hvor 30 cm terninger på den ene side blev belastet i hele bredden gennem en stålskinne med en bredde på 1 cm. Terningen var understøttet på hele den modstående side. I forsøgsserien varieredes betonstyrken og ståklodsens afstand til terningens kant, se fig. 6.4.

For en sådan belastning har den tværgående spænding σ_y langs den lodrette linie midt under belastningen samme form, som vist på fig. 6.3b.

En bestemmelse af denne efter Iyengars formler er ikke umiddelbart muligt, idet længden af prøvelegemet er begrænset. Fejlen ved at anvende Iyengars formler må imidlertid skønnes at være lille, idet den lodrette spænding med god tilnærmelse er jævnt fordelt for $x = 2b$ ved tilfældet i fig. 6.3. For en enkeltkraft i $(x,y) =$

(0,0) er den maximale forskel på σ_x ca. 4% i snittet med $x = 2b$.

I de tilfælde, hvor belastningen er eksentrisk, er det imidlertid besværligt at finde tværspændingen ved hjælp af Iyengars formler. De spændinger, der skal bruges for at undersøge om elasticitetsteorien kan anvendes til bæreevnebestemmelse, bestemmes derfor ved beregninger efter elementmetoden. Iyengars løsninger kan i en del tilfælde umiddelbart bruges til kontrol af beregningerne.

Elementberegningerne er udført ved hjælp af EDB-programmet ICES STRUDL-II, der er udviklet ved Massachusetts Institute of Technology [71.3]. Beregningerne er udført som plan spændingstilstand med et rektangulært element kaldet type "PSR" i ICES STRUDL-II. Ved beregningerne blev legemet inddelt i 575 elementer med størst tæthed ved den koncentrerede last.

Det vi ved denne beregning er interesseret i er $\sigma_{y,max}$. For en centralt anbragt belastning er i tabel 6.1 foretaget en sammenligning mellem Iyengars værdi for en halvuendelig skive og elementberegningernes for et kvadratisk legeme. Man konstaterer, at den største afvigelse er 10%. D.v.s. Iyengars løsning, som tidligere nævnt, kan anvendes som en god tilnærmelse til at finde $\sigma_{y,max}$.

Guyon [53.1] har angivet en ofte anvendt tilnærmet formel for belastningstilfældet i fig. 6.3. Bestemmelse af $\sigma_{y,max}$ efter denne giver næsten samme værdi som Iyengars løsning.

Ved eksentrisk belastning foreslår Guyon,

at man behandler problemet som ved centralt anbragt belastning, idet man ser bort fra så meget af det påvirkede legeme, at resten bliver centralt belastet, se fig. 6.5.

Idet betegnelserne fra fig. 6.5 er benyttet, er der i tabel 6.2 foretaget en sammenligning mellem elementmetoden og Iyengars løsning. Elementmetoden er anvendt på hele legemet, medens Iyengars løsning er taget fra en centralt påvirket halvuelig skive med bredden $2b$. Værdien $a/B = 1/30$ er valgt, så den er i overensstemmelse med Rathkjens forsøg, fig. 6.4. Man ser af tabellen, at $\sigma_{y,max}$ med god tilnærmelse kan bestemmes ved Iyengars metode for symmetrisk belastning.

Rathkjen har udført sine forsøg med de $\frac{a}{b}$ værdier, der er anvendt i tabel 6.2.

Ved forsøgene er brudkraften P_{br} ved den koncentrerede belastning fundet. Vi definerer nu brudspændingen σ_f som

$$(6-4) \quad \sigma_f = \frac{P_{br}}{f} = \frac{P_{br}}{2a l}$$

hvor f er den koncentrerede belastningsflade. $2a$ og l er dennes udstrækning. I dette tilfælde 1×30 cm.

For at undersøge om det foranstående kan bruges til bæreevnebestemmelse, skal vi altså sammenligne $\frac{\sigma_{y,max}}{\sigma}$ med $\frac{\sigma_t}{\sigma_f}$, hvor σ_t er den anvendte betons trækstyrke.

I tabel 6.3 er fra forsøgene opstillet $\frac{\sigma_t}{\sigma_f}$, hvor σ_t er sat lig med den målte spal-
tetrækstyrke, og i tabel 6.4 er det samme

gjort, blot er σ_t fundet ved den ofte anvendte empiriske formel

$$(6-5) \quad \sigma_t = 1,5 \sqrt{\sigma_c} \quad [\text{kp/cm}^2]$$

En sammenligning af middelværdierne i tabel 6.3 og 6.4 med værdierne i tabel 6.2 viser, at fremgangsmåden ikke kan anvendes til bæreevnebestemmelse. Man ser også, at for små belastningsbredder, d.v.s. små værdier af a/b , giver fremgangsmåden et alt for optimistisk skøn af bæreevnen.

Dette strider øjensynlig imod, at elasticitetsteorien skal give sikre værdier for bæreevnen. En undersøgelse af spændingstilstanden under den lokale belastningsflade i det område, hvor tværspændingerne er trykspændinger, viser da også, at glidningsbrudbetingelsen (2-7) er opfyldt for betydeligt mindre belastninger end adskillelsesbrudbetingelsen.

For at undersøge faren for glidningsbrud anvendes resultaterne fra elementberegningerne. Disse resultater er udregnet under forudsætning af plan spændingstilstand.

Jo nærmere man befinder sig ved den lokale belastningsflade, jo dårligere er denne forudsætning. Det andet grænsetilfælde er plan tøjningstilstand, som man med god tilnærmelse har umiddelbart under belastningsfladen. I dette tilfælde kan den sidste hovedspænding findes analogt med (6-3), nemlig af

$$(6-6) \quad \sigma_3 = v(\sigma_1 + \sigma_2)$$

For v er her anvendt $\frac{1}{6}$, hvilket er en normal anvendt værdi for beton.

Uanset om man regner med plan spændingstilstand eller plan tøjningstilstand, viser det sig, at det er ved samme last, at glidningsbrudbetingelsen netop bliver opfyldt ét sted i snittet midt under den lokale belastningsflade.

På fig. 6.6 er afbildet $\frac{\sigma_f}{\sigma_c}$ som funktion af $\frac{b}{a}$ fra Rathkjens forsøg. Glidningsbrudlasten fundet ved hjælp af elementmetoden er også indtegnet. Denne last er fundet for samme $\frac{b}{a}$ værdier, som der er udført forsøg. Imellem værdierne er indtegnet rette linier. På figuren er også indtegnet "adskillelsesbrudlasten", d.v.s. den last hvor $\sigma_{y,max}$ er lig trækstyrken. For at kunne indtegne denne sammenhæng, er trækstyrken skønsmæssigt sat til $\frac{1}{10}$ af trykstyrken σ_c , og $\sigma_{y,max}$ er taget fra elementberegningerne.

Af figuren ser man bl.a., at for de undersøgte værdier er glidningsbrudbetingelsen altid opfyldt for mindre belastninger end adskillelsesbrudbetingelsen. Ved en koncentreret belastning starter et brud altså ofte som et glidningsbrud. Man ser også, at elasticitetsteorien giver sikre værdier af bæreevnen, når den bliver anvendt som her.

Alt i alt må det imidlertid konstateres, at man ikke med elasticitetsteorien er i stand til at bestemme bæreevnen særlig nøjagtig.

Lignende betagninger som er gjort her, har Jensen og Nielsen [75.2] gjort ved spalteforsøget. Også der finder man, at bruddet ofte indledes med glidningsbrud

når belastningsstrimlerne, således at spalteforsøget ikke kan siges at være særlige velegnet til at bestemme betons trækstyrke.

6.3 Plastiske løsninger

I dette afsnit vil vi se på muligheden af en beregning af bæreevnen, når beton betragtes som et stift plastisk materiale. Vi vil som i de foregående kapitler koncentrere os om øvreværdiløsninger, idet der vil blive brugt brudfigurer, som stort set svarer til observerede brudfigurer.

I modsætning til de elastiske løsninger, vil vi her se på såvel plane som rumlige brudproblemer.

6.3.1 Plane brudfigurer

Vi betragter først en plan brudfigur, som vist på fig. 6.7. Brudfiguren svarer til en ofte observeret brudform, der kaldes spaltebrud.

Kilen, der dannes umiddelbart under den koncentrerede last, bevæges nedad, og de resterende to dele af prismet bevæges ud til siderne. Derved har vi et glidningsbrud langs kilens sider og et adskillelsesbrud langs den lodrette linie.

Antager vi, at kilens topvinkel er 2β , og at den relative bevægelse V langs kilens sider danner vinklen φ (= friktionsvinklen) med denne, får man det på fig. 6.8 viste forhold mellem bevægelserne. I figuren er V_1 kilens lodrette bevægelse og $2V_2$ er den samlede vandrette bevægelse i

den lodrette diskontinuitetslinie. Af figuren findes umiddelbart denne sammenhæng imellem bevægelserne:

$$\begin{aligned} V_1 &= V \cos (\beta + \varphi) \\ (6-7) \quad V_2 &= V \sin (\beta + \varphi) \end{aligned}$$

Vi vil først se på det tilfælde, hvor betons trækstyrke er 0, d.v.s. at der ikke er noget bidrag til det indre arbejde langs den lodrette linie.

Det ydre arbejde bliver

$$(6-8) \quad A_y = \sigma_f 2a V \cos (\beta + \varphi)$$

Det indre arbejde findes v.h.a. (3-39), og idet $\alpha = \varphi$ findes:

$$(6-9) \quad A_i = \frac{1 - \sin \varphi}{2} \sigma_c \frac{2a}{\sin \beta} V$$

Heraf findes øvre værdien

$$(6-10) \quad \sigma_f = \frac{1 - \sin \varphi}{2 \cos (\beta + \varphi) \sin \beta} \sigma_c$$

Man finder, at (6-10) har minimum for $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, og at minimum bliver $\sigma_f = \sigma_c$. Denne bæreevne er i øvrigt en eksakt løsning, idet man let kan konstruere en tilladelig spændingsfordeling, der giver samme bæreevne, se fig. 6.9.

For at finde en bæreevne, der er større end den enaksede trykstyrke, er det altså nødvendigt at medregne trækstyrken. I dette tilfælde bestemmes det ydre arbejde stadig af (6-8). Det indre arbejde findes af (3-39), idet vi har $\alpha = \varphi$ langs kilens si-

der og $\alpha = \frac{\pi}{2}$ langs den lodrette diskontinuitetslinie.

$$(6-11) \quad A_i = \sigma_t (H - a \cot \beta) 2 V \sin(\beta + \varphi) + \frac{1 - \sin \varphi}{2} \sigma_c \frac{2a}{\sin \beta} V$$

Af (6-8) og (6-11) finder man

$$(6-12) \quad \sigma_f = \frac{\frac{1}{2}(1 - \sin \varphi) \sigma_c + \sin(\beta + \varphi) \left(\frac{H}{a} \sin \beta - \cos \beta \right) \sigma_t}{\sin \beta \cos(\beta + \varphi)}$$

(6-12) kan vises at have minimum for

$$(6-13) \quad \cot \beta = \tan \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{1 + \frac{\frac{H}{a} \cos \varphi}{\frac{\sigma_c}{\sigma_t} \left(\frac{1 - \sin \varphi}{2} \right) - \sin \varphi}}$$

hvorefter (6-12) kan skrives som

$$(6-14) \quad \sigma_f = \sigma_t \left(\frac{H}{a} \tan(2\beta + \varphi) - 1 \right)$$

Formlerne (6-12) - (6-14) er fundet af Chen og Drucker [69.2], som samtidig nævner, at V , som det her er gjort, skal danne vinklen φ med den skrå diskontinuitetslinie, for at man får minimum.

Ovenstående formler er uafhængige af afstanden fra belastningen til prismets kant. Bliver denne afstand imidlertid tilstrækkelig lille, bliver en anden brudfigur aktuell, se fig. 6.10. Også denne afskalling kendes fra forsøg.

Med betegnelserne i fig. 6.10 finder man

$$(6-15) \quad A_y = \sigma_f 2a V \cos(\beta + \varphi)$$

$$(6-16) \quad A_i = \frac{1 - \sin \varphi}{2} \sigma_c \frac{b+a}{\sin \beta} V$$

hvilket giver øvre værdien

$$(6-17) \quad \sigma_f = \frac{(1-\sin\varphi)(b+a)}{4 \sin\beta \cos(\beta+\varphi)a} \sigma_c$$

Minimum findes for $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ til

$$(6-18) \quad \sigma_f = \frac{b+a}{2a} \sigma_c$$

Man ser, at (6-18) logisk nok giver en kraft svarende til en belastning på σ_c over hele det areal, der brydes af.

I fig. 6.11 er (6-10) og (6-18) sammenlignet med Rathkjens forsøg. Til brug i (6-10) er trækstyrken σ_t sat til $\frac{1}{10}$ af trykstyrken σ_c , og φ er sat til 37° .

Man ser af figuren, at en bæreevnebestemmelse efter plasticitetsteorien ikke umiddelbart er mulig. For brudfiguren i fig. 6.7 er det let forståeligt, at bæreevnen ikke kan beregnes på denne måde, idet hele den lodrette brudflade er regnet fuldt aktiv, skønt adskillelsesbrud i regel kun er ganske lidt plastisk.

Det kan nu overvejes at indføre effektivitetskoefficienter v , som det er gjort i kapitel 5. Man kan imidlertid se, at det giver en koefficient, der er afhængig af bl.a. afstanden fra b . I brudfiguren på fig. 6.10 skal v f.eks. være 1, når $b = a$, hvorefter den aftager for voksende $\frac{b}{a}$. For brudfiguren i fig. 6.7 kan man formodentlig nøjes med en effektivitetskoefficient for adskillelsesbruddet. Denne viser sig muligvis også at være afhængig af $\frac{b}{a}$. En indflydelse fra højden H må også forventes, især ved mindre højder.

Man må altså regne med at skulle anvende

forskellige effektivitetskoefficienter, der er afhængige af forskellige parametre, hvis man vil bruge den her skitserede plastiske beregning til bæreevnebestemmelse. For det betragtede simple planeproblem kan det dog ikke udelukkes, at fremgangsmåden kan være anvendelig.

6.3.2 Rumlige brudfigurer

Vi betragter nu et prismatisk betonlegeme med en kvadratisk overside. Prismet belastes centralt over et kvadratisk areal med belastningen σ , se fig. 6.12.

Brudfiguren, vi vil anvende, er en pyramide, der trykkes ned i det spaltende prisme, se fig. 6.12. Der er altså glidningsbrud langs pyramidens fire sider, medens de øvrige brudflader stammer fra adskillelsesbrud. Den indbyrdes sammenhæng mellem bevægelserne fremgår af fig. 6.13. Det er her antaget, at V danner vinklen φ med pyramidens sider.

Man får

$$V_1 = V \cos (\beta + \varphi)$$

$$(6-19) \quad V_2 = V \sin (\beta + \varphi)$$

$$V_3 = \sqrt{2} V \sin (\beta + \varphi)$$

Arealet med glidningsbrud findes til

$$(6-20) \quad F_1 = 4 \frac{a^2}{\sin \beta}$$

Arealet med adskillelsesbrud

$$(6-21) \quad F_2 = 4 \left[\sqrt{2} b H - \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \cot \beta \right]$$

Det ydre arbejde bliver

$$(6-22) \quad A_y = \sigma_f 4a^2 V \cos(\beta + \varphi)$$

Og det indre arbejde bliver

$$(6-23) \quad A_i = \left(\frac{1 - \sin \varphi}{2} \sigma_c F_1 + \sigma_t F_2 \sqrt{2} \sin(\beta + \varphi) \right) V$$

Af $A_y = A_i$ og ved indsættelse af (6-20) og (6-21) finder man øvre værdien

$$(6-24) \quad \sigma_f = \frac{\frac{1}{2}(1 - \sin \varphi) \sigma_c + \sin(\beta + \varphi) \left(\frac{2Hb}{a^2} \sin \beta - \cos \beta \right) \sigma_t}{\sin \beta \cos(\beta + \varphi)}$$

Denne ligning er helt analog med (6-12), således at minimum findes for

$$(6-25) \quad \cot \beta = \tan \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{1 + \frac{\frac{2Hb}{a^2} \cos \varphi}{\frac{\sigma_c}{\sigma_t} \left(\frac{1 - \sin \varphi}{2} \right) - \sin \varphi}}$$

Minimum bliver dermed

$$(6-26) \quad \sigma_f = \sigma_t \left(\frac{2Hb}{a^2} \tan(2\beta + \varphi) - 1 \right)$$

Denne løsning er ligesom den tilsvarende plane løsning fundet af Chen og Drucker [69.2].

Samme type brudfigur kan anvendes ved andre ikke symmetriske placeringer af belastningerne, som vist på fig. 6.14. Med de betegnelser, der er anvendt i fig. 6.14, skal faktoren $\frac{2Hb}{a^2}$ i (6-25) og (6-26) ændres til $\frac{H(c+b)}{a^2}$.

På fig. 6.15 er vist en brudfigur, hvor der ved et glidningsbrud afskaller en skæv pyramide, medens resten af legemet spalter ved adskillelsesbrud.

For denne brudfigur kan det vises, at med betegnelserne i fig. 6.15 bliver ligningerne der svarer til (6-24), (6-25) og (6-26)

$$(6-27) \quad \sigma_f = \frac{b^2}{4a^2} \cdot$$

$$\frac{\frac{1}{2}(1-\sin\varphi)\sigma_c + \sin(\beta+\varphi)\left(\frac{2Hc}{b^2} \sin\beta - \cos\beta\right)\sigma_t}{\sin\beta \cos(\beta+\varphi)}$$

$$(6-28) \quad \cot\beta = \tan\varphi + \frac{1}{\cos\varphi} \sqrt{1 + \frac{\frac{2Hc}{b^2} \cos\varphi}{\frac{\sigma_c}{\sigma_t} \left(\frac{1-\sin\varphi}{2}\right) - \sin\varphi}}$$

$$(6-29) \quad \sigma_f = \frac{b^2}{4a^2} \sigma_t \left(\frac{2Hc}{b^2} \tan(2\beta+\varphi) - 1\right)$$

Man ser, som rimeligt er, at brudkraften $P_{br} = \sigma_f 4a^2$ er uafhængig af det belastede areals størrelse, når blot det ligger inde på den skæve pyramide, der skaller af.

Endnu en geometrisk mulig brudfigur skal omtales. Det er en hjørne, der går af ved et glidningsbrud, fig. 6.16, analogt med det plane tilfælde i fig. 6.10. Som ved fig. 6.10 svarer brudkraften til en belastning på σ_c over det areal, der brydes af. Brudkraften bliver således

$$(6-31) \quad P_{br} = \frac{1}{2}b^2 \sigma_c$$

Kun en enkelt af de heri gennemregnede brudfigurer skal sammenlignes med forsøg. Au og Baird [60.2] har udført forsøg med en belastning, der svarer til fig. 6.12. Ved forsøgene var $2b = H = 8$ in, medens $\frac{b^2}{a^2}$ varierede fra 2 til 16. Der udførtes to serier med cylindertrykstyrken 55,5 MN/m² og 31,0 MN/m².

Forsøgsresultaterne er i tabel 6.5 sammenlignet med (6-25) og (6-26). Trækstyrken er skønnet ved hjælp af (6-5). Et $\div$ i tabellen angiver, at mekanismen ikke kan dannes, idet pyramidens højde ved beregningerne viser sig at være større end H.

Man ser, at som i det plane tilfælde giver teorien for stor bæreevne, hvilket igen skyldes, at alle brudflader er regnet fuldt aktive.

Indførelse af effektivitetskoefficienter kan måske anvendes ved de rumlige brudfigurer. Arbejdet med at undersøge og eventuelt at finde disse bliver imidlertid meget stort, idet der som vist er mange brudfigurer, der alle i princippet observeres ved forsøg.

Man må også være opmærksom på, at næppe alle belastningstilfælde kan klares ved de her gennemregnede brudfigurer, hvorfor det kan blive nødvendigt at finde andre brudfigurer, og eventuelt at supplere med empiriske formler.

6.4 Empiriske løsninger

Empiriske formler til bestemmelse af bæreevnen kan føres tilbage til 1876, hvor den store tyske materialeforsker Bauschinger [1876.1] udførte forsøg med sandstensprismer. På baggrund af forsøg med centralt belastede prismer foreslog Bauschinger formler

$$(6-31) \quad \sigma_f = \sigma_F \sqrt[3]{\frac{F}{f}}$$

Her er σ_F brudspændingen, når hele pris-

mets areal F belastes. σ_f er brudkraften fordelt over det belastede areal f . Drejer det sig om terninger, er σ_f altså lig med terningsstyrken.

For ikke centrale belastninger angiver Bauschinger, at formelen kan anvendes, hvis man til F medregner et areal, der svarer til central belastning, se fig. 6.17.

For beton er formelen bekræftet af Graf [21.1], og den har været med i de danske normer for betonkonstruktioner siden 1930. I vejledningen til de nugældende normer anvendes σ_c i stedet for σ_f , og man foreskriver $\sigma_f \leq 2 \sigma_c$.

Forsøg viser, at for store værdier af $\frac{F}{f}$ giver (6-31) for små værdier af σ_f . Et forhold som fik Wästlund [34.1] til at anbefale

$$(6-32) \quad \sigma_f = 0,765 \sigma_T \sqrt{\frac{F}{f}} \quad \text{for } \frac{F}{f} > 5$$

Der har været foreslået mange forskellige formler til bestemmelse af σ_f . En gennemgang af en del af disse findes hos Jensen [73.3], hvor forfatteren selv foreslår formelen

$$(6-33) \quad \frac{\sigma_f}{\sigma_c} = 0,2 + 0,8 \sqrt{\frac{F}{f}} \quad \frac{F}{f} \leq 180$$

Formlen er fremkommet ved en regressionsanalyse af mange forsøg med meget forskellig form og placering af arealet f . I alle tilfælde var prøvelegemerne terningformede eller havde en højde på $1\frac{1}{2}$ gange sidelængden, idet grundfladen var kvadratisk.

Ved ikke centrale belastninger bestemmes F også her som vist på fig. 6.17.

I (6-33) har vi altså én formel, der skal dække mange faktorerers indflydelse på bæreevnen. På fig. 6.18 er formelen sammenlignet med 64 forsøg af Hawkins [68.2]. Disse forsøg har ikke været med ved opstilling af (6-33). Man ser, at formelen giver rimelige resultater; men det ses også, at der er stor spredning på forsøgsresultaterne.

Den store spredning skyldes væsentligst to ting, som (6-33) ikke tager hensyn til.

Den ene er, at formelen forudsiger samme $\frac{\sigma_f}{\sigma_c}$ ved de to tilfælde, der er vist i fig. 6.19. Forsøg viser, at $\frac{\sigma_f}{\sigma_c}$ bliver størst ved belastningstilfældet på fig. 6.19b.

Det andet forhold er, at $\frac{\sigma_f}{\sigma_c}$ øges mere for svag beton end for stærk beton, jfr. tabel 6.5.

På trods af disse ulemper må det dog siges, at (6-33) giver en anvendelig forudsigelse af bæreevnen. Anvendelse af (6-33) skal ske under hensyntagen til, at en forøgelse af bæreevnen ud over σ_c forudsætter tilstedeværelse af en trækstyrke i betonen under belastningen. Yderligere skal man som før nævnt være opmærksom på, at i meget stærk beton øges $\frac{\sigma_f}{\sigma_c}$ ikke helt så meget som (6-33) forudsiger, hvorimod man ved svag beton får en større forøgelse. For de normalt anvendte betonstyrker ($\sigma_c \sim 15-40 \text{ MN/m}^2$) er formelen umiddelbart anvendelig.

Grænsen $\sigma_f \leq 2\sigma_c$, som er anbefalet i vejledningen til DS411, Dansk Ingeniørforenings norm for Betonkonstruktioner, 1973 (betonnormen), er imidlertid meget konservativ. Som en forsigtig øvre grænse foreslås $\sigma_f \leq 5\sigma_c$, svarende til $\frac{F}{F} = 36$ i (6-33).

6.4.1 Højdens betydning

I såvel (6-33) som i de øvrige nævnte empiriske formler er der ikke taget hensyn til højden af det belastede legeme. (6-33) er opstillet primært for kubeformede prøvelegemer. For større højder på prøvelegemet er formlen også anvendelig.

For et kubeformet prøvelegeme belastet helt på to modstående sider ($\frac{F}{F} = 1$), giver (6-33) at $\sigma_f = \sigma_c$. Sådant et forsøg svarer imidlertid til at finde terningstyrken σ_T , der er ca. $1,25\sigma_c$. Når (6-33) imidlertid giver $\sigma_f = \sigma_c$, skyldes det, at kurven ved regressionsanalysen er tvunget igennem dette punkt, se [73.3]. Herved er bl.a. opnået, at man får $\sigma_f = \sigma_c$, når belastningen ligger ved en kant, som vist på fig. 6.20.

Ved meget store højder kan der opstå det problem, at man ikke kan opnå $\sigma_f = \sigma_c$ for $\frac{F}{F} = 1$, se eksempel 6.1.

For højder der er mindre end den, der svarer til kubeformede prøvelegemer, findes der forsøgsresultater, der både viser, at σ_f stiger, og at σ_f falder med aftagende højde. På fig. 6.21 og i tabel 6.6 er hovedresultaterne af 4 forsøgsserier vist. Gennemlæsning af de 4 referencer i tabel 6.6 giver ikke et grundlag til at bedømme

nogle af forsøgsserierne som mere troværdige end andre.

Det må således konstateres, at der hersker stor usikkerhed om betydningen af små højder af det belastede legeme. Hvis man fastsætter nogle regler, der tager hensyn til højden, og som ikke er i modstrid med forsøgsresultaterne i [53.2] og [73.4], skulle man få regler, der giver sikre værdier for bæreevnen ved små højder.

I vejledningen til betonnormen er som tidligere nævnt foreslået (6-31), hvor σ_F er sat til σ_c . Heri er også foreslået en fremgangsmåde til bestemmelse af F . Fremgangsmåden er ensbetydende med at finde det centralt belastede areal, der fremkommer ved afskæring med linier med hældningen 1:2. Nogle eksempler er vist på fig. 6.22. I tabel 6.6 er der ikke taget hensyn til højden ved bestemmelse af F i kolonnen $\frac{F}{f}$.

På fig. 6.23 er reglen brugt sammen med (6-33) og sammenlignet med forsøgene fra [53.2]. Forsøgene var af type B, jfr. fig. 6.21, og $2b = 6$ in. Resultaterne ligger over formlens værdi; men for aftagende $\frac{H}{2b}$ aftager styrken på en måde, der passer med normens regler.

På fig. 6.24 er der foretaget en tilsvarende sammenligning med 4 serier fra [73.4]. Forsøgene var alle af type A, jfr. fig. 6.21, og $2b = 200$ mm. I serie 1 var $f = 10 \times 10$ cm, i serie 2 og 4 var $f = 7 \times 7$ cm og i serie 3, var $f = 5 \times 5$ cm. Man ser, at (6-33) sammen med normens regler for bestemmelse af F giver udmærkede værdier.

6.5 Konklusion

På baggrund af den foranstående gennemgang kan der konkluderes, at elasticitetsteorien ikke er anvendelig til bæreevnebestemmelse ved koncentrerede belastninger. Teorien for stift plastiske materialer kan måske anvendes i en del tilfælde. En mulig anvendelse af denne vil kræve anvendelse af en effektivitetskoeficient $\nu < 1$, i lighed med den der er indført i kapitel 5.

Man er i dag henvist til at bruge empiriske formler til bestemmelse af bæreevnen. En særdeles anvendelig formel er i denne forbindelse (6-33). Det i formelen anvendte areal F bestemmes som det centralt belastede areal, der kan findes ved fra randen af f at trække linier med hældningen 1:2 til skæring med side eller underkant af det belastede legeme.

Eksempel 6.1. Etagekryds

På fig. 6.25 er vist princippet i et etagekryds fra det præfabrikerede betonelementbyggeri. Nederst et vægelement, der understøtter to dækelementer. Imellem dækelementerne er udstøbt med fugebeton, og ovenpå er der anbragt endnu et vægelement, som er understøttet med mørtel.

Normalt kan man ikke regne med at fugebetonen sikrer kontakt imellem dækelementer og det nederste vægelement. Dækelementet understøttes derfor ikke overalt, så overførelse af lodrette trykkræfter bør antages kun at ske gennem fugebetonen. På denne måde har man en koncentreret belastning på det nederste vægelement.

Dækelementerne kan være ret afskårne ved enderne, f.eks. de såkaldte Spirol-dæk, hvor bredden a er veldefineret. Det kan også være de velkendte elementer med knaster, hvor bredden a varierer langs etagekrydset. I det følgende vil vi i dette tilfælde lade a betegne den gennemsnitlige bredde af fugebetonen.

Forsøg har vist, at man med $a = t$ ikke kan opnå en bæreevne, hvor $\sigma_f = \sigma_c$. Den enaksede trykstyrke synes at ligge på omkring 75% af cylinderstyrken.

For at beregne bæreevnen af et etagekryds ved hjælp af (6-33) skal man altså anvende $0,75\sigma_c$ i stedet for σ_c . Desuden har man

$$(a) \quad \frac{F}{f} = \frac{t}{a}$$

$$(b) \quad \sigma_f = \frac{P_{br}}{la}$$

hvor l er længden af et etagekryds.

Indsættes disse udtryk i (6-33), findes bæreevnen ved omskrivning til

(c)

$$\frac{P_{br}}{t l \sigma_c} = 0,15 \frac{a}{t} + 0,6 \sqrt{\frac{a}{t}}$$

Der er udført en del forsøg til bestemmelse af bæreevnen af etagekrydset. Buhelt m.fl. [76.1] har optegnet resultaterne, og de er gengivet her på fig. 6.26, hvor også (c) er indtegnet. σ_c er den målte cylindertrykstyrke for betonen i vægelementet. Overensstemmelsen mellem (c) og forsøgene ses at være god.

$\frac{a}{t} = 1,0$ er opnået ved at sikre fuld underløbning af dækelementerne ved udstøbning

af fugebetonen. I et enkelt tilfælde er dog anvendt et gennemgående dækelement.

Man ser således, at (c) er en anvendelig formel til bæreevnebestemmelse for eta-gekrydset. Det bemærkes i øvrigt, at den gennemsnitlige bredde a , der er anvendt ved knastelementer, kun er anvendt for at lette ved opstilling af (c) og optegning af fig. 6.26. Uanset om man anvender den gennemsnitlige a eller den korrekte form af arealet f , bliver $\frac{F}{f}$ det samme.

Eksempel 6.2. Bøjlesamling

Vi betragter nu det på fig. 6.27 viste jernbetonlegeme, der påvirkes til træk. Trækket påføres legemet via armeringsbøjlerne, og skal i midten af legemet overføres fra det ene sæt bøjler til det andet gennem betonen.

Brud i prøvelegemet kan indtræde på to måder, enten ved brud i armeringen, eller som brud (spaltebrud) i betonen imellem de modstående bøjler. Vi vil her undersøge, om (6-33) kan anvendes til at forudsige den belastning, ved hvilken der sker spaltebrud i betonen imellem bøjlerne. De foretagne beregninger vil blive sammenlignet med forsøg af Leonhardt m.fl. [73.5].

Vi vil begrænse undersøgelsen til det tilfælde, hvor der er en cirkulær lysning imellem bøjlerne. På fig. 6.28 er en bøjle med trækkræfterne T optegnet. Betonen antages at virke med et konstant tryk σ imod bøjlen. Sammenhængen mellem σ og T findes til

$$(a) \quad \sigma = \frac{2T}{dD}$$

For at der ikke skal ske spaltebrud i betonen, skal der gælde

$$(b) \quad T_{br} < \frac{\sigma_f d D}{2}$$

hvor σ_f er brudspændingen ved den koncentrerede påvirkning.

De forsøg vi vil sammenligne beregningerne her med, resulterede alle i spaltebrud. Vi skal altså finde σ af (a) for den kraft, hvor bruddet skedte, og sammenligne med den σ_f , som er bestemt af (6-33).

I (6-33) kendes

$$(c) \quad f = d D$$

hvilket svarer til en projektion af σ på diameteren i lysningen imellem bøjlerne.

Bestemmelse af F er lidt vanskeligere; men vi vil anvende reglen om fordelingslinier med hældningen 1:2, hvorefter vi kan dele behandlingen op i tre tilfælde.

1. F begrænses af modstående bøjle.

Hermed menes, at det areal, man finder ved afskæring med linier med hældning 1:2, møder det, man får fra den modstående bøjle, som vist på fig. 6.29.

Fig. 6.29a viser et snit i midten af bøjlesamlingen med fordelingslinier 1:2. Det fælles stykke af de to arealer man finder, er karakteriseret af længden B , der findes til

$$(d) \quad B = \frac{1}{2}(D + d)$$

Sådanne linier skal trækkes fra kanten af

armeringen hele vejen rundt. F bliver dermed det areal, man får ved at trække fordelingslinier fra en halvcirkel (fig. 6.29b) med diameter $D + d$. Fig. 6.29c viser F, der har samme areal som halvcirklen i fig. 6.29b.

$$(e) \quad F = \frac{\pi}{8} (D + d)^2$$

For den koncentrerede belastning fås nu

$$(f) \quad \frac{\sigma_f}{\sigma_c} = 0,2 + 0,4(D + d) \sqrt{\frac{\pi}{2dD}}$$

I tabel 6.7 er (f) sammenlignet med fire forsøg fra [73.5], hvor de to sæt bøjler var placeret sådan, at F kan bestemmes på den her foreskrevne måde. Ved forsøgene er terningstyrken for beton målt. Cylinderstyrken er sat til 80% af terningstyrken. De anvendte forsøgsnumre refererer til numrene i [73.5].

Man ser, at overensstemmelsen er rimelig god.

2. F begrænses af fri side.

Dette tilfælde opstår, når bøjlerne er anbragt så tæt ved overfladen, at fordelingslinien skærer den fri side, som vist på fig. 6.30a. Figuren er et snit midt i bøjlesamlingen, og det stykke, man finder, er karakteriseret af længden

$$(g) \quad B = 2a$$

hvor a er afstanden indtil centrum af den yderste bøjle.

Fjerner man sig fra midten af bøjlesamlingen, bliver afstanden mellem de to bøjler

mindre end D , og på et tidspunkt vil fordelingslinierne ikke mere skære den fri side, før de møder de tilsvarende linier fra den modstående bøjle, se fig. 6.30b. F bliver på denne måde arealet af en halvcirkel med diameter $D + d$, men minus et cirkelafsnit med pilhøjden $\frac{1}{2}(D + d) - B$. Kun et enkelt af forsøgene i [73.5] svarede til dette tilfælde. Forsøget var C3, og det gav $\sigma_{f, \text{forsøg}} = 41,9 \text{ N/mm}^2$ og $\sigma_{f, \text{teori}} = 48,7 \text{ N/mm}^2$, altså også her en rimelig overensstemmelse.

3. F begrænses af modstående bøjler og nærliggende bøjlesæt.

Vi ser nu på det tilfælde, hvor to sæt bøjler er anbragt så tæt ved hinanden, at F begrænses ved at fordelingslinierne fra en bøjle møder fordelingslinierne fra en nabobøjle, før den møder dem fra den modstående bøjle. Fig. 6.31a viser et midtersnit for et sådant tilfælde.

Man har her to koncentrerede belastninger, der virker sammen. Bestemmelse af f og F er derfor ikke så enkelt som i de foregående tilfælde. En fremgangsmåde kunne f.eks. være at sætte f til $2dD$ og lade F være hele det fælles areal, der fremkommer ved afskæring med linier fra alle 4 bøjler med hældning 1:2.

Bidraget til F kan deles op i to dele. Bidraget til venstre for linien AA og til højre for linien BB, se fig. 6.31, udgør tilsammen et bidrag analogt med tilfælde 1. Det giver altså arealet af en halvcirkel med diameter $D + d$.

Bidraget imellem linie AA og BB er analogt

til tilfælde B, idet man får

$$(h) \quad B = e + d$$

Bidraget bliver altså en halvcirkel med diameter $D + d$ minus arealet af et cirkelafsnit med pilhøjden $\frac{1}{2}(D + d) - (e + d)$.

I tabel 6.8 er sammenlignet med forsøgsresultater fra [73.5], og man ser, at man generelt finder lidt for store værdier ved den her anvendte fremgangsmåde.

De her foretagne beregninger tyder på, at bøjlesamlingers trækstyrke i en del tilfælde kan bestemmes ud fra (6-33) og reglen om fordelingslinier med hældning 1:2. Det skal dog understreges, at forsøgsmaterialet er lille, og at anvendelse af fremgangsmåden bør belyses yderligere.

7. KONCENTREREDE BELASTNINGER PÅ ARMEREDE BETONPRISMER

7.1 Indledning

Vi vil i dette kapitel se på et problem, der er beslægtet med det fra kapitel 6. I dette tilfælde er der imidlertid kun tale om en linielast, d.v.s. et plant problem. I betonprismet er der armering vinkelret på belastningens virkeretning, og det er virkningen af denne armering, vi her vil prøve at se på.

De betragtninger og beregninger, der vil blive foretaget, vil blive sammenlignet med forsøg udført ved Instituttet for Husbygning [75.4]. Forsøgene blev udført med 20 x 20 x 40 cm prizmer med variabel betonstyrke. Til armering anvendtes bøjler med en udformning, som vist på fig. 7.1. Antallet af bøjler og deres afstand til overkanten af prismet varieredes. Der blev anvendt bøjler af såvel tentorstål som rundstål.

Ved forsøgene var $\frac{F}{F} = 5,0$.

7.2 Gunstig placering af armering

Vi betragter den samme brudfigur som ved uarmerede prizmer, fig. 7.2. Den indbyrdes sammenhæng mellem bevægelserne i brudfiguren fremgår af fig. 7.2, og den findes som i afsnit 6.3.1 til

$$(7-1) \quad V_1 = V \cos (\beta + \varphi)$$

$$(7-2) \quad V_2 = V \sin (\beta + \varphi)$$

Den tværgående armering anbringes vinkelret på V_1 . Hvis den anbringes så langt

nede, at den ligger i området med adskillelsesbrud, vil dens bidrag til arbejds-ligningen blive

$$(7-3) \quad W_{IR} = F \sigma_F 2V_2 = F \sigma_F 2V \sin(\beta + \varphi)$$

hvor F er armeringens tværsnits areal, og σ_F er dens flydespænding.

Vi gør den sædvanlige antagelse, at der kun kan optages kræfter i armeringen i dennes længderetning. Det betyder imidlertid, at armering, der er anbragt så højt oppe imod belastningen, at den går gennem de to glidebrudsflader, også vil give et bidrag til det indre arbejde, der er givet ved (7-3). Bevægelsen i armeringens længderetning bliver nemlig den vandrette projektion af V , der er lig med V_2 .

For brudbæreevnen er det altså uden betydning, hvor langt nede armeringen er anbragt. Denne konklusion må naturligvis tages med noget forbehold, idet tværarmering langt nede vil være uvirksom. Det vi taler om her, er armering nær den lokale belastning. Det interessante er imidlertid, at armering anbragt i den zone, hvor der efter elasticitetsteorien er tværgående tryk, se fig. 6.3, vil være lige så effektiv, som armering anbragt i zonen med tværgående træk.

Til illustration af dette er nogle forsøgsresultater vist på fig. 7.3. Ved forsøgene var den tværgående armering 3 stk. R10. Betonen var ved alle forsøg fra samme blanding med $\sigma_c = 31,8 \text{ MN/m}^2$. Afstanden er målt fra armeringens centrum til prismets overside.

Man ser, at brudbæreevnen stort set er ens for de tre dæklagstykker.

En elastisk beregning efter Iyengars metode viser, at maximalt træk findes 70 mm nede i prismet, og at overgangen mellem træk og tryk findes 28 mm nede. Forsøg med den tværgående armering placeret helt i den elasticitetsteoretiske trykzone mangler altså. Forsøgene viser imidlertid, at armering placeret der, hvor elasticitetsteorien siger, at der ikke er nogle tværspændinger, (28 mm ~ 30 mm), er lige så effektiv, som armering placeret i området med store tværtrækspændinger.

Forsøg med 4 stk. R10 med afstanden til armeringscentrum på 30 og 60 mm viser samme billede, hvilket ses af fig. 7.4. Ved forsøgene med afstanden 30 mm var $\sigma_c = 28,3 \text{ MN/m}^2$, og ved de andre var $\sigma_c = 31,9 \text{ MN/m}^2$.

Ved forsøgene i [75.4] observeredes også revnelasten. Den første revne, der kunne observeres, var altid en del af adskillelsesrevnen midt under belastningen.

Efter at det ikke plastiske adskillelsesbrud er indtrådt, kan belastningen stadig øges på grund af det plastiske glidningsbrud og armeringen.

Betydningen af armeringens placering for revnelasten er vist på fig. 7.5. Efter elasticitetsteorien forekommer det største træk i en dybde på 70 mm; men forsøgene tyder ikke på, at armering anbragt andre steder i området med træk har mindre indflydelse på revnelasten. Selv armering anbragt på det sted, hvor elasticitetsteorien forudsiger ingen tværspændinger, giver samme revnelast.

På baggrund af ovenstående kan man altså sige, at afstanden ned til tværarmeringen ikke har nogen indflydelse på bæreeven eller revnelasten. Konklusionen bygger på forsøg, hvor man dog mangler nogle med tværarmering meget nær den lokale belastning, d.v.s. inde i det område, hvor elasticitetsteorien forudsiger et tværgående tryk. Armering anbragt der vil formentlig være lige så effektiv, når det drejer sig om brudbæreevnen, hvorimod det ikke kan udelukkes, at revnelasten vil blive mindre.

7.3 Bæreevnebestemmelse

Vi vil her foretage en bæreevneberegning ud fra brudfiguren i fig. 7.2, idet vi gør den antagelse, at det lodrette adskillelsesbrud ikke bidrager til bæreevnen. Denne antagelse er ensbetydende med, at adskillelsesbruddet antages at være indtrådt, før det totale brud indtræder. Dette brud antages derimod at være stiftplastisk.

Arbejdsligningen opskrives, og bidraget til det indre arbejde fra armeringen er uanset placering givet ved (7-3). Bidraget fra glidningsbruddet i betonen bliver

$$(7-4) \quad W_{IC} = \frac{1-\sin\phi}{2} \sigma_c \frac{2a l}{\sin\beta} V$$

hvor a er den halve belastningsbrødd, og l er belastningslængden vinkelret på papirets plan. Det ydre arbejde bliver

$$(7-5) \quad W_E = 2a l \sigma_f \cos(\beta+\phi) V$$

$$W_E = W_{IR} + W_{IC} \quad \text{giver øvreverdien}$$

$$(7-6) \quad \sigma_f = \frac{2 F \sigma_F \sin(\beta+\varphi) \sin\beta + (1-\sin\varphi) a l \sigma_c}{2 a l \cos(\beta+\varphi) \sin\beta}$$

Vi kan nu indføre en armeringsgrad som

$$(7-7) \quad \Phi = \frac{\sigma_F F}{2 a l \sigma_c}$$

Herefter kan (7-6) skrives som

$$(7-8) \quad \frac{\sigma_f}{\sigma_c} = \frac{4\Phi \sin(\beta+\varphi) \sin\beta + (1-\sin\varphi)}{2 \cos(\beta+\varphi) \sin\beta}$$

Minimum for (7-8) findes for

$$(7-9) \quad \tan\beta = \frac{-\sin\varphi + \sqrt{1 + \frac{4\Phi \cos\varphi}{1-\sin\varphi}}}{\frac{4\Phi}{1-\sin\varphi} + \cos\varphi}$$

Sættes $\Phi = 0$ giver (7-8) naturligvis samme resultat som (6-10), hvor trækstyrken er sat til nul i et uarmeret prisme.

(7-8) og (7-9) er første gang udledt i [75.4].

Indsætter vi $\varphi = 37^\circ$ og omskriver (7-8), finder vi bæreevnen til

$$(7-10) \quad \frac{\sigma_f}{\sigma_c} = \frac{0,4 + 2\Phi(0,8 - \cos(2\beta+\varphi))}{\sin(2\beta+\varphi) - 0,6}$$

hvor man har

$$(7-11) \quad \tan\beta = \frac{-0,6 + \sqrt{1 + 8\Phi}}{10\Phi + 0,8}$$

Hvis armeringsgraden Φ er meget lille, vil armeringen rives over, i det øjeblik revnelasten opnås. Vi har altså et underarmet tværsnit, idet vi benytter betegnelser analogt med DS411. Bæreevnen af dette vil kunne bestemmes af formelen for det uarmerede betonprisme (6-33). Denne formel er dermed en nedre værdi for gyldigheden af (7-10).

Ved overarmerede tværsnit vil der ske en lokal knusning af betonen under belastningen, og (7-10) kan ikke anvendes.

På fig. 7.6 er (7-10) afbildet sammen med forsøgsresultaterne fra [75.4]. De viste resultater er middel af 3, i enkelte tilfælde dog af 2 forsøg. Den vandrette punterede linie er bæreevnen for et uarmeret prisme bestemt ved (6-33), idet vi har $\frac{F}{f} = 5$.

Forsøgsmaterialet er i øvrigt meget begrænset, så det vil være vanskeligt at drage ret mange konklusioner ud fra figuren. Resultaterne synes imidlertid at vise, at bæreevnen er konstant ved små Φ , og at denne værdi kun er lidt større end bæreevnen for det uarmerede prisme.

For større værdier af Φ stiger bæreevnen med stigende Φ . I alle tilfælde giver (7-10) mindre bæreevne end forsøgene.

Bortset fra $\Phi = 0,202$ viste alle forsøgene med armerede prizmer udpræget plastiske egenskaber med store deformationer inden brud. For $\Phi = 0,202$ var revnelast og brudlast sammenfaldende, og bruddet indtraf pludselig og uvarslet på samme måde som for et uarmeret betonprisme.

Ud over de på figuren viste resultater, udførtes yderligere tre forsøg, hvor bruddene var forankringsbrud. Medens de på fig. 7.6 viste forsøg var med rundjern (R7 og R10), var to af forsøgene med forankringsbrud med tentorstål. Det tredje forsøg var med R10, men med så mange armeringsstænger (6 stk. $\sim \Phi = 0,54$), at forankringsevnen ikke var tilstrækkelig.

7.4 Konklusion

Vi kan af det foregående se, at en tværgående armering under en lokal belastning øger bæreevnen. Af fig. 7.6 ser vi også, at denne forøgelse er beskeden.

Tværarmeringen har yderligere den fordel, at bruddet ved en passende mængde armering bliver varslet og udpræget plastisk. En lille armeringsgrad ændrer dog ikke brudformen i forhold til det uarmerede prøvelgemes pludselige og uvarslede brud.

Når blot tværarmeringen er anbragt i nærheden af den koncentrerede belastning, er brudbæreevnen og i nogen grad revnelasten uafhængig af armeringens afstand fra belastningen.

Et begrænset forsøgsmateriale tyder på, at bæreevnen på den sikre side kan findes som den maximale af (6-33) og (7-10). I denne forbindelse kan man af fig. 7.6 se, at (7-10) kan lineariseres, idet man kan se bort fra kurven for små Φ . Bæreevnen bestemmes herefter som

(7-12)

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_c} = \max \begin{cases} 0,2 + 0,8\sqrt{\frac{F}{F}} \\ 2,6\Phi + 1,2 \end{cases}$$

En øvre grænse for gyldigheden af (7-12) og (7-10) kendes ikke. Man skal imidlertid være opmærksom på, at der ud over grænsen ved overarmeret tværsnit, kan optræde problemer med forankringen af tværarmeringen.

8. LITTERATUR

Ud over den kronologiske litteraturoversigt er der tilsidst foretaget en opdeling af en del af litteraturen efter emner.

Kronologisk oversigt

- [1773.1] Coulomb, C.A.: Essai sur une application des regles de maximis et minimis a quelques a problemes de statique, relatifs a l'architecture. Memoire présentés a l'Academie des Sciences. Paris 1773.
- [1876.1] Bauschinger, J.: Mittheilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der Königl. Polytechn. Schule in München. 6. Heft, 1876.
- [1882.1] Mohr, O.: Über die darstellung des spannungszustandes und deformationszustandes eines körperelementes und über die anvendung derselben in der festigkeitslehre. Zivilingenieur, vol. 28, 1882.
- [20.1] Prandtl, L.: Über die härte plastischer körper. Nachrichten Kgl. Ges. d. Wiss. Math. - phys. Klasse, Göttingen, Heft 1, 1920.
- [21.1] Graf, O.: Versuche mit beton-und eisenbetonquadern zu brückengelenken und auflagern. Forschungsarbeiten auf Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 232, Berlin 1921.
- [28.1] Richart, F.E., A. Brandtzæg og R.L. Brown: A study of the failure of concrete under combined compressive stresses. University of Illinois, Eng. Exp. Stat. Bull., No. 185, 1928.
- [28.2] von Mises, R.: Mechanik der plastischen formänderung von kristallen. Z. angew. Math. Mech., vol. 8, 1928.

- [29.1] Richart, F.E., A. Brandtzæg og R.L. Brown: The failure of plain and spirally reinforced concrete in compression. University of Illinois, Eng. Exp. Stat.Bull., No. 190, 1929.
- [30.1] Johansen, K.W.: Styrkeforholdene i støbeskel i beton. Bygningsstatistiske Meddelelser, 1930
- [34.1] Wästlund, G.: Untersuchungen über die festigkeit von beton. Avhandling, Stockholm, 1934.
- [38.1] Gvozdev, A.A.: The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformations. Proceedings of the conference on plastic deformations, Dec. 1936. Akademia Nauk SSSR. Moscow-Leningrad 1938. Findes i Haythornthwaites oversættelse i Inst. J. Mech. Sci. vol 1, 1960.
- [51.1] Drucker, D.C.: A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proceedings. 1'st US. Nat. Congr. Appl. Mech., 1951.
- [51.2] Hill, R.: On the state of stress in plastic-rigid body at the yield. Phil. Mag., Ser. 7, vol. 42, 1951.
- [52.1] Wright, P.J.F.: The effect of the method of test on the flexural strength of concrete. Magazine of Concrete Research, October 1952.
- [52.2] Prager, W.: The general theory of limit design. Proceedings 8'th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech. University of Istanbul, vol. II, 1952.
- [52.3] Drucker, D.C., W. Prager og H.J. Greenberg: Extended limit design theorems for continuous media. Quaterly of Applied Mathematics, vol. 9, 1952.

- [52.4] Drucker, D.C. og W. Prager: Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Quarterly of Applied Mathematics, vol.10, 1952.
- [53.1] Guyon, Y.: Prestressed Concrete. Contractores Record and Municipal Engineering, London, 1953.
- [53.2] Meyerhof, G.G.: The bearing capacity of concrete and rock. Magazine of Concrete Research, April, 1953.
- [55.1] Nielsen, J.: Brudteori for beton. Bygningsstatistiske Meddelelser, vol. 26, No. 1, 1955.
- [55.2] Nylander, H. og S. Sahlin: Undersökning av kontinuerliga betongbalkar vid långtgående betonstukning. Beton, vol. 4, No. 3, 1955.
- [58.1] Johansen, K.W.: Brudbetingelser for sten og beton. Bygningsstatistiske Meddelelser, vol. 29, No. 2, 1958.
- [58.2] Lundgren, H. og J. Brinch Hansen: Geoteknik, Teknisk Forlag, København 1958.
- [59.1] Prager, W.: An introduction to plasticity. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, USA, 1959.
- [60.1] Anderson, A.R.: Composite designs. Progressive Architecture, sept. 1960.
- [60.2] Iyengar, K.T. Sundara Raja: Der spannungszustand in einem elastischen halbstreifen und seine technischen anwendung, Diss. Technischen Hochschule, Hannover, 1960.
- [60.3] Au, T. og D.L. Baird: Bearing capacity of concrete blocks. Journal of the American Concrete Institute, March, 1960.

- [61.1] Zelger, C. og H. Rüschi: Der einfluss von fugen auf die festigkeit von fertigteilschalen. Beton- und Stahlbetonbau, vol. 56, Heft 10, 1961.
- [62.1] Iyengar, K.T. Sundara Raja: Über den spannungszustand in einem elastischen Halbstreifen. Österreichisches Ingenieur Arkiv, vol. 16, 1962.
- [62.2] Iyengar, K.T. Sundara Raja: Two-dimensional theories of anchorage zone stresses in post-tensioned prestressed beams. Journal of the American Concrete Institute, Oct. 1962.
- [64.1] Lange-Hansen, P.: Grundlaget for teorier for idealt plastiske konstruktioner. Ingeniøren, Nr. 2, 1964.
- [65.1] Muguruma, H. og S. Okamoto: Study on bearing capacity of concrete. Proceedings of the Eight Japan Congress on Testing Materials, Japan, 1965.
- [65.2] Sandbye, P.: A plastic theory for plain concrete. Bygningssstatistiske Meddelelser, vol. 36, No. 2, 1965.
- [66.1] Hughes, B.P. og G.P. Chapman: The deformation of concrete and microconcrete in compression and tension with particular reference to aggregate size. Magazine of Concrete Research, vol. 18, No. 54, March 1966.
- [66.2] Birkeland, P.W. og H.W. Birkeland: Connections in precast concrete construction. Journal of the American Concrete Institute, March 1966.
- [67.1] Sandbye, P.: Fænomenologiske brudteorier. Danmarks Ingeniørakademi, Bygningsafdelingen, København, 1967.
- [67.2] Nielsen, M.P.: Om forskydningsarmering af jernbetonbjælker. Bygningssstatistiske Meddelelser, vol. 38, No. 2, 1967.

- [68.1] Mast, R.F.: Auxiliary reinforcement in concrete constructions. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 94, No. ST6, 1968.
- [68.2] Hawkins, N.M.: The bearing strength of concrete loaded through rigid plates. Magazine of Concrete Reserach, Vol. 20, No. 62, March 1968.
- [68.3] Prager, W. og P.G. Hodge: Theory of perfectly plastic solids. Dover Publications, New York, 1968.
- [69.1] Sørensen, H.C. og M.P. Nielsen: Om forskydningsarmering i jernbetonbjælker. Diskussionsindlæg. Bygningsstatistiske Meddelelser, vol. 40, Nr. 1, 1969.
- [69.2] Chen, W.F. og D.C. Drucker: Bearing capacity of concrete bloks or rock. Journal of the Eng. Mech. Div. ASCE, vol. 95, No. EM4, 1969.
- [69.3] Chen, W.F.: Soil mechanics and theorems of limit analysis. Journal of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, vol. 95, No. SM2, 1969.
- [69.4] Nielsen, M.P.: Om jernbetonskivers styrke. Polytek-nisk Forlag 1969, eller On the strength of reinforced concrete discs. Acta Polytechnica Scandinavica, Ci 70, Copenhagen 1971.
- [69.5] Hofbeck, J.A., I.O. Ibrahim og A.M. Mattock: Shear transfer in reinforced concrete. Journal of the American Concrete Institute, Feb. 1969.
- [69.6] Newman, K. og J.B. Newman: Failure theories and design criteria for plain concrete. Paper no. 83. International conference on structure, solid mechanics and engineering design in civil engineering materials, Southampton University, 1969.

- [70.1] Harremoës, Krebs Ovesen og Moust Jacobsen: Lærebog i geoteknik 2, 2. udgave. Polyteknisk Forlag, 1970.
- [70.2] Timoshenko, S.P. og J.N. Goodier: Theory of Elasticity. 3. udgave. International student Edition, McGraw-Hill Book Company, Kogakusha Company, Tokyo, 1970.
- [70.3] Jensen, Å.P.: On failure in concrete. Acta Polytechnica Scandinavica, Ci66, Copenhagen 1970.
- [71.1] Pommeret, M.: La resistance aux efforts tangents des joints verticaux entre grand panneaux prefabriques coplanaires. Service d'Etude des Structures. Bulletin Interne d'Information No. 3, France, June 1971.
- [71.2] Birkeland, P.W.: A proposed industry-standard beam connection. Journal of the Prestressed Concrete Institute, vol. 16, No. 1, 1971.
- [71.3] ICES-STRU DL II, Engineering user's manual, vol. 1 og 2, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1971.
- [72.1] Endebrock, E.G. og L.A. Traina: Static concrete constitutive relations based on cubical specimens. Technical report no. AFWL-TR-72-59, vol. 1 og vol. 2, Dec. 1972.
- [72.2] Liu, T.C.Y., A.H. Nielson og F.O. Slate: Biaxial stress-strain relations for concrete. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 98, No. ST5, 1972.
- [72.3] Mattock, A.H. og N.H. Hawkins: Shear transfer in reinforced concrete. Journal of the Prestressed Concrete Institute, vol. 17, No. 2, 1972.

- [72.4] Nielsen, M.P. og N.A. Harder: Træk af mekanikkens historiske udvikling. Mekanik. Bind O.O. Danmarks Ingeniørakademi, Bygningsafdelingen, Ålborg, 1972.
- [73.1] Kupfer, H.: Das verhalten des betons unter mehrachsiger kurzzeitbelastung unter besonderer berucksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Heft 229, Berlin 1973.
- [73.2] Rathkjen, A.: Endnu ikke offentliggjort forsøgsrapport fra Ålborg Universitetscenter, Instituttet for Bygningsteknik. En del af resultaterne findes i [73.3].
- [73.3] Jensen, B.C. Koncentrede belastninger på uarmerede betonprismer. Bygningsstatistiske Meddelelser, vol. 44, No. 4, 1973.
- [73.4] Hauborg, J.: Koncentrerede belastninger på betonprismer med variabel højde. Opgave ved Instituttet for Husbygning. Udført under vejledning af E. Borchersen og B.C. Jensen.
- [73.5] Leonhardt, F., R. Walther og H. Dieterle: Versuche zur ermittlung der tragfähigkeit von zugschlaufenstößen. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 226, Berlin 1973.
- [74.1] Rajendran, S. og C.T. Morley: A general yield criterion for reinforced concrete slab elements. Magazine of Concrete Research, vol. 26, No. 89, Dec. 1974.
- [74.2] Houborg, J. og A.B. Sørensen: Støbeskel. Eksamensprojekt ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole. Udført under vejledning af E. Skettrup og T. Brøndum-Nielsen.

- [74.3] Hansen, K., M. Kavyrchine, G. Melhorn, S.Ø. Olesen, D. Pume og H. Schwing: Design of vertical keyed shear joints in large panel buildings. Building Research and Practice, Juli/August 1974.
- [74.4] Mattock, A.H. Shear transfer in concrete having reinforcement at an angle to the shear plan. Shear in Reinforced Concrete, SP-42, American Concrete Institute, Detroit, 1974.
- [74.5] Hermansen, B.R. og J. Cowan: Modified shear-friction theory from bracket design. Journal of the American Concrete Institute, Feb. 1974.
- [74.6] Jensen, B.C.: Plasticitetsteori for Coulomb-materialer. Instituttet for Husbygning, Danmarks tekniske Højskole, Internt notat nr. 7, 1974.
- [75.1] Nielsen, M.P. og M.W. Bræstrup: Plastic shear strength of reinforced concrete beams. Bygningsstatistiske Meddelelser, vol. 46, Nr. 3, 1975.
- [75.2] Jensen, B.C. og M.P. Nielsen: Om spalteforsøget og koncentrerede kræfter på uarmerede betonprismer. Nordisk Betong, No. 3, 1975.
- [75.3] Jensen, B.C.: On the ultimate load of vertical, keyed shear joints in large panel buildings. II international symposium on Bearing Walls, Warsaw, 1975. Også Instituttet for Husbygning, Danmarks tekniske Højskole, Rapport nr. 108, 1975.
- [75.4] Munch-Petersen, C.: Bæreevneformler for koncentrerede belastninger på betonprismer med ilagt spaltearmering. Opgave ved Instituttet for Husbygning. Udført under vejledning af E. Borchersen og B.C. Jensen.

- [75.5] Jensen, B.C.: Lines of discontinuity for displacements in the theory of plasticity of plain and reinforced concrete. Magazine of Concrete Research, vol. 27, No. 92, Sept. 1975.
- [76.1] Buhelt, M., K. Hansen, K.F. Hansen, A. Odgaard, S.Ø Olesen og J.E. Staalby: Skivebygningers stabilitet 2. Beregningsmetoder. Påregnes udsendt som SBI-anvisning i 1976.

Emneoversigt

Brudbetingelser: [1773.1], [1882.1], [28.1], [29.1], [34.1], [52.1], [55.1], [58.1], [67.1], [69.6], [70.3], [72.1], [73.1].

Plasticitetsteori: [20.1], [28.2], [38.1], [51.1], [51.2], [52.2], [52.3], [52.4], [59.1], [64.1], [65.2], [67.2], [68.3], [69.2], [69.3], [69.4], [70.3], [74.1], [74.6], [75.1], [75.3], [75.4], [75.5].

Forskydning: [30.1], [60.1], [61.1], [66.2], [67.2], [68.1], [69.1], [69.5], [71.1], [71.2], [72.3], [74.1], [74.2], [74.3], [74.4], [74.5], [75.1], [75.3], [75.5].

Koncentrerede belastninger: [1876.1], [21.1], [34.1], [53.1], [53.2], [60.2], [60.3], [62.1], [62.2], [65.1], [68.2], [69.2], [73.2], [73.3], [73.4], [73.5], [75.2], [75.4], [76.1].

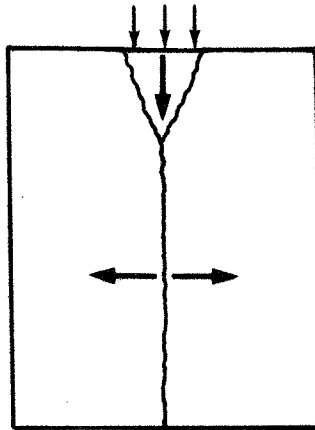
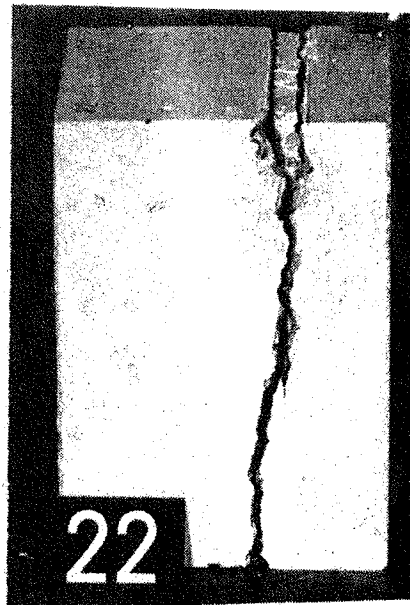


Fig. 1.1. Eksempel på at forsøg kan vise, hvilken brudmekanisme, man skal regne på.



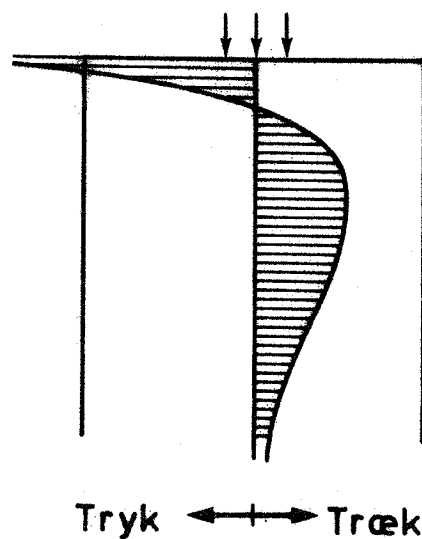


Fig. 1.2. Tværspændingsfordeling under belastningen efter elasticitetsteorien.

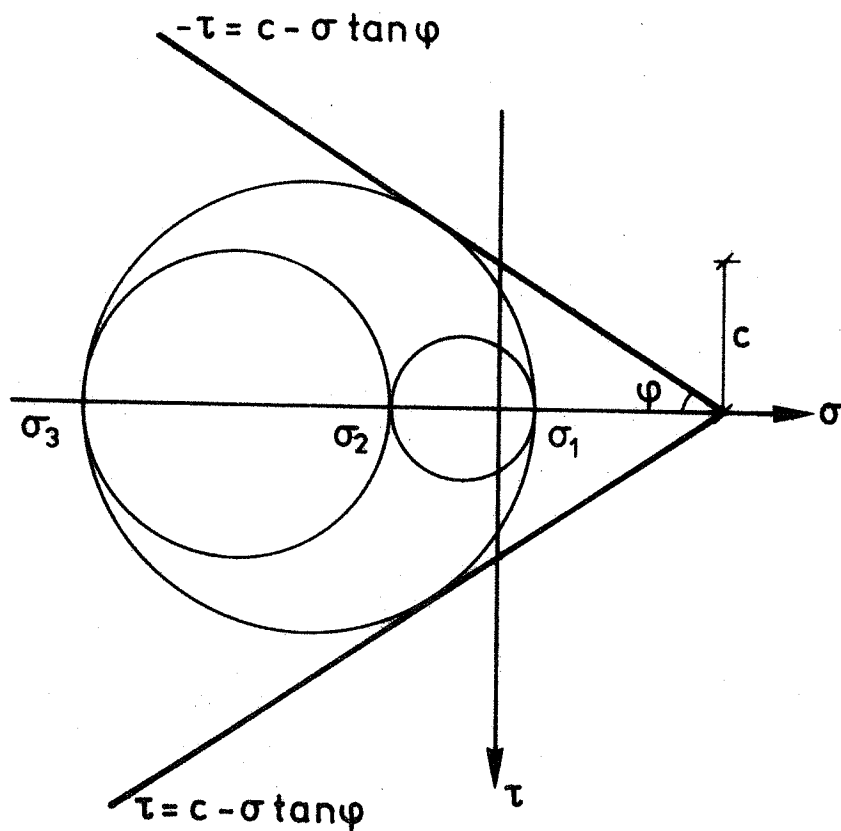


Fig. 2.1. Coulombs brudhypotese med Mohrs cirkler i et punkt.

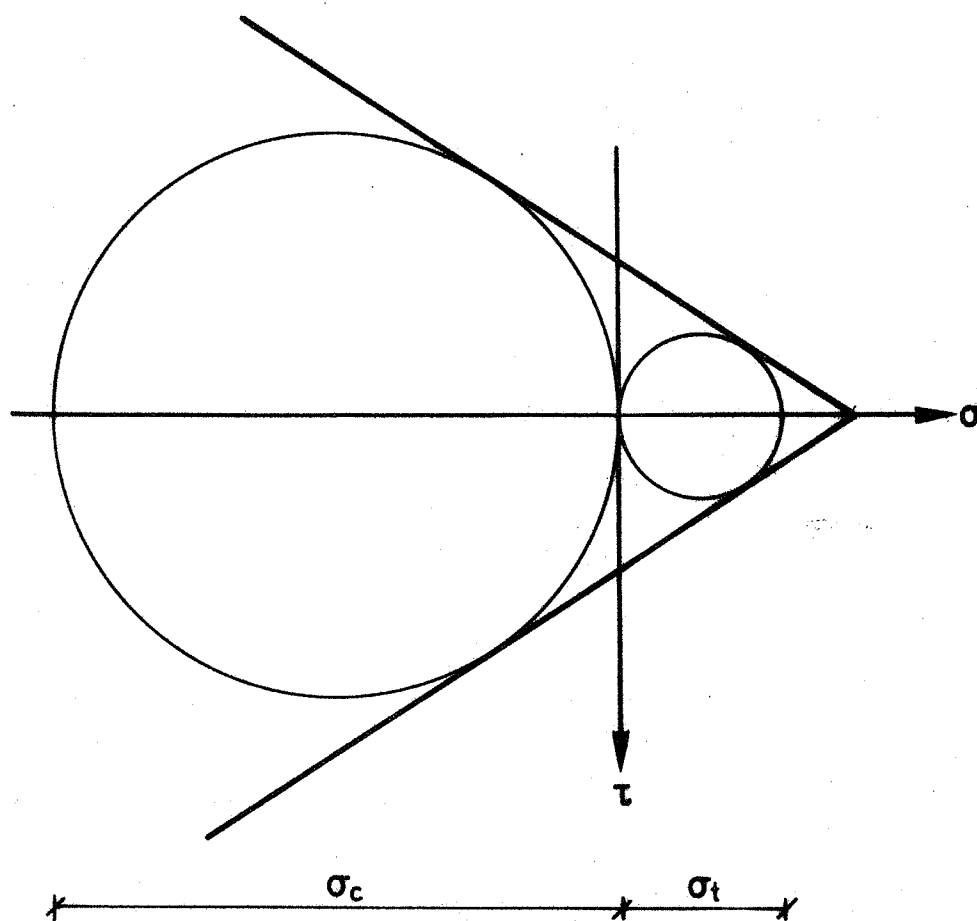


Fig. 2.2. Coulombs brudhypotese med Mohrs cirkler for enakset tryk og enakset træk.

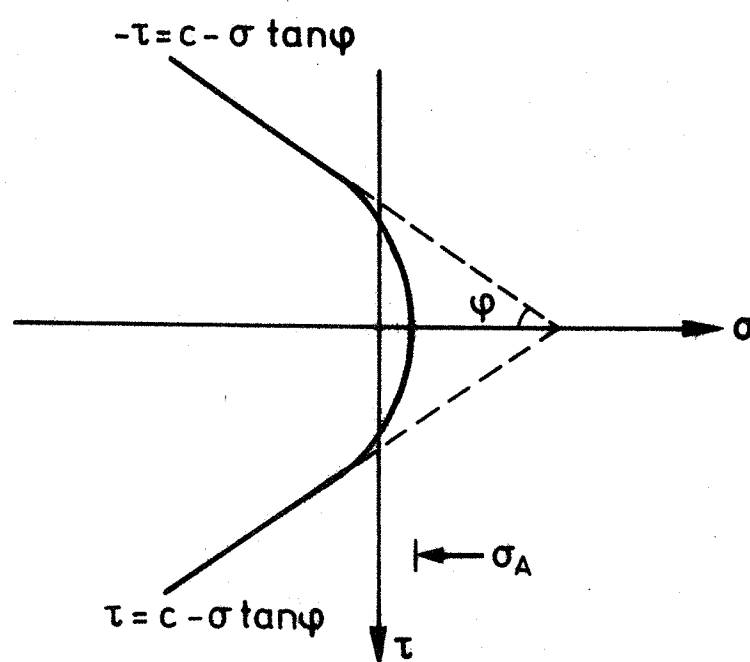


Fig. 2.3

Fig. 2.3. Coulombs modificerede brudhypotese.

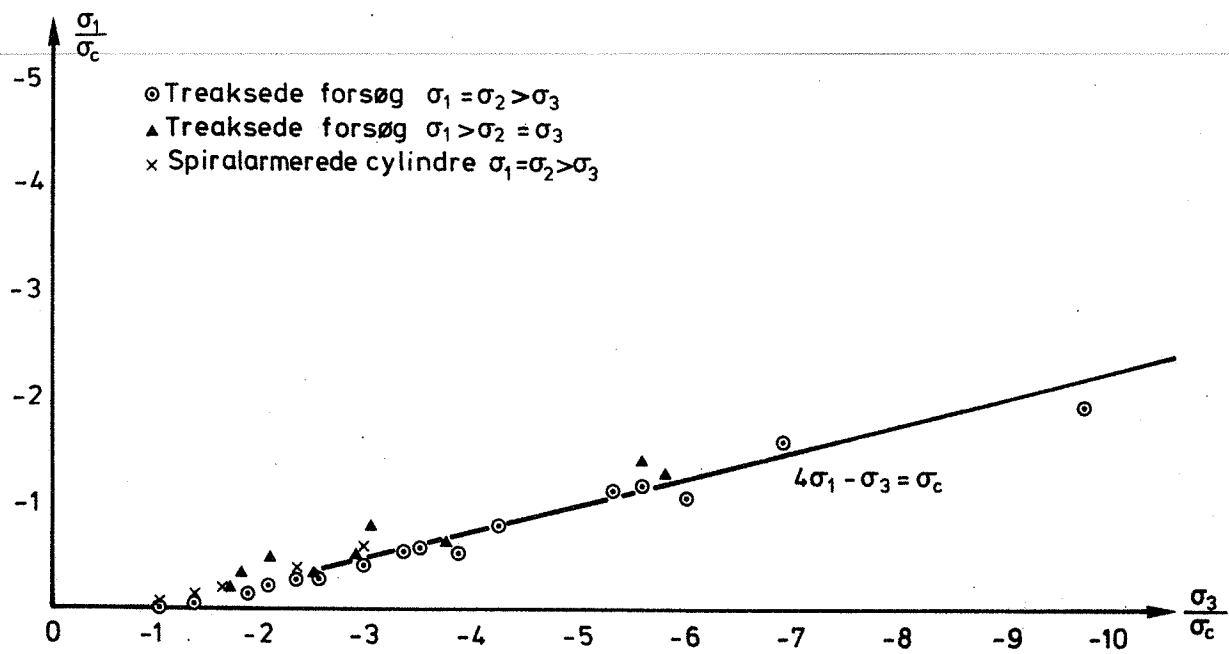


Fig. 2.4. Forsøgsresultater fra [28.1] og [29.1].

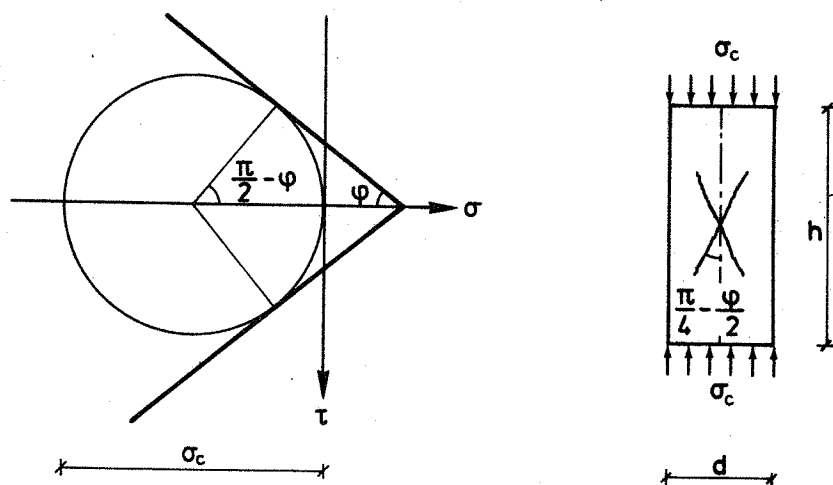


Fig. 2.5. Enakset trykforsøg.

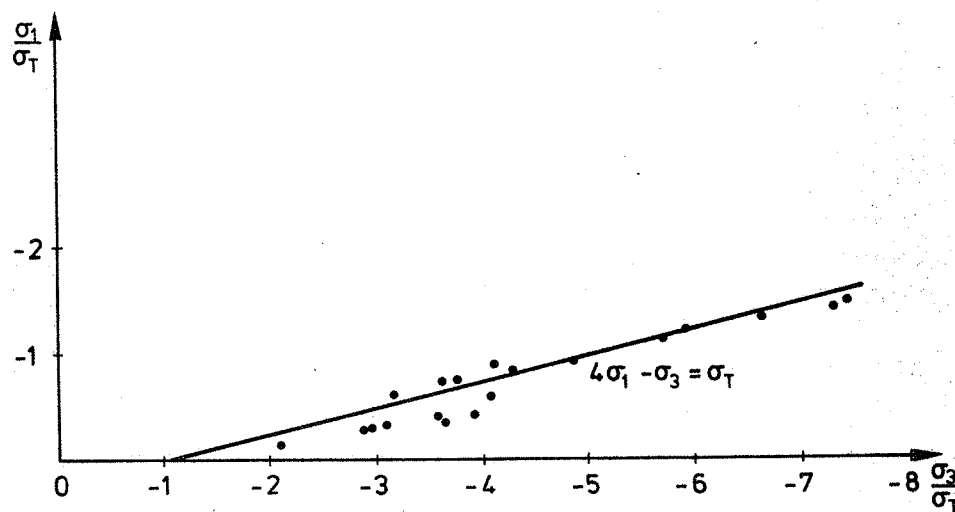


Fig. 2.6. Forsøgsresultater fra [72.1].

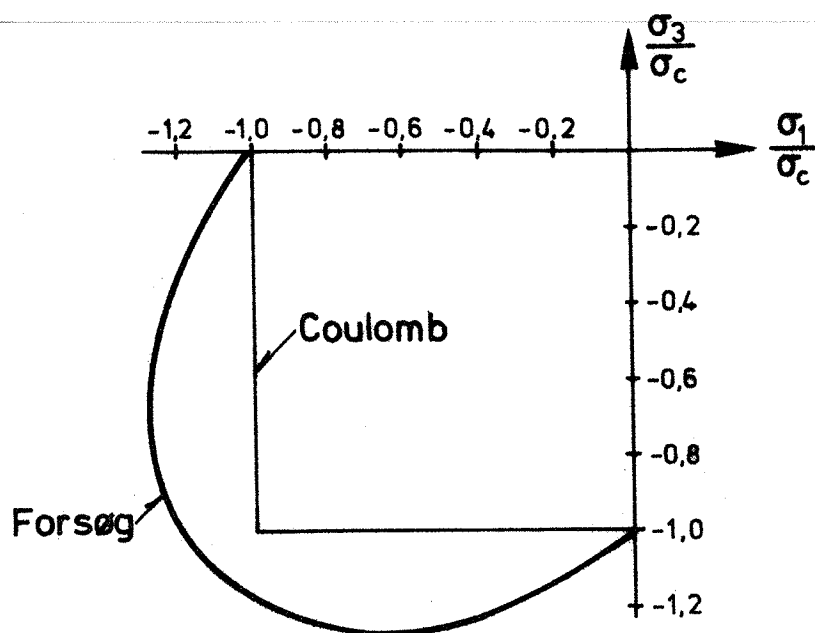


Fig. 2.7. Toaksede trykforsøg og Coulombs brudhypotese ved plan spændingstilstand og tryk.

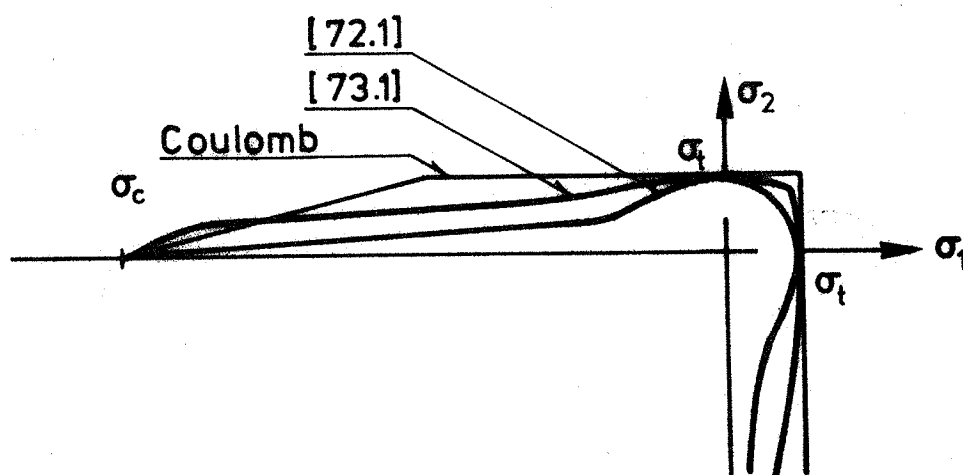


Fig. 2.8. Toaksede trækforsøg og træk/trykforsøg samt Coulombs brudhypotese.

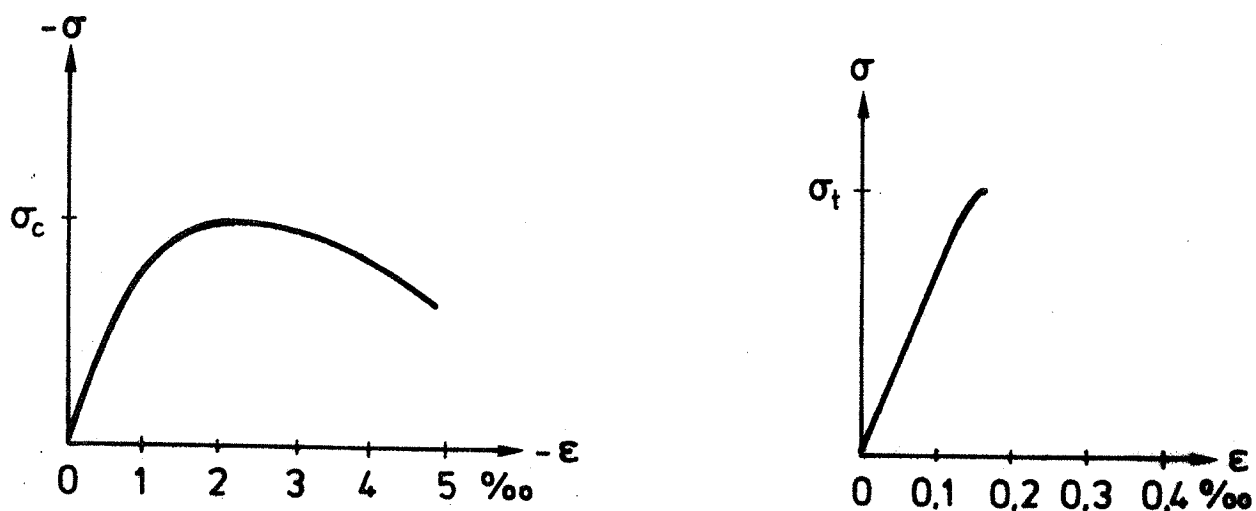


Fig. 2.9. Typisk tryk- og trækarbejdslinie.

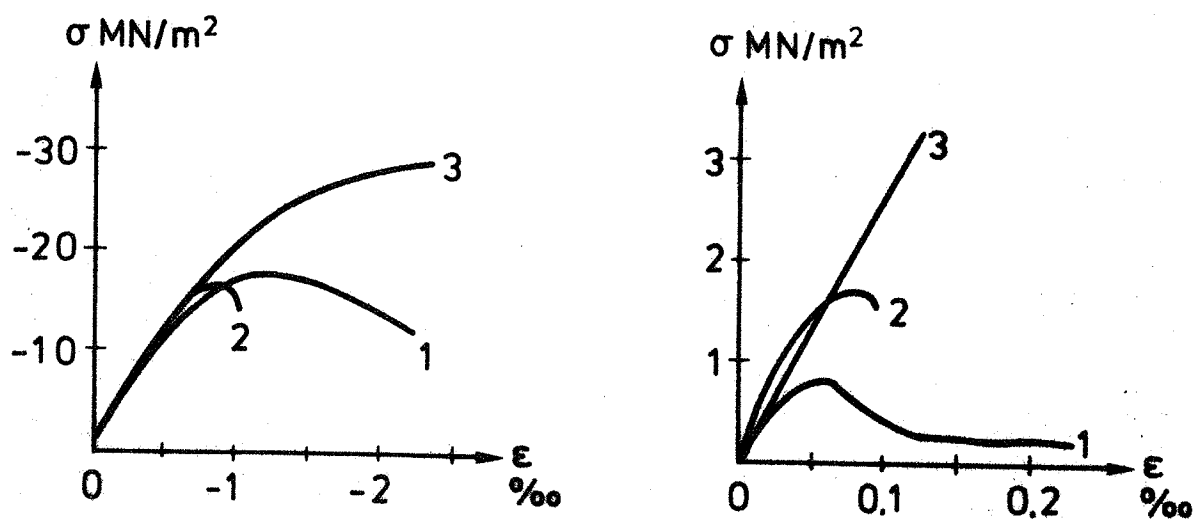


Fig. 2.10. Tryk- og trækarbejdslinier for tre betontyper. Fra [66.1].

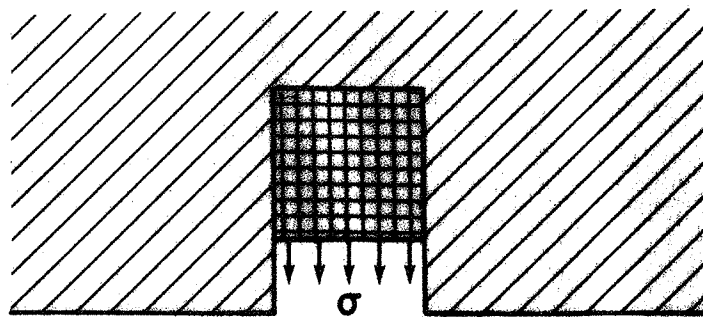


Fig. 3.1. Terningformet prøvelegeme fra eks. 3.1.

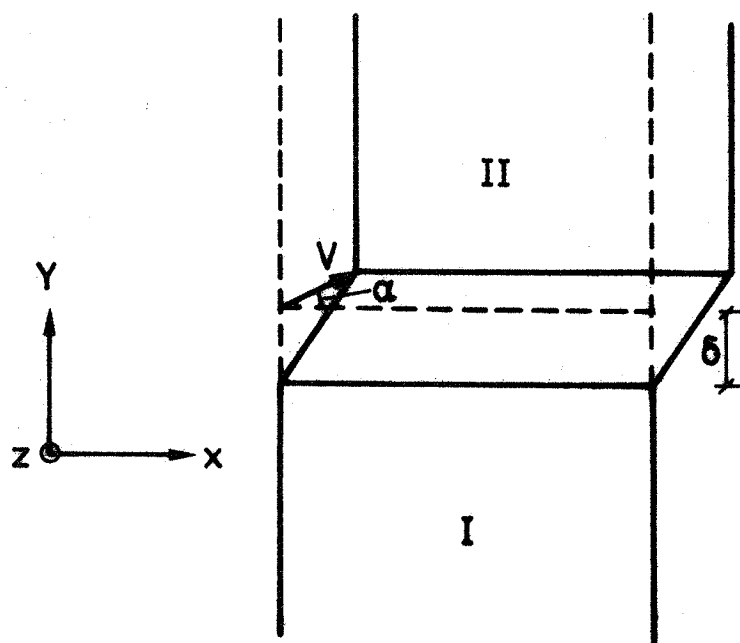


Fig. 3.2. Deformationszone imellem to stive dele.

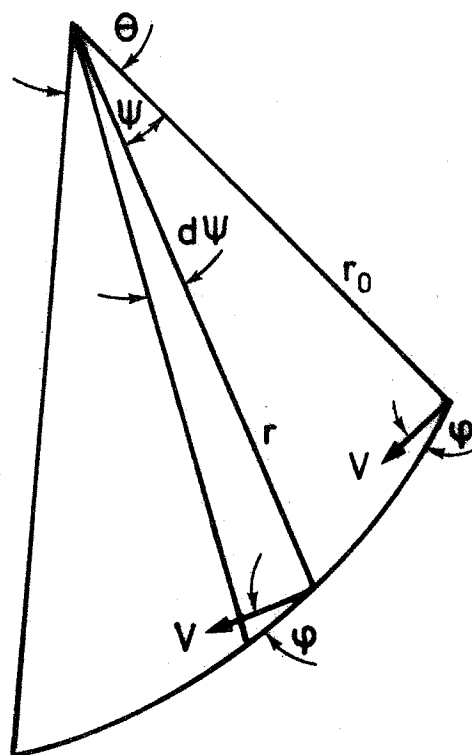


Fig. 3.3. Brud langs logaritmisk spiral.

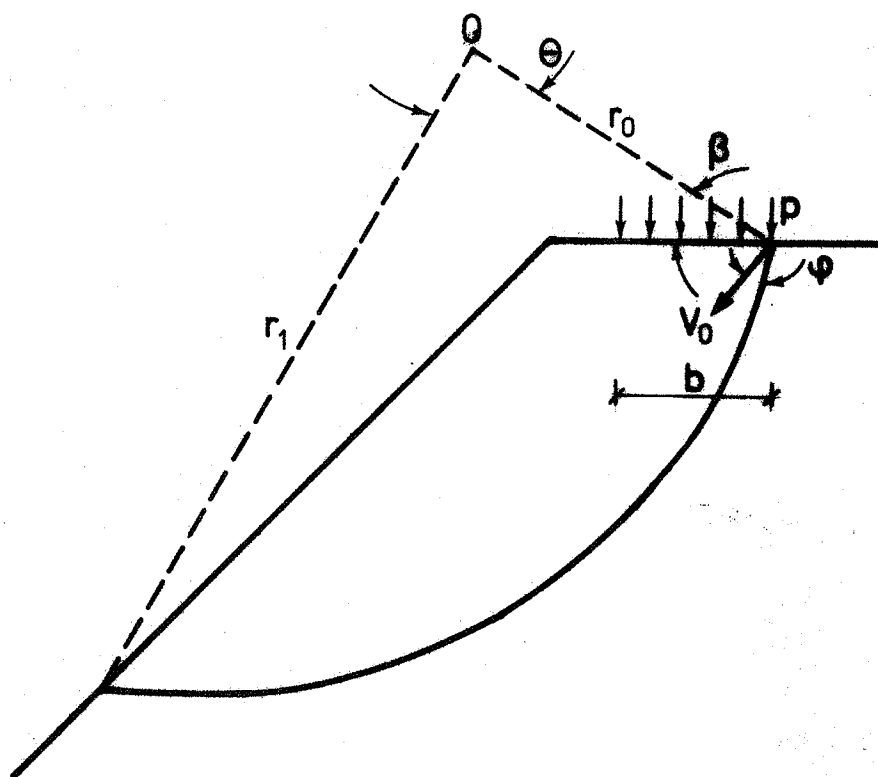


Fig. 3.4. Skråning med brud langs spiral.

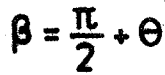


Fig. 3.5. Brudfigur i skråning.

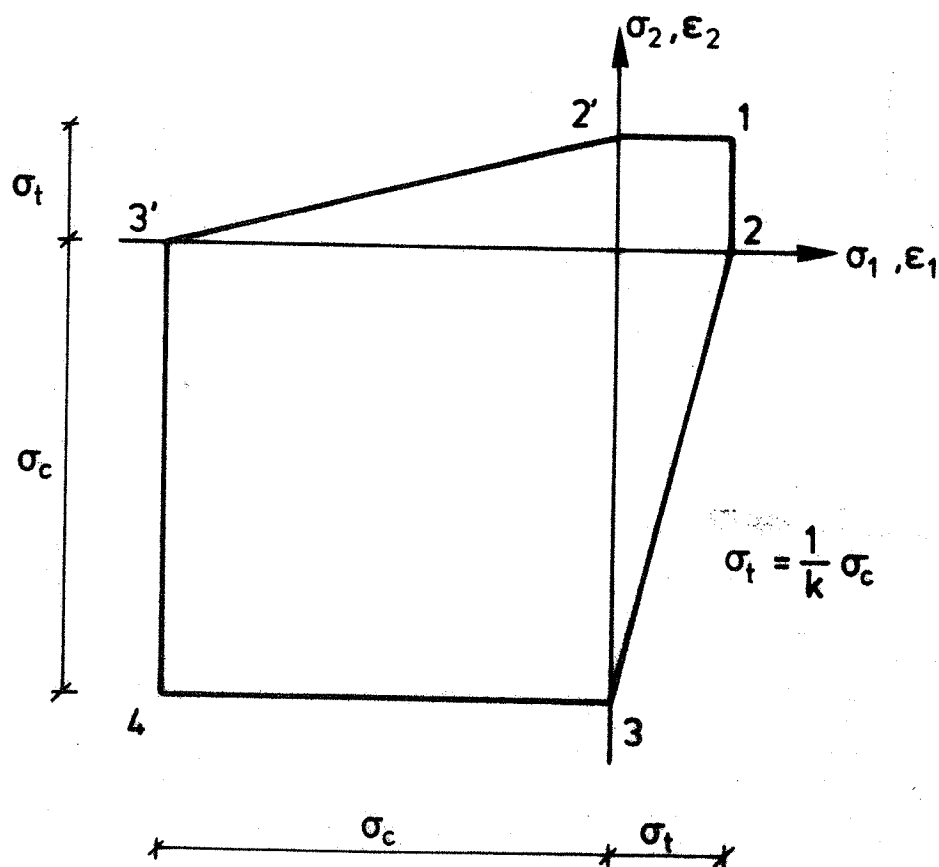


Fig. 3.7. Flydebetingelse for Coulomb-materiale med $\sigma_3 = 0$ og for modificeret Coulomb-materiale med $\sigma_3 = 0$ og $\sigma_t < \sigma_A$.

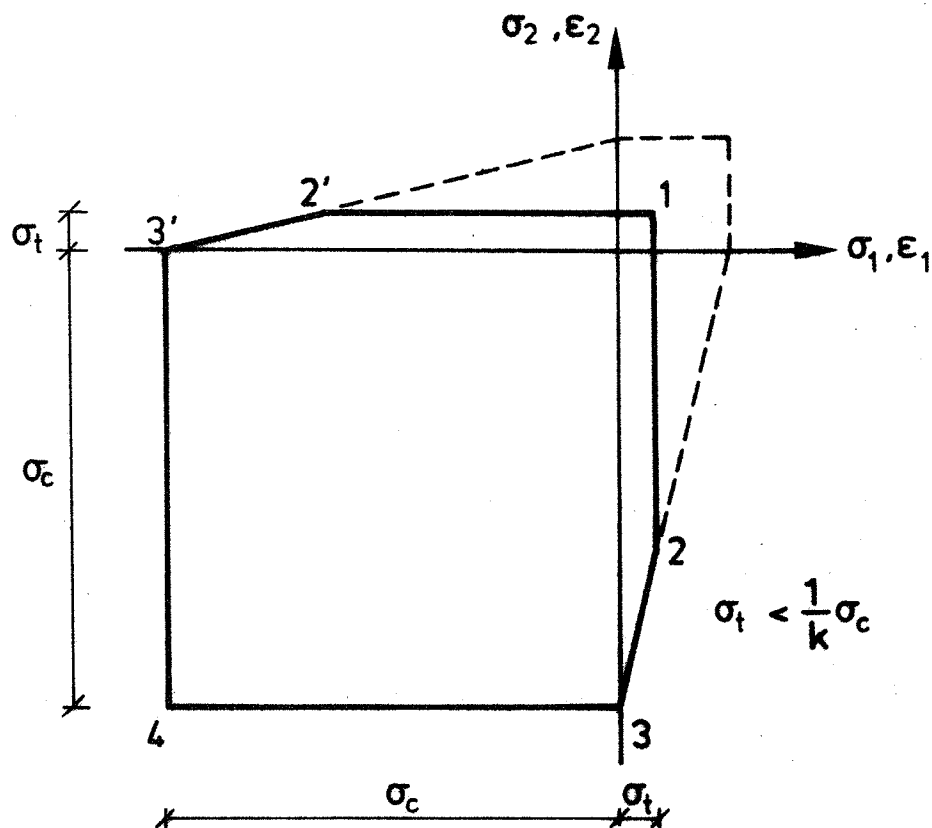


Fig. 3.8. Flydebetingelse for modificeret Coulombmateriale med $\sigma_3 = 0$ og $\sigma_t = \sigma_A$.

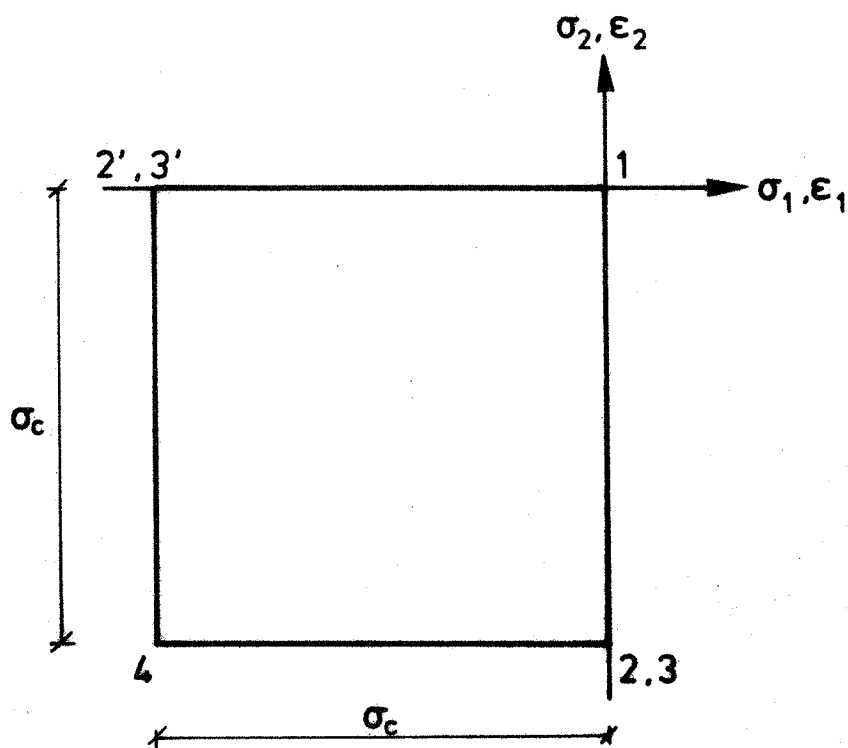


Fig. 3.9. Flydebetingelse for modificeret Coulombmateriale med $\sigma_3 = 0$ og $\sigma_t = 0$.

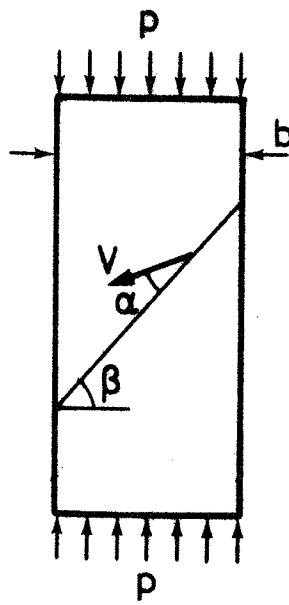


Fig. 3.10. Trykpåvirket skive med brudfigur.

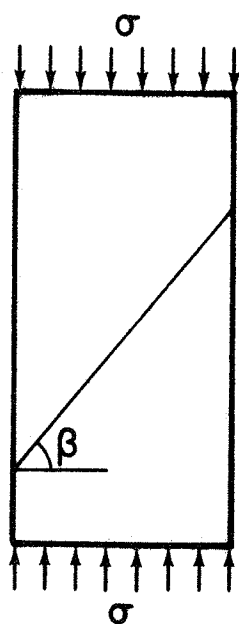


Fig. 4.1. Støbeskel i betonlegeme.

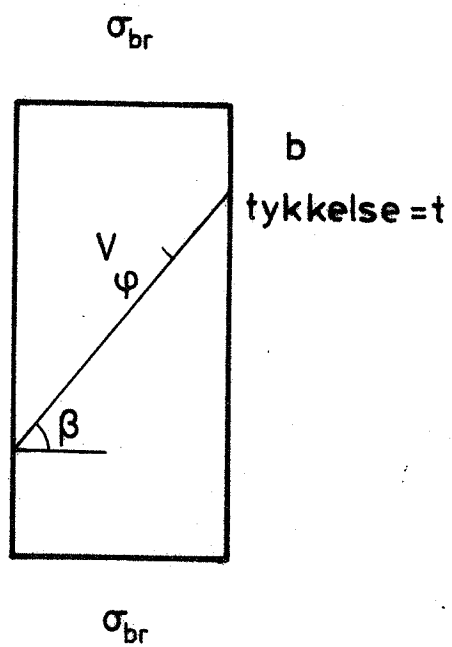


Fig. 4.2. Glidningsbrud i støbeskel.

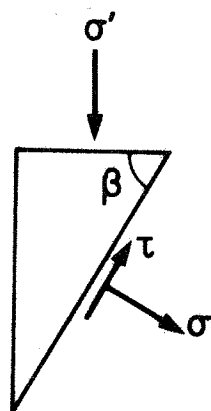


Fig. 4.3. Spændinger langs støbeskel.

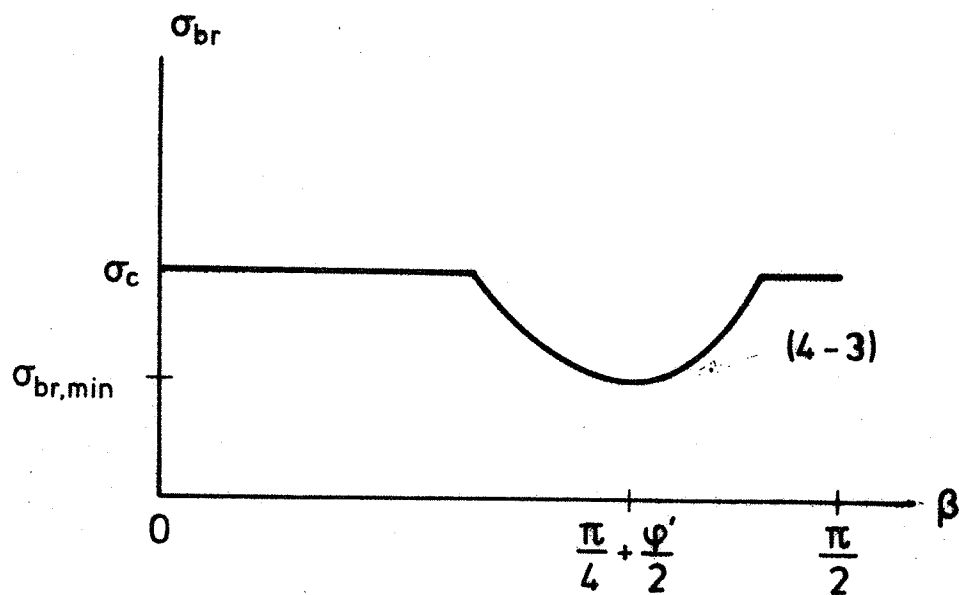


Fig. 4.4. Bæreevnens afhængighed af støbeskel-
lets hældning. Brudform: Glidningsbrud.

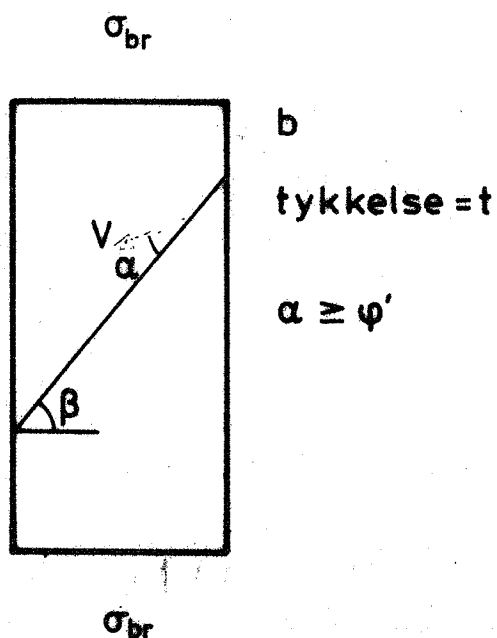


Fig. 4.5. Brud i støbeskel.

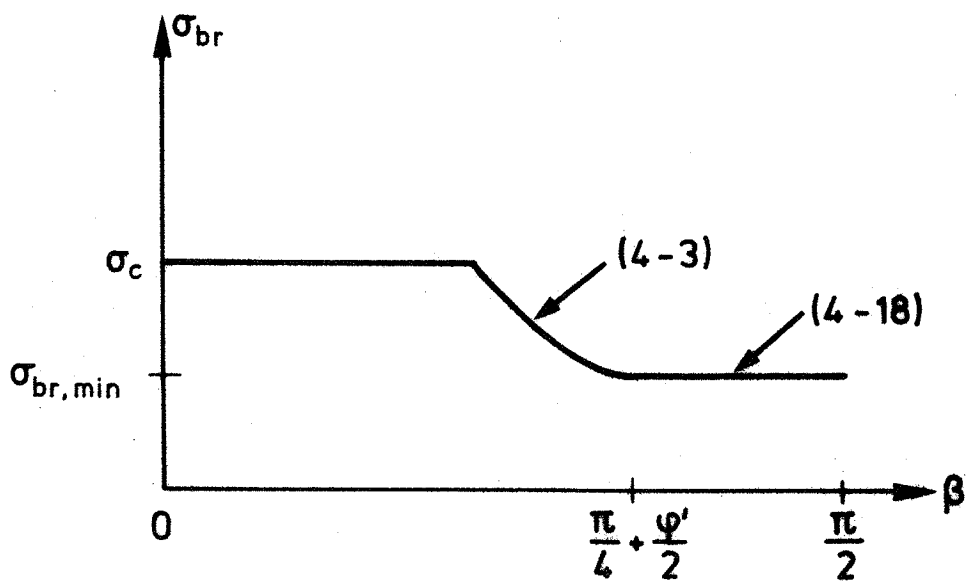


Fig. 4.6. Bæreevnens afhængighed af støbeskellets hældning. Brudform: Glidningsbrud og adskillelsesbrud, $\sigma'_t = 0$.

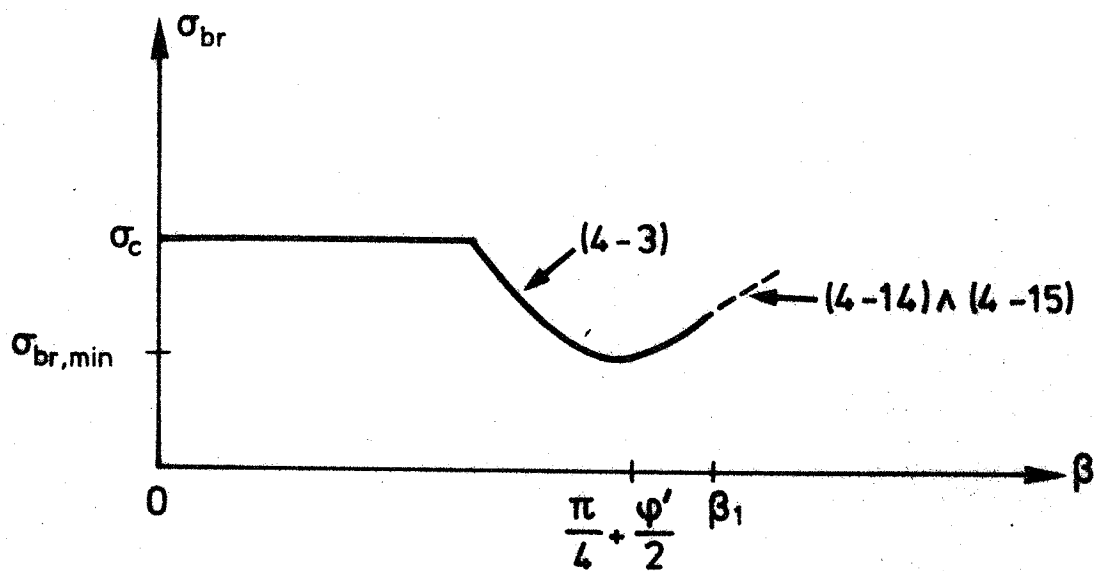


Fig. 4.7. Bæreevnens afhængighed af støbeskellets hældning. Brudform: Glidningsbrud og adskillelsesbrud, $\sigma'_t > 0$.

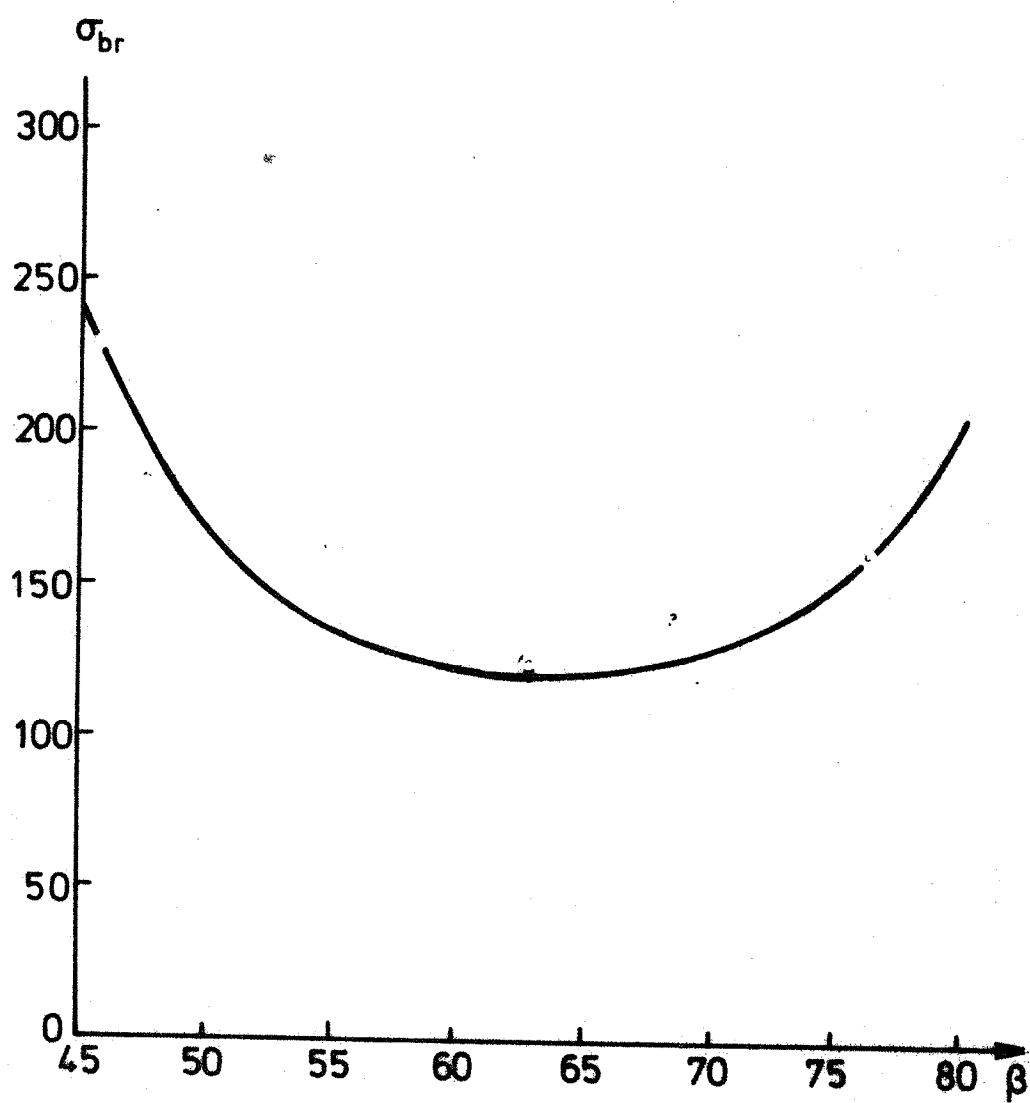


Fig. 4.8. Johansens forsøgsresultater og (4-3) med $c' = 3 \text{ MN/m}^2$ og $\tan\phi = 0,75$.

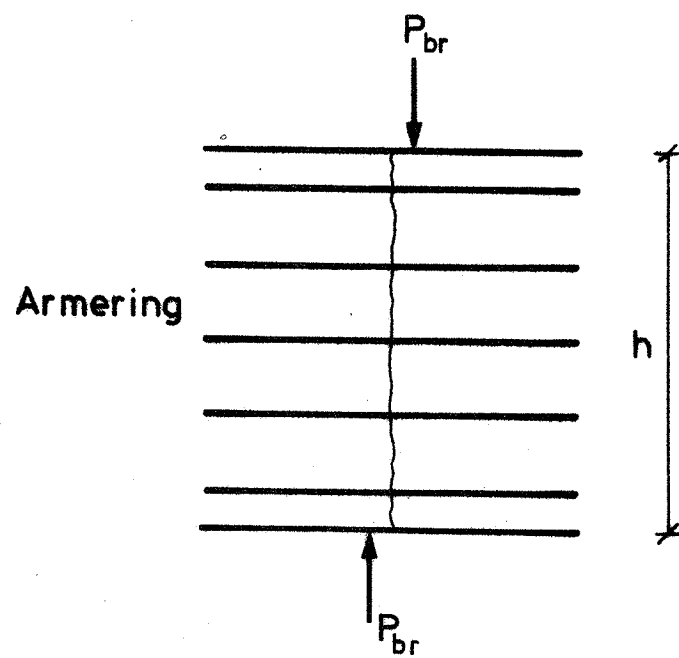


Fig. 5.1. Forskydningsbrud.

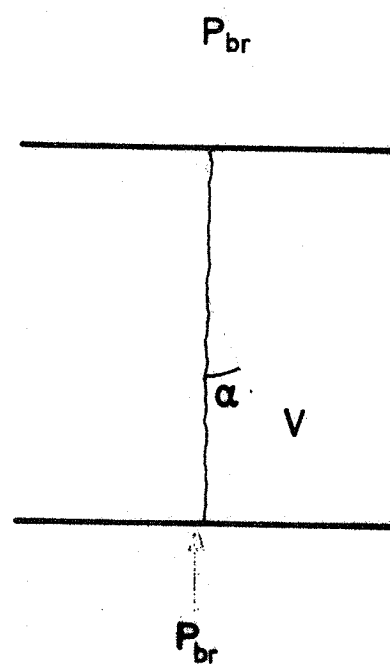


Fig. 5.2. Brudfigur.

σ_t	φ	$\frac{\tau_{br}}{\sigma_c}$	Gyldighedsområde
0	φ	$\frac{\sqrt{\varphi(v-\varphi)}}{v \frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi} + \varphi \tan\varphi}$	$\begin{aligned}\varphi &\leq v \frac{1-\sin\varphi}{2} \\ \varphi &\geq v \frac{1-\sin\varphi}{2}\end{aligned}$
σ_t	37°	$\sqrt{\left(\varphi + v \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)\left(v\left(1-3\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) - \left(\varphi + v \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)\right)}$ $0,25 v + 0,75 \varphi$	$\begin{aligned}\varphi &\leq v\left(0,2 - 1,6 \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) \\ \varphi &\geq v\left(0,2 - 1,6 \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)\end{aligned}$
0	37°	$\frac{\sqrt{\varphi(v-\varphi)}}{0,25 v + 0,75 \varphi}$	$\begin{aligned}\varphi &\leq 0,2 v \\ \varphi &\geq 0,2 v\end{aligned}$
$\frac{\sigma_c}{10}$	37°	$\frac{\sqrt{(\varphi + 0,1v)(0,7v - (\varphi + 0,1v))}}{0,25 v + 0,75 \varphi}$	$\begin{aligned}\varphi &\leq 0,04v \\ \varphi &\geq 0,04v\end{aligned}$

Tabel 5.1: Bæreevneformler ved plan deformationstilstand

σ_t	φ	$\frac{\tau_{br}}{\sigma_c}$	Gyldighedsområde
0	φ	$\frac{\sqrt{\varphi(v-\varphi)}}{0,5 v}$	$\begin{aligned}\varphi &\leq 0,5 v \\ \varphi &\geq 0,5 v\end{aligned}$
σ_t	37°	$\sqrt{\left(\varphi + v \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)\left(v\left(1-3\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) - \left(\varphi + v \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)\right)}$ $0,25 v + 0,75 \varphi$ $\frac{\sqrt{\varphi(v-\varphi)}}{0,5 v}$	$\begin{aligned}\varphi &\leq v\left(0,2 - 1,6 \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) \\ v\left(0,2 - 1,6 \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) &\leq \varphi \leq 0,2 v \\ 0,2 v &\leq \varphi \leq 0,5 v \\ \varphi &\geq 0,5 v\end{aligned}$
0	37°	$\frac{\sqrt{\varphi(v-\varphi)}}{0,5 v}$	$\begin{aligned}\varphi &\leq 0,5 v \\ \varphi &\geq 0,5 v\end{aligned}$
$\frac{\sigma_c}{10}$	37°	$\frac{\sqrt{(\varphi + 0,1 v)(0,7 v - (\varphi + 0,1v))}}{0,25 v + 0,75 \varphi}$ $\frac{\sqrt{\varphi(v-\varphi)}}{0,5 v}$	$\begin{aligned}\varphi &\leq 0,04 v \\ 0,04 v &\leq \varphi \leq 0,2 v \\ 0,2 v &\leq \varphi \leq 0,5 v \\ \varphi &\geq 0,5 v\end{aligned}$

Tabel 5.2: Bæreevneformler ved plan spændingstilstand

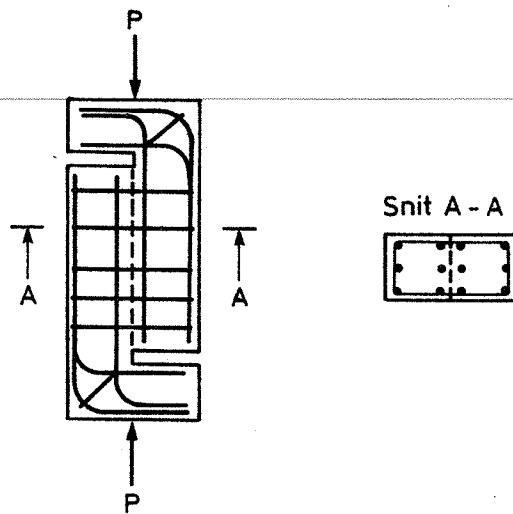


Fig. 5.6. Forskydningsforsøg fra [69.5].

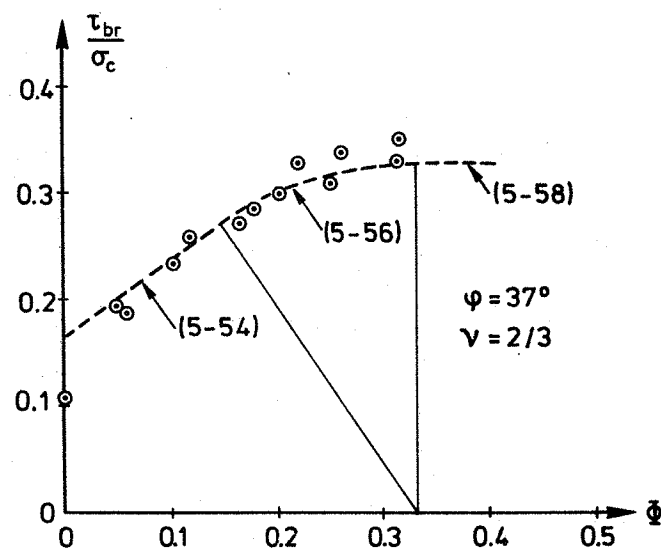


Fig. 5.7. Resultater med monolitiske prøvelegemer fra [69.5].

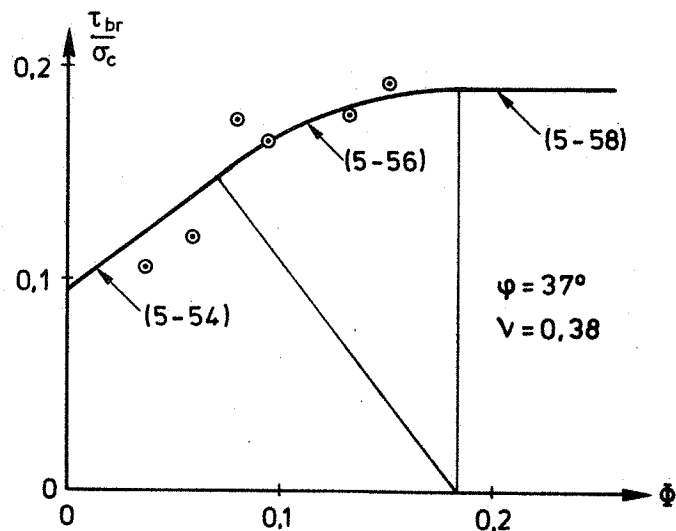


Fig. 5.8. Resultater med monolitiske prøvelegemer fra [72.3].

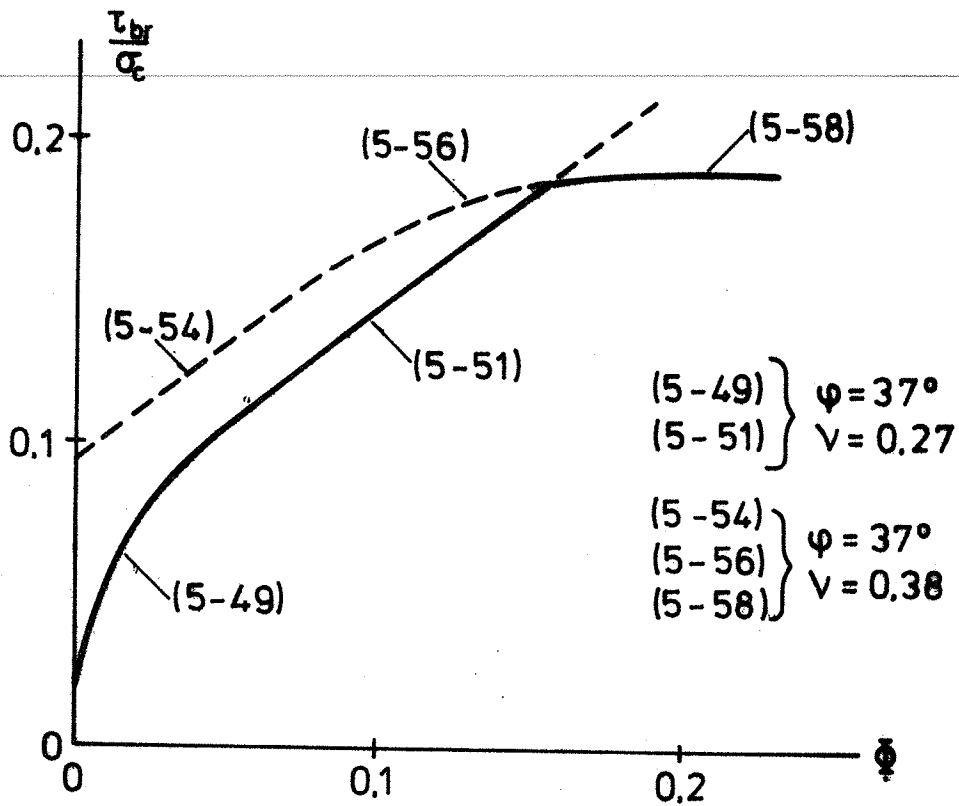


Fig. 5.11. Resultater med revnede prøvelegemer fra [72.3].

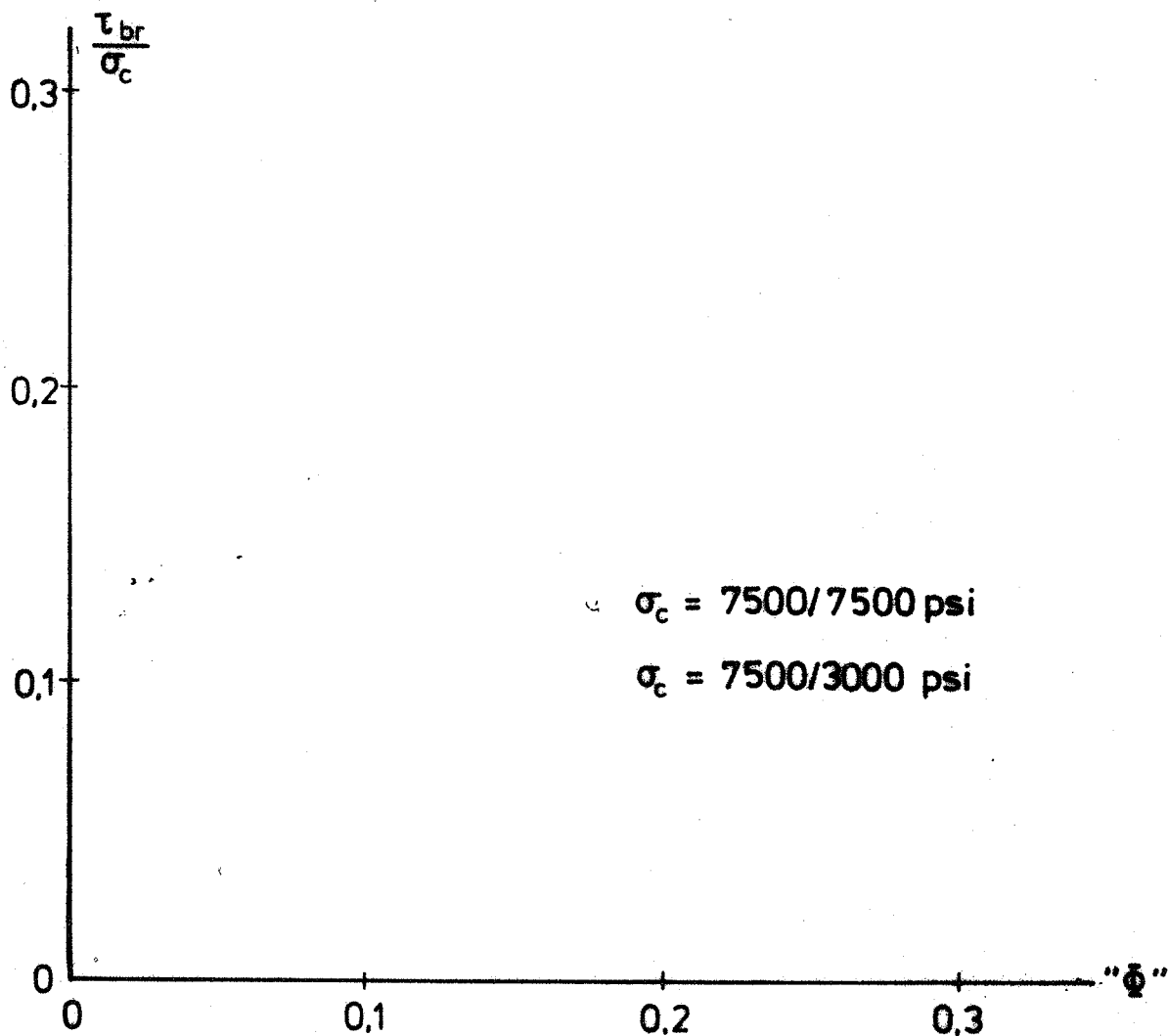


Fig. 5.12. Forsøg med støbeskel fra [60.1].

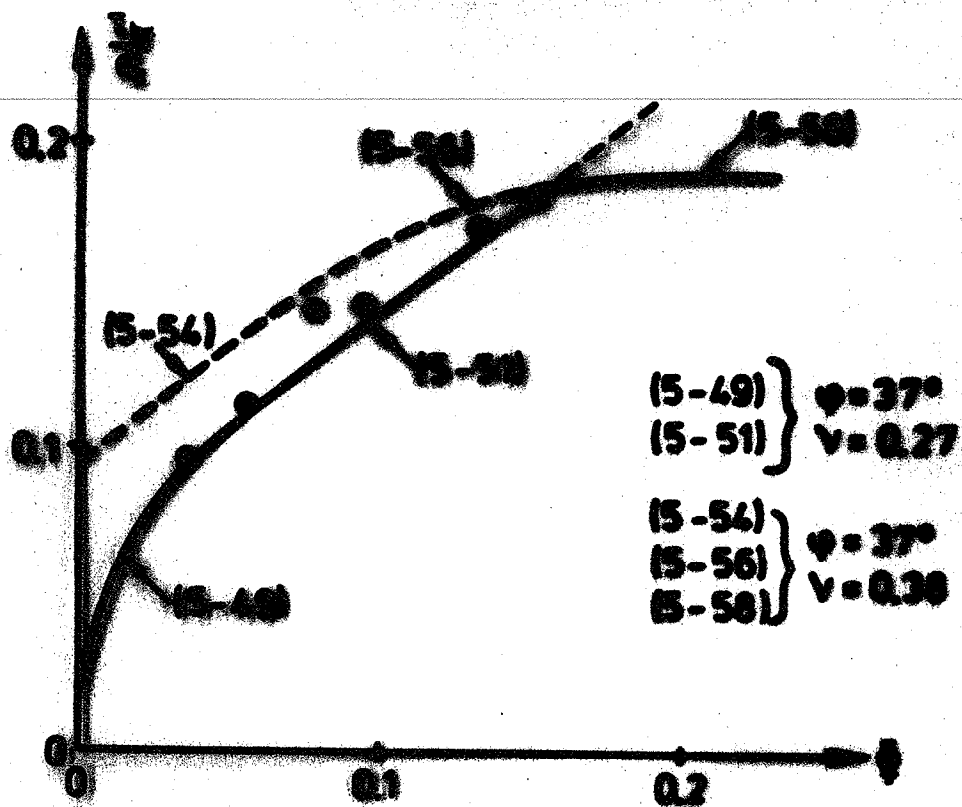


Fig. 5.11. Samlinger med revnede purrelegemer (72.3).

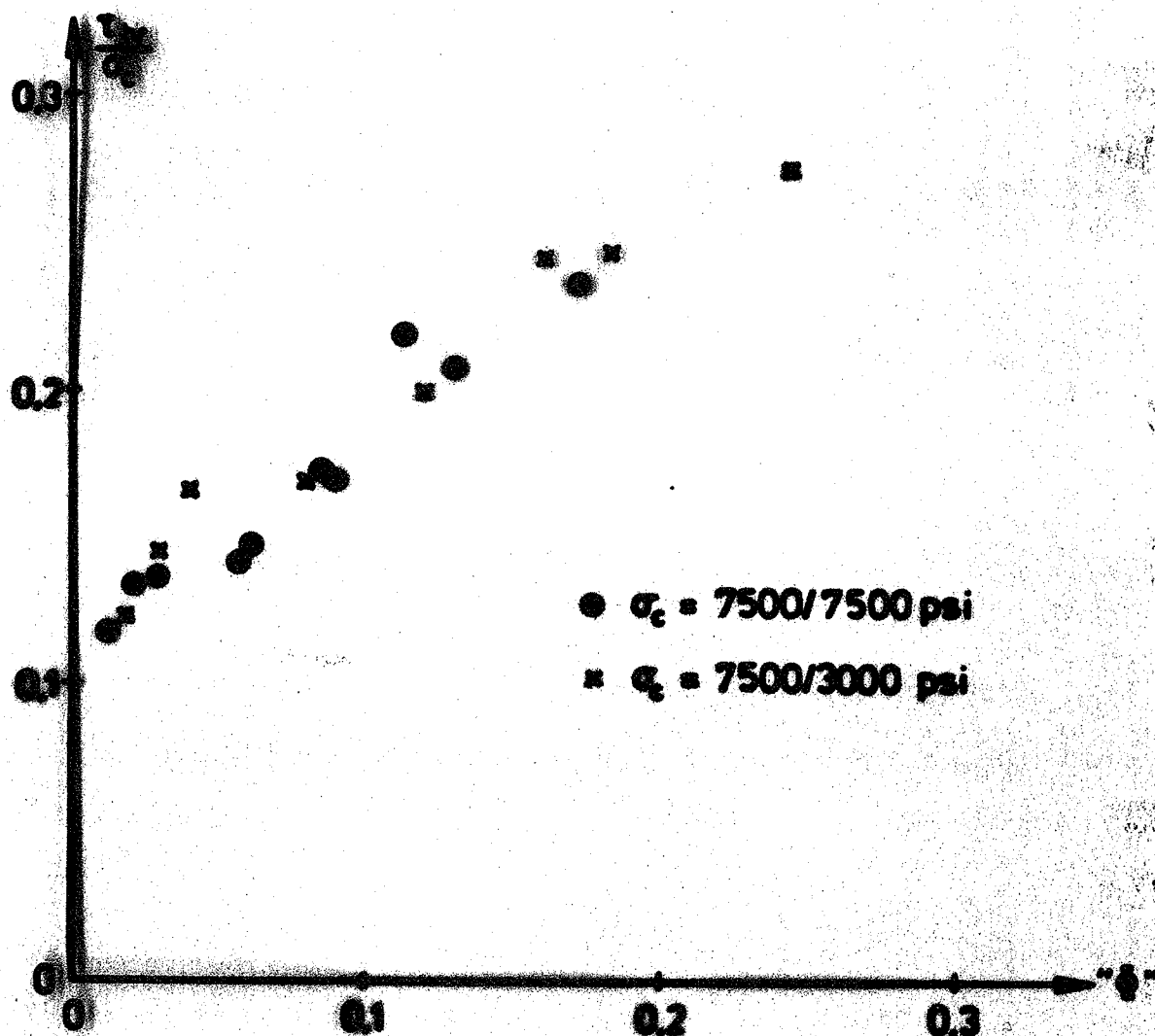


Fig. 5.12. Forseg og støbtebeton (60.1).

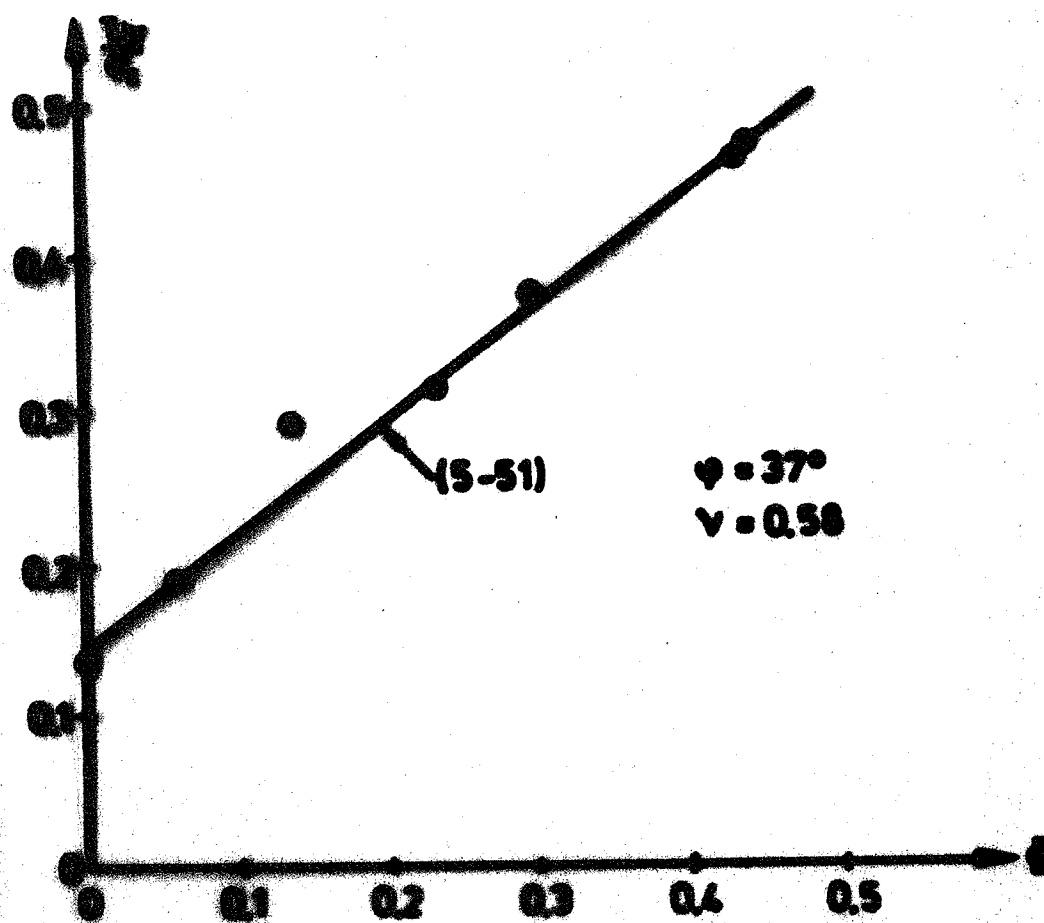


Fig. 5.13. Forsøg med støbeskel fra [74.2].

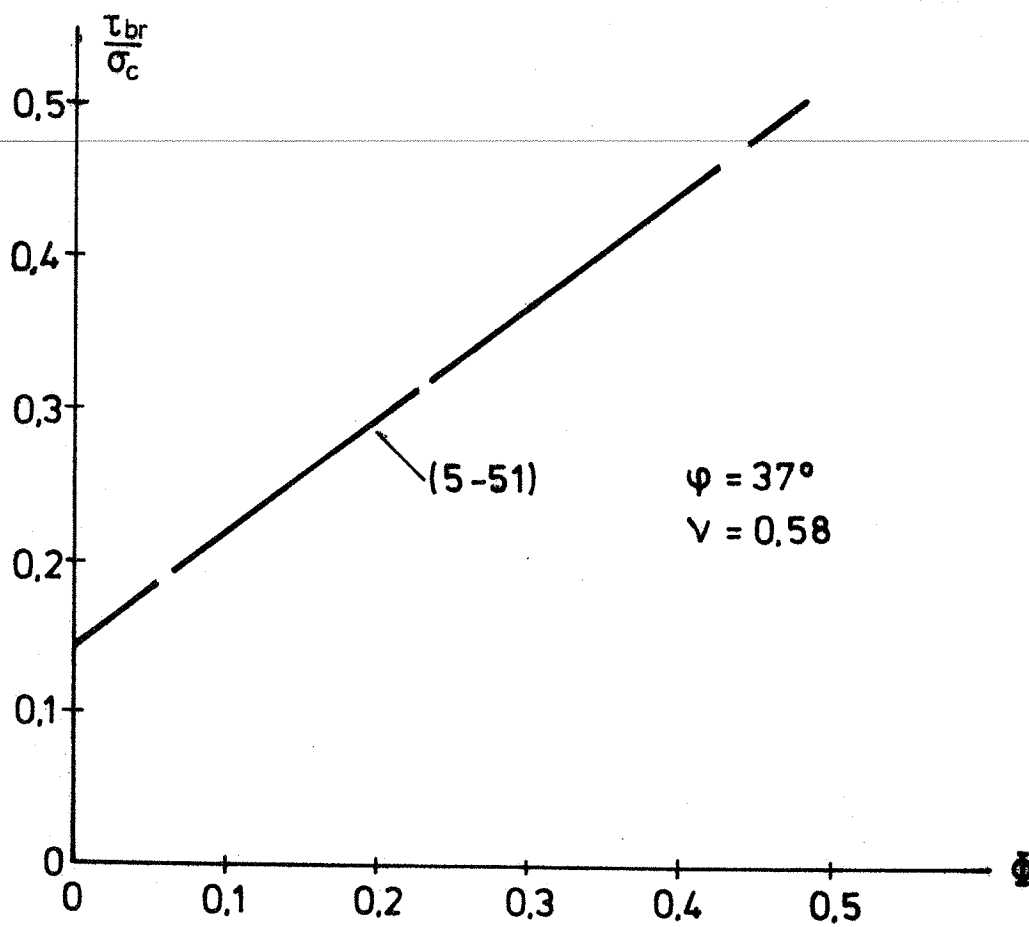


Fig. 5.13. Forsøg med støbeskel fra [74.2].

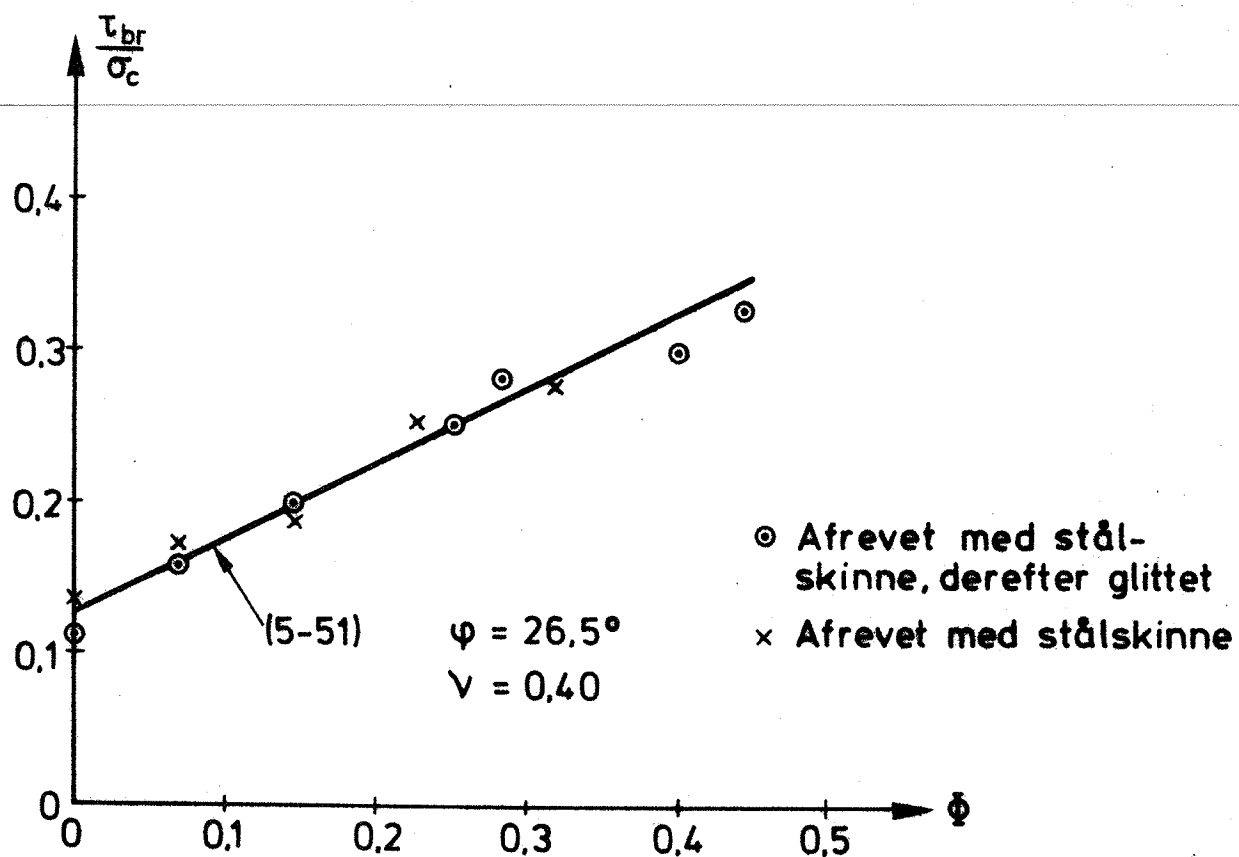


Fig. 5.14. Forsøg med glatte støbeskel fra [74.2].

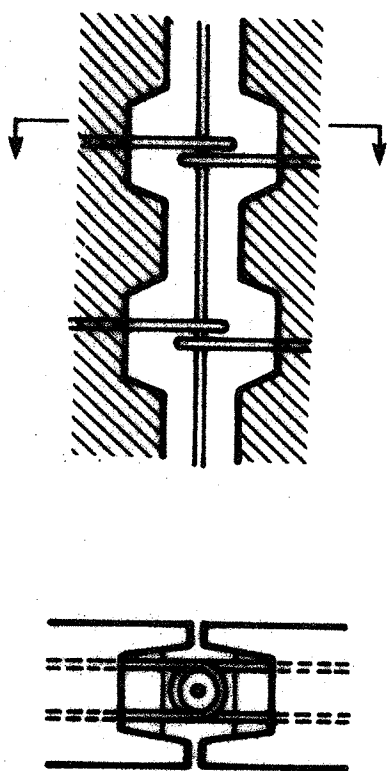


Fig. 5.15. Princip i fortandet, armeret vægfuge.

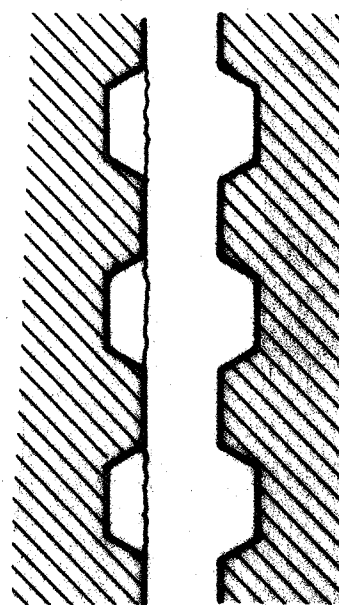


Fig. 5.16. Brud i fortanding.

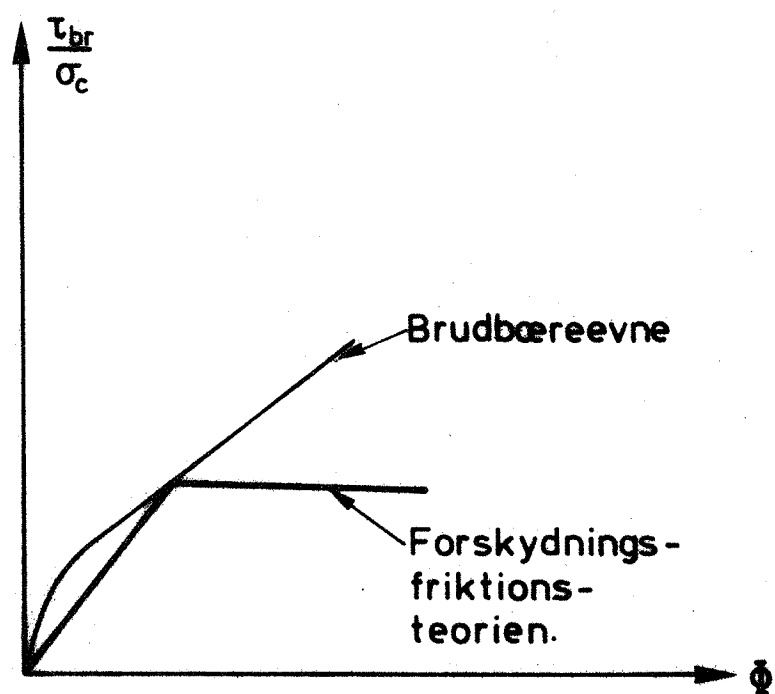


Fig. 5.19. Sammenligning af brudbæreevne med forslydnings-friktionsteorien.

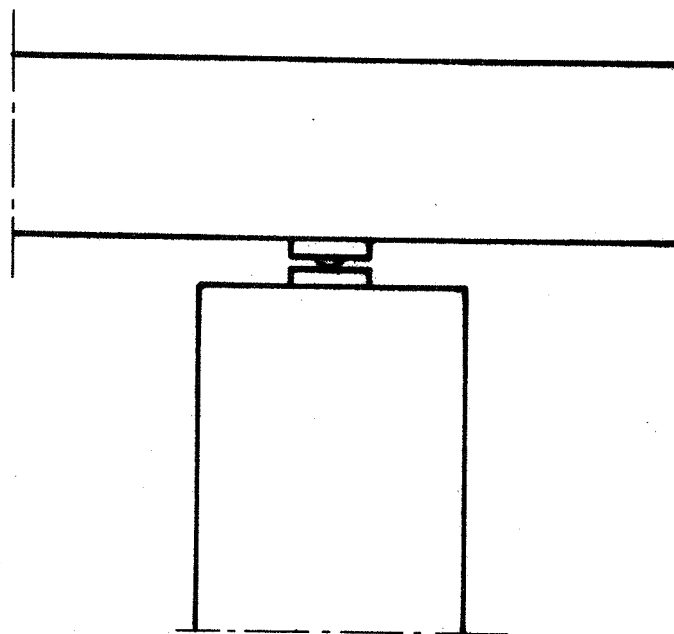


Fig. 6.1. Koncentreret belastning på søjle fra en gennemgående bjælke.

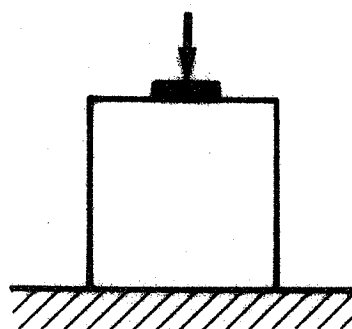


Fig. 6.2. Koncentreret belastning på uarmeret beton.

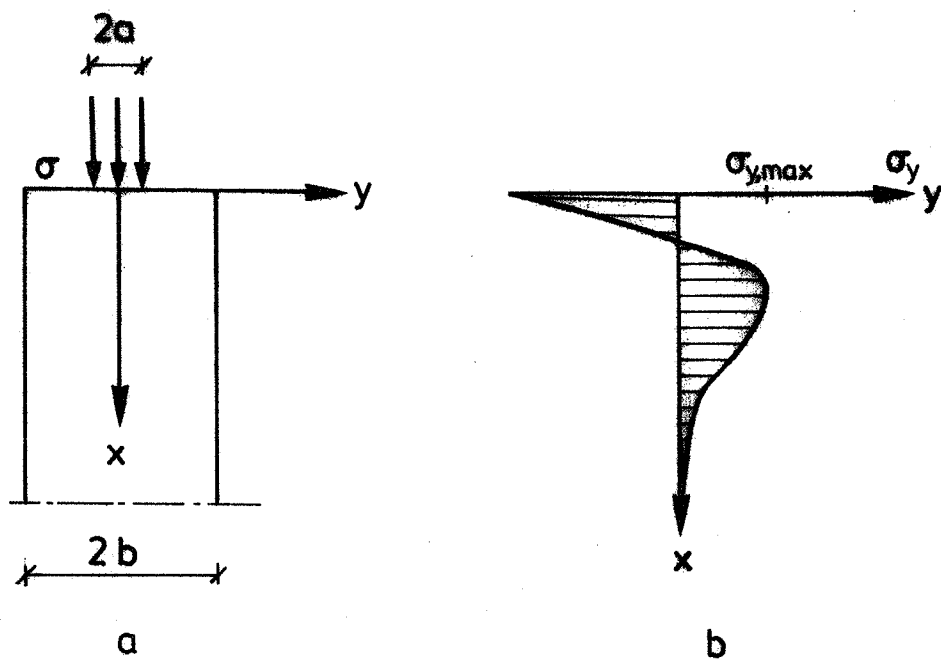


Fig. 6.3. a. Koncentreret last på halvuendelig stang.
b. Tværspænding langs x-aksen.

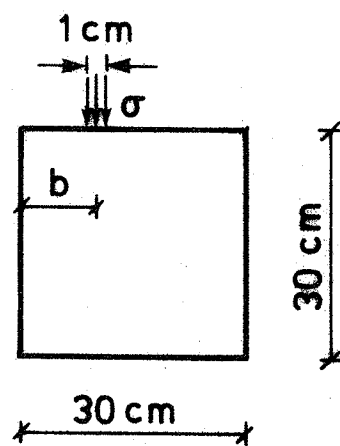


Fig. 6.4. Forsøg af Rathkjen [73.2].

$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Iyengar	0,029	0,042	0,072	0,085	0,110
STRU DL	0,027	0,038	0,066	0,080	0,110

Tabel 6.1: Værdi af $\frac{\sigma_{y,\max}}{\sigma}$ bestemt ved Iyengars metode og ved elementmetoden med ICES STRU DL-II.

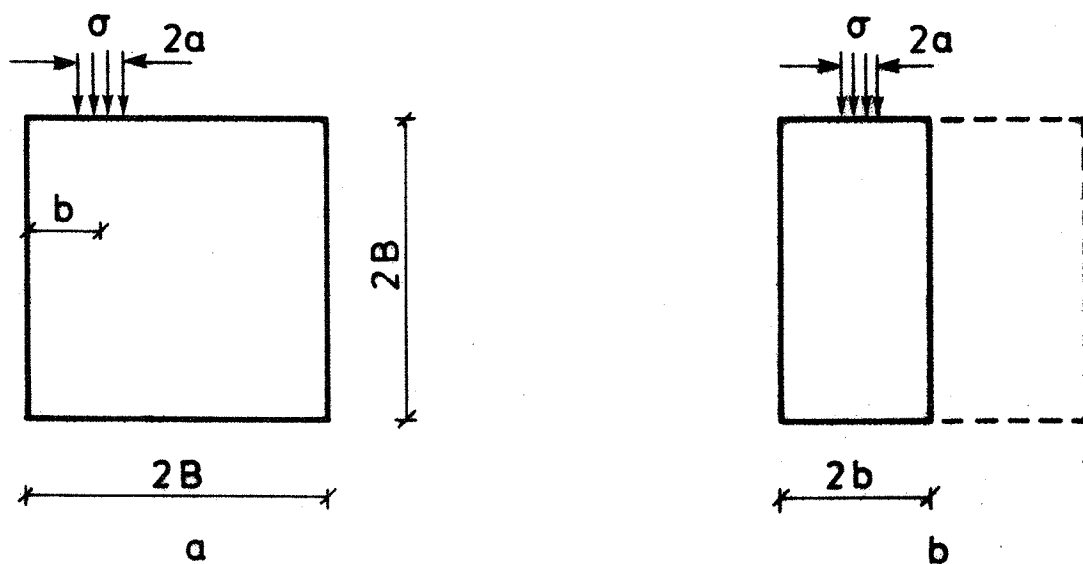


Fig. 6.5. a. Ekscentrisk belastning.
b. Regningsmæssig bredde efter Guyon.

$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
Iyengar	0,015	0,022	0,042	0,072	0,100
STRU DL	0,014	0,019	0,037	0,068	0,093

Tabel 6.2: Værdi af $\frac{\sigma_{y, \max}}{\sigma}$ bestemt ved Iyengar's metode for symmetrisk last og ved elementmetoden for $a/B = 1/30$, jfr. fig.6.5a.

$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{\sigma_t}{\sigma_f}$	0,043		0,055	0,088	0,096
	0,045	0,040	0,063	0,059	0,081
	0,025	0,031	0,042	0,048	0,058
	0,030	0,028	0,035	0,047	0,060
	0,027	0,029	0,045	0,059	0,069
Middel	0,034	0,032	0,048	0,060	0,073

Tabel 6.3: Forsøgsresultater fra [73.2]. σ_t er sat til den målte spaltetrækstyrke

$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{\sigma_t}{\sigma_f}$	0,031		0,038	0,060	0,065
	0,031	0,028	0,043	0,046	0,056
	0,024	0,027	0,033	0,043	0,055
	0,022	0,024	0,032	0,040	0,050
	0,031	0,029	0,039	0,056	0,074
Middel	0,028	0,027	0,037	0,049	0,060

Tabel 6.4: Forsøgsresultater fra [73.2]. σ_t er bestemt ved (6-5)

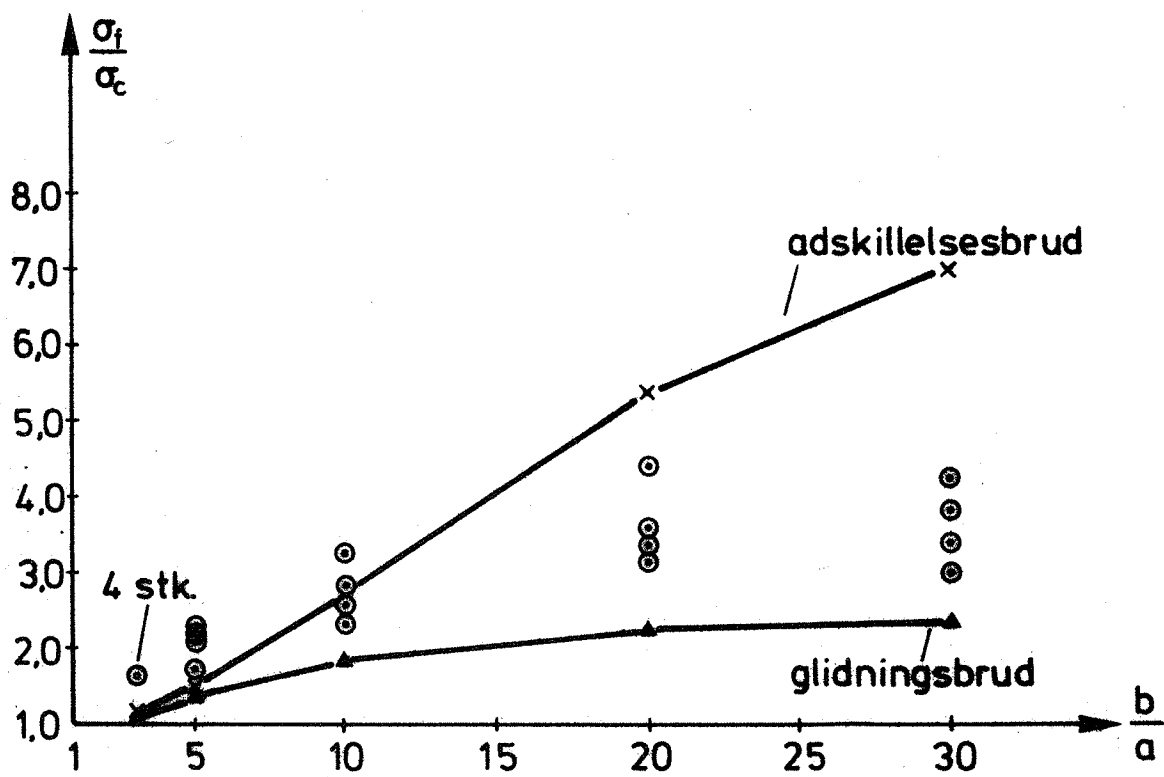


Fig. 6.6. Forsøgsresultater fra [73.2] og resultater fra elementberegninger.

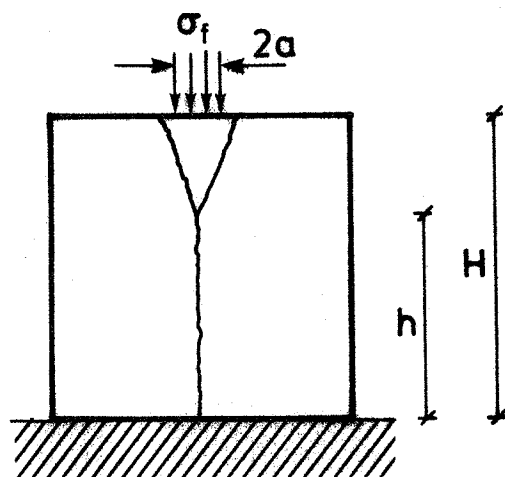


Fig. 6.7. Brudfigur.

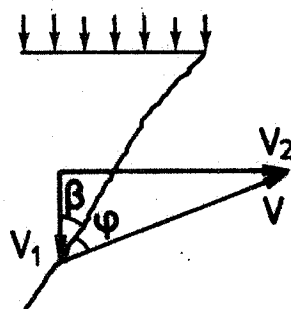


Fig. 6.8. Bevægelser i brudfiguren fig. 6.7.

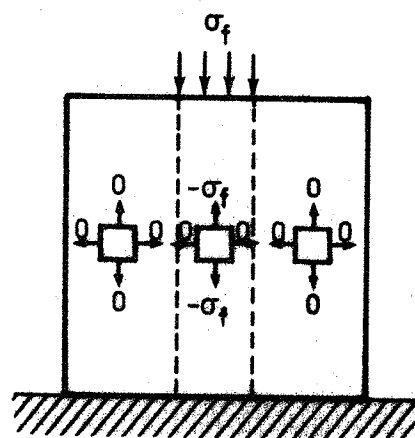


Fig. 6.9. Tilladelig spændingsfordeling.

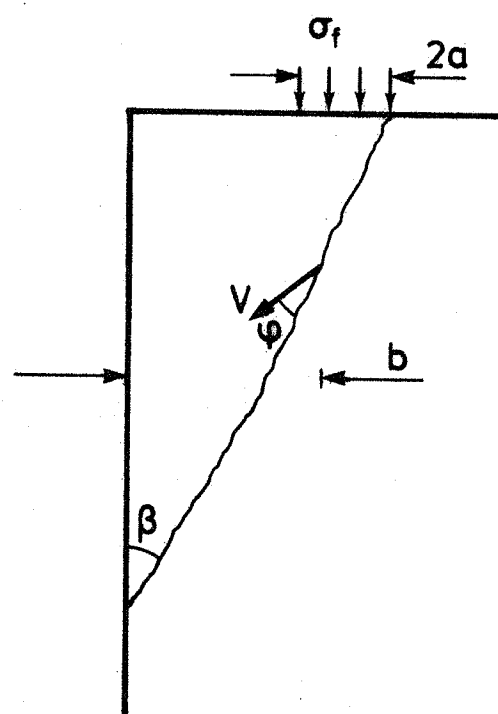


Fig. 6.10. Brudfigur.

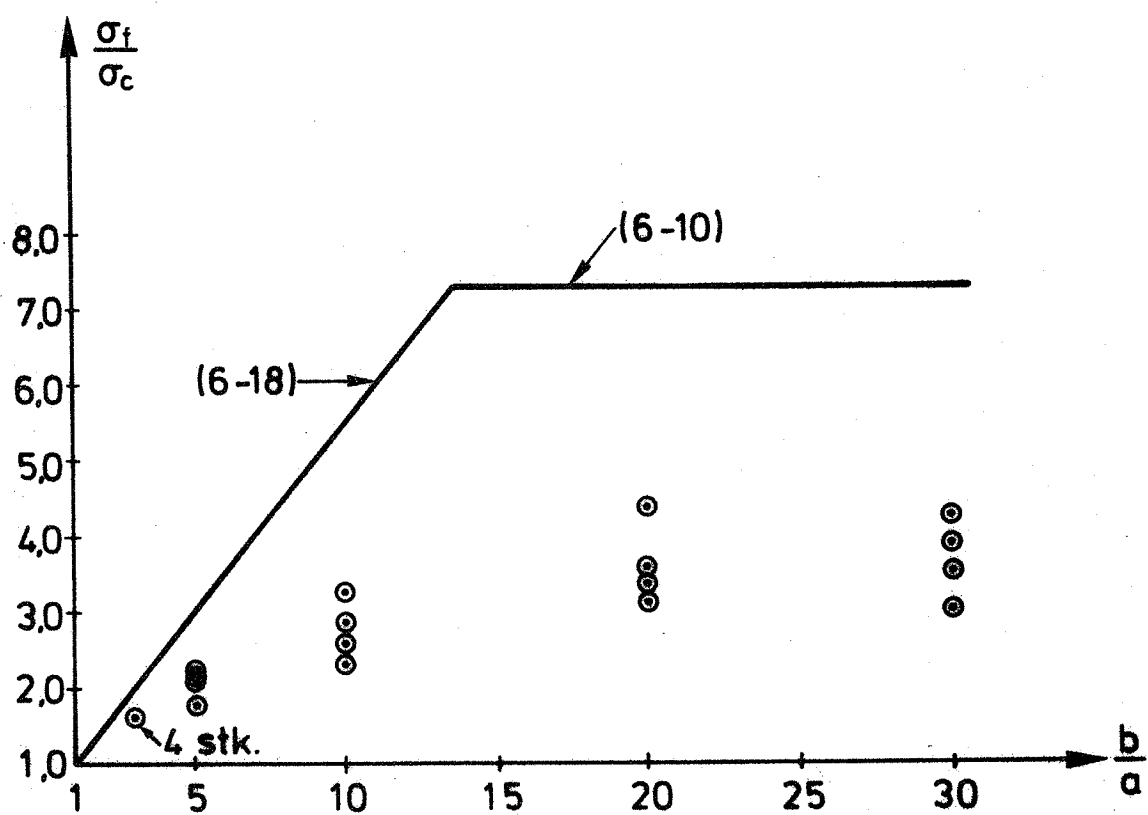


Fig. 6.11. Forsøgsresultater sammenlignet med plastiske beregninger.

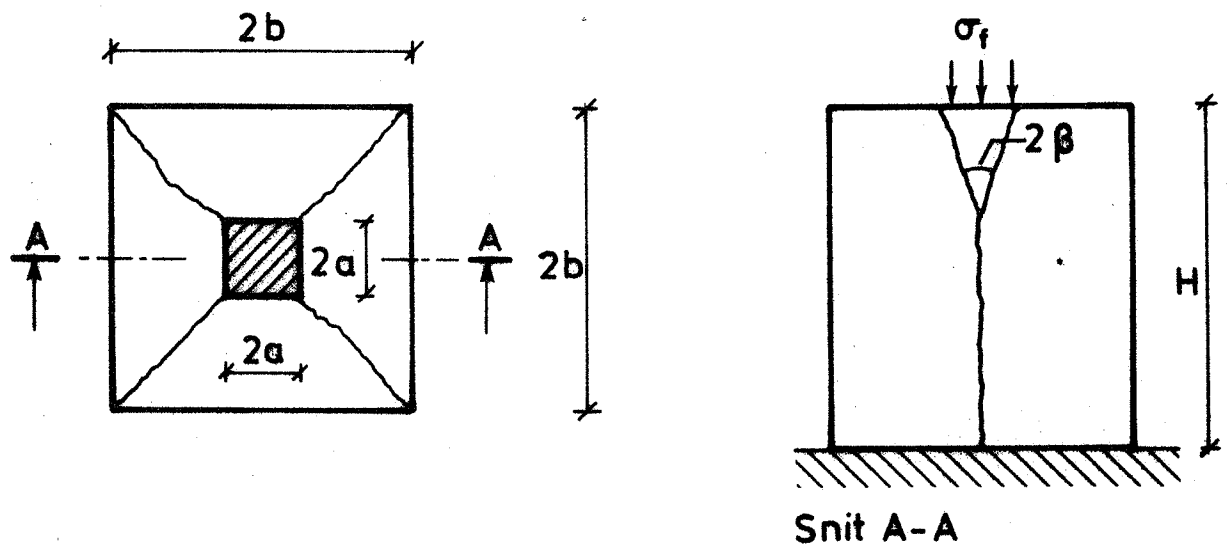


Fig. 6.12. Belastet prisme med rumlig brudfigur.

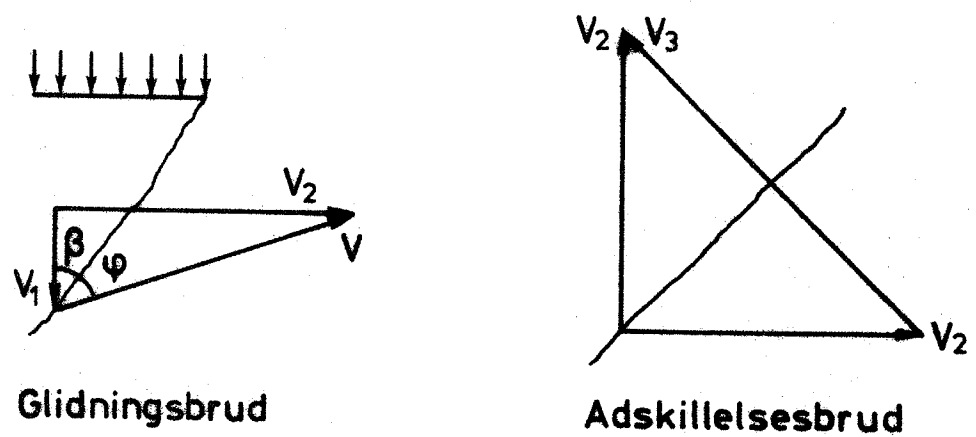


Fig. 6.13. Bevægelser i brudfiguren fig. 6.12

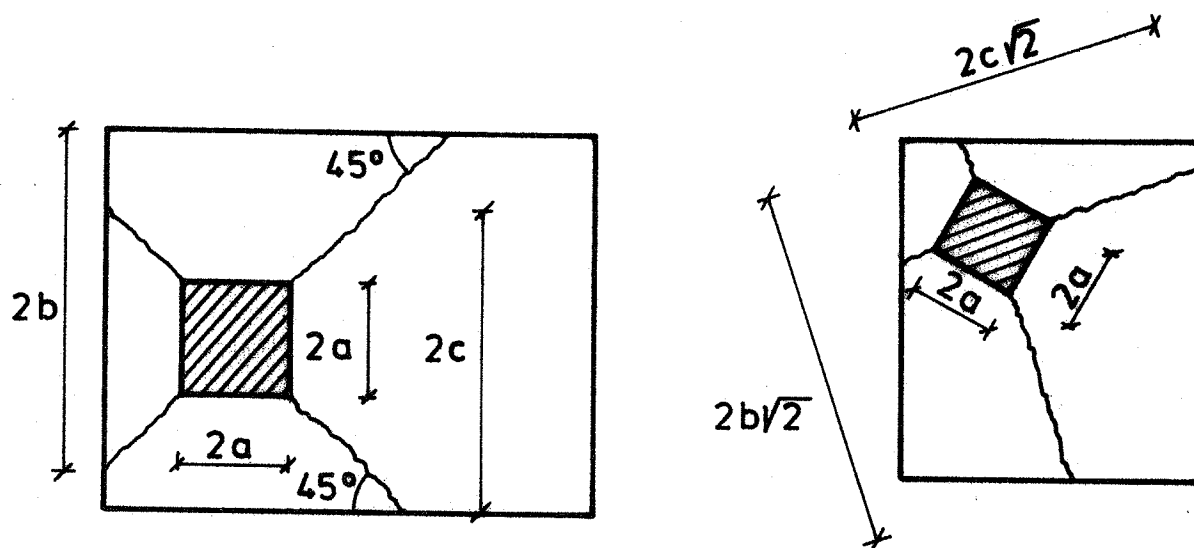


Fig. 6.14. Brudfigurer ved usymmetrisk belastning.

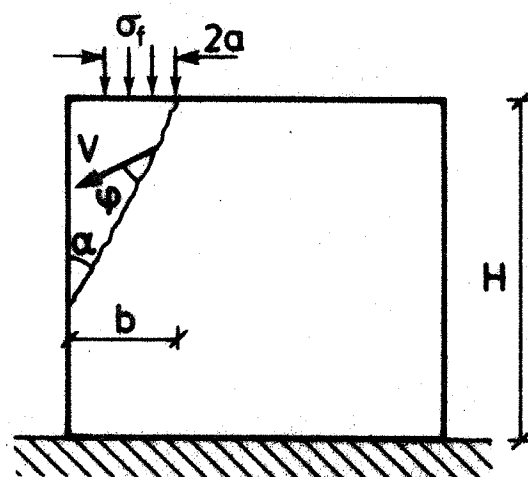
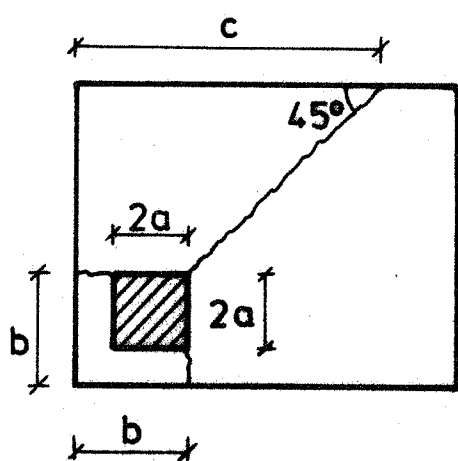


Fig. 6.15. Brudfigur.

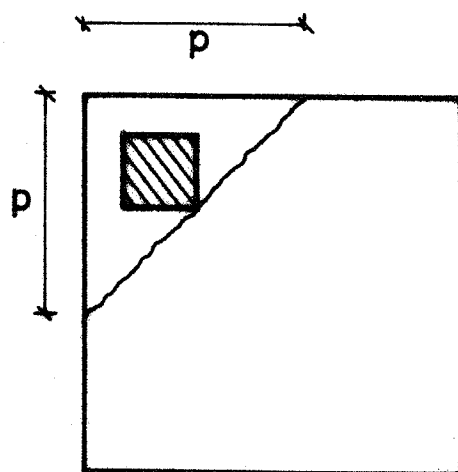


Fig. 6.16. Brudfigur.

$\sigma_c \cdot \frac{2Hb}{\sigma^2}$	8	16	24	32	48	64	
55,5 MN/m ²	1,28	1,63	1,92	2,14	2,40	2,80	Forsøg
	÷	2,25	2,85	3,42	4,56	5,62	Teori
31,0 MN/m ²	1,57	2,07	2,39	2,68	3,32	4,15	Forsøg
	÷	÷	÷	÷	5,45	6,35	Teori

Tabel 6.5: Værdi af $\frac{\sigma_f}{\sigma_c}$ fra forsøg
[60.2] og fra beregninger
(6-25) og (6-26)

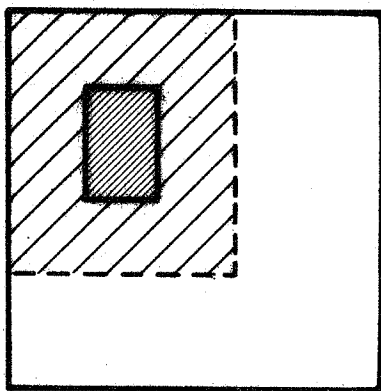


Fig. 6.17. Regningsmæssigt F ved ikke central belastning.

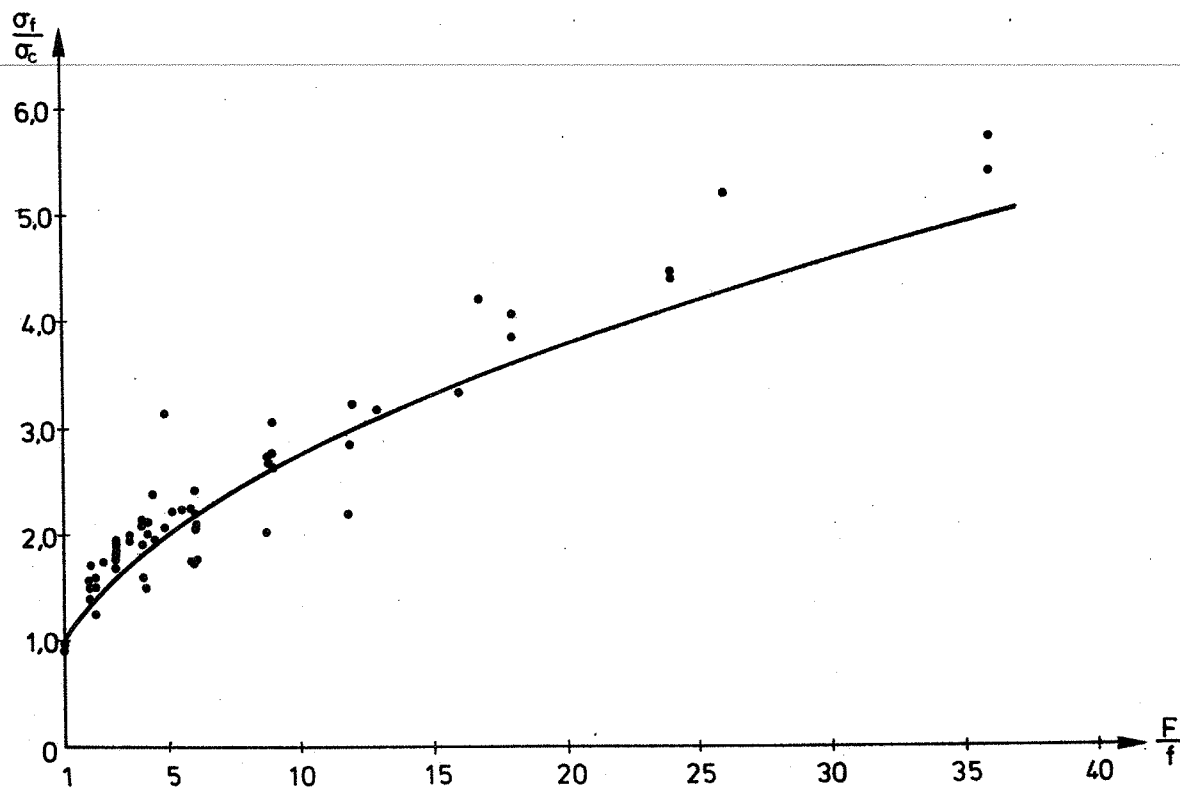


Fig. 6.18. Forsøg af Hawkins [68.2] og (6-33).

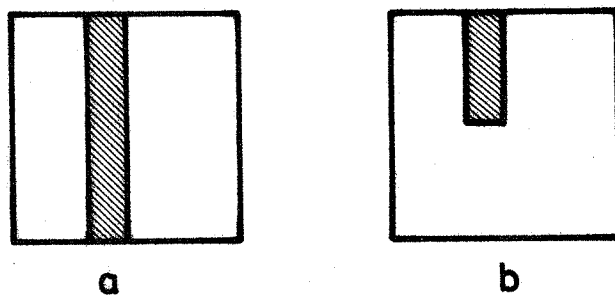


Fig. 6.19. Belastningsplaceringer med samme $\frac{F}{f}$.



Fig. 6.20. Belastningsplacering med $\frac{F}{f} = 1$.

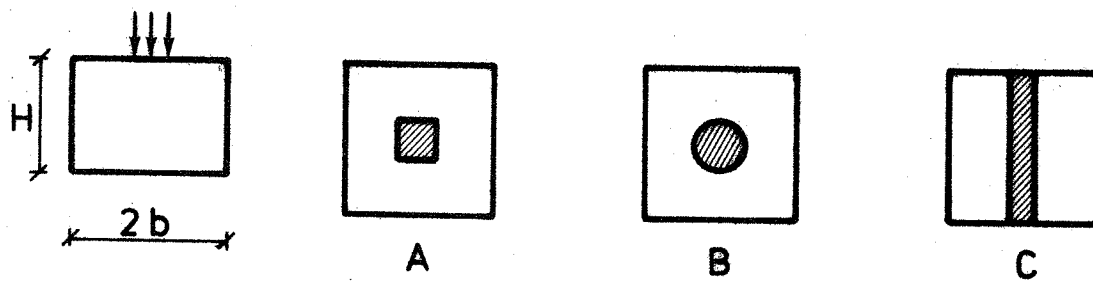


Fig. 6.21. Belastningsplaceringer. Typebetegnelser anvendt i tabel 6.6.

Kilde	Type	$\frac{F}{f}$	$\frac{H}{2b}$	Resultat
[53.2]	B	29,2	1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$	÷
[60.2]	A	2 - 16	1, $\frac{1}{2}$	+
[65.4]	A	1 - 44,4	2 - $\frac{1}{2}$	+
	C	1 - 25	2 - 0,6	+
[73.3]	A	4, 8, 15, 16	1,5 - 0,35	÷

÷ : $\frac{\sigma_f}{\sigma_c}$ aftager med faldende $H/2b$

+ : $\frac{\sigma_f}{\sigma_c}$ stiger med faldende $H/2b$

Tabel 6.6: Hovedresultater af forsøg med højdens indflydelse

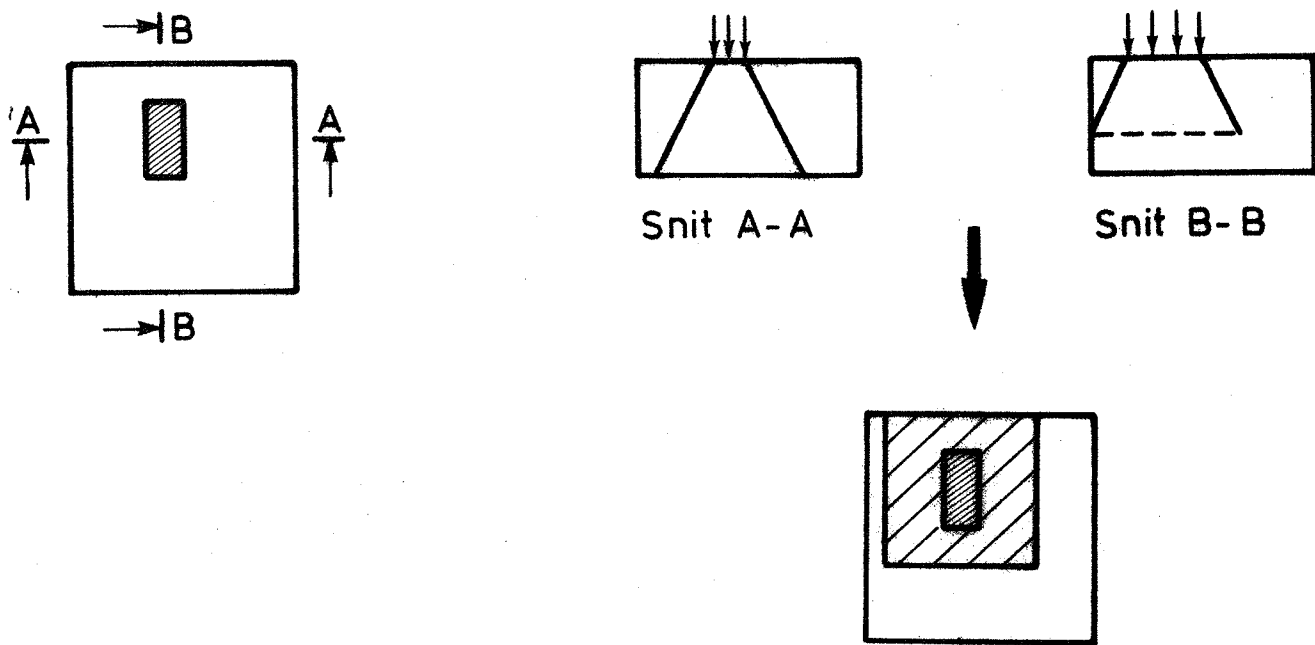


Fig. 6.22. Eksempel på bestemmelse af F .

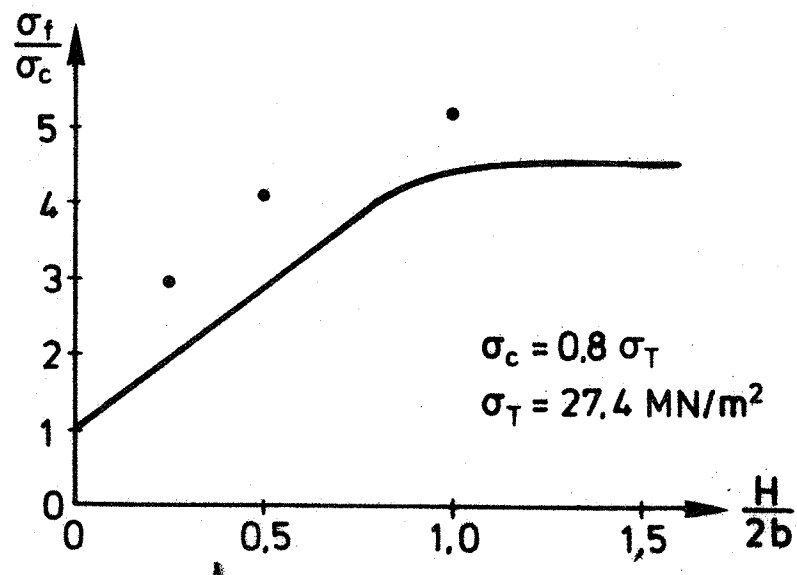


Fig. 6.23. Højdens indflydelse. Forsøg af Meyerhof [53.2].

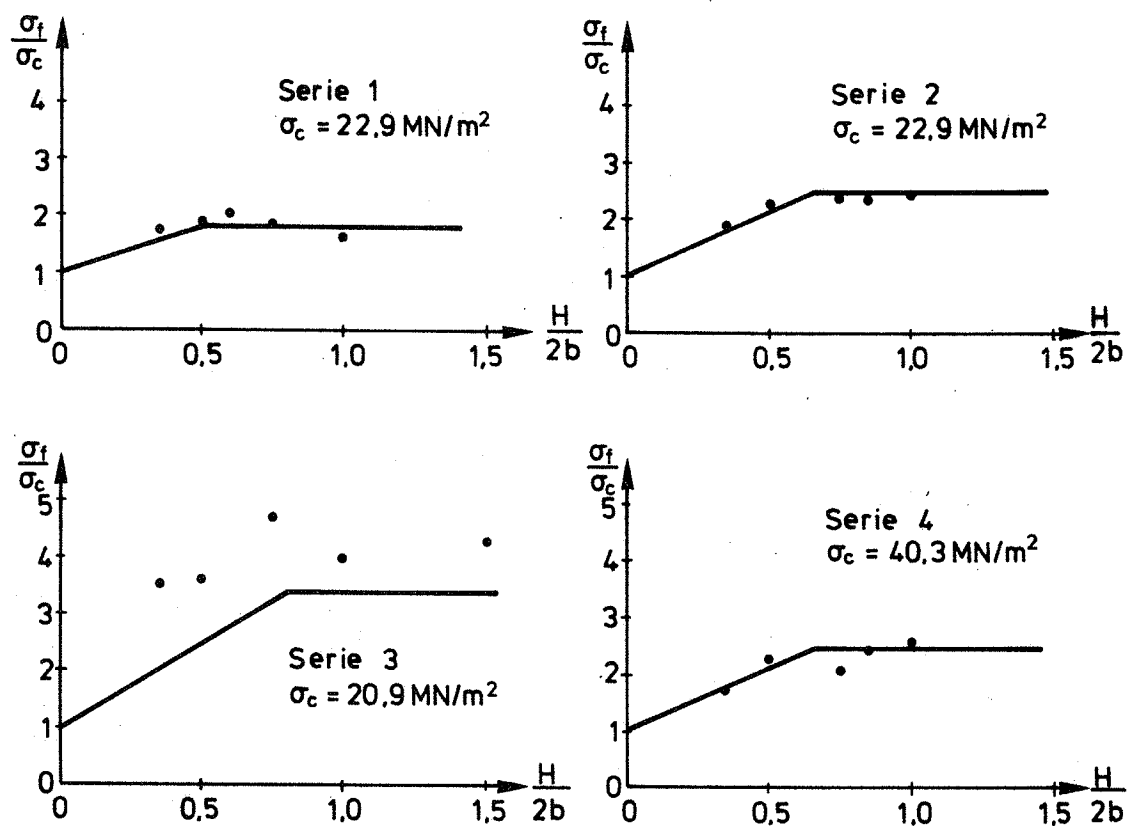


Fig. 6.24. Højdens indflydelse. Forsøg af Houborg [73.3].

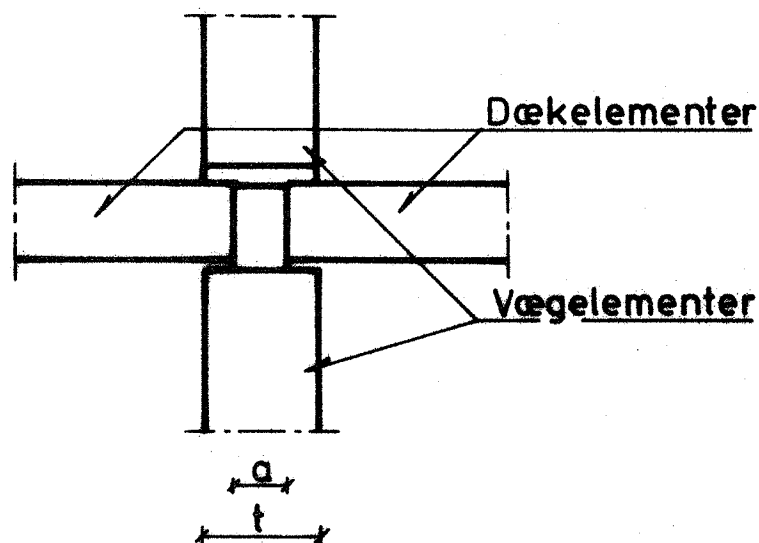


Fig. 6.25. Princip i etagekryds.

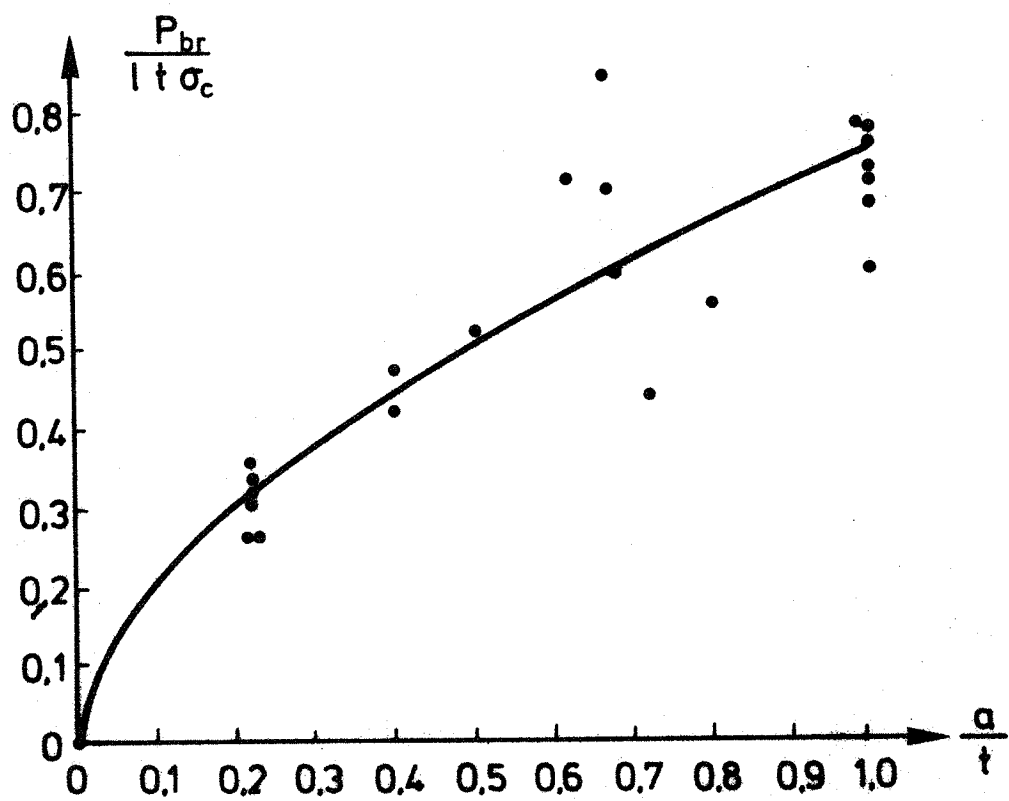


Fig. 6.26. (c) sammenlignet med forsøg fra [76.1].

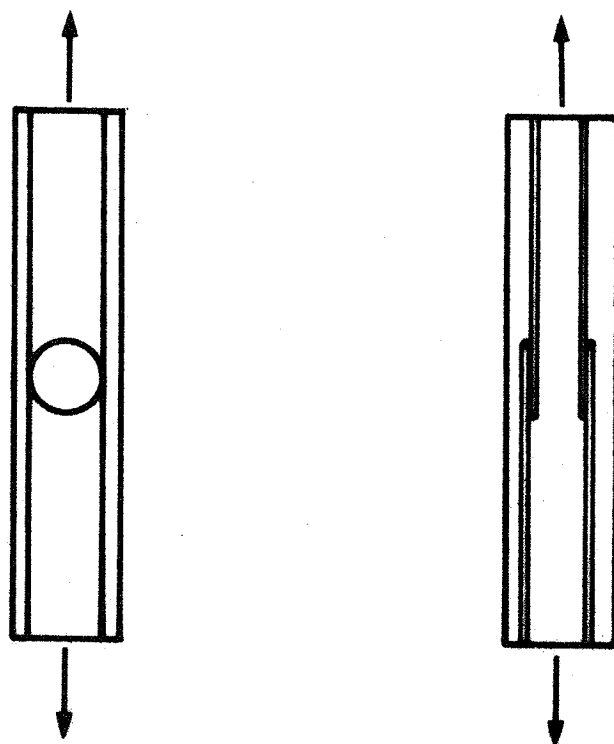


Fig. 6.27. Træk i bøjlesamling.

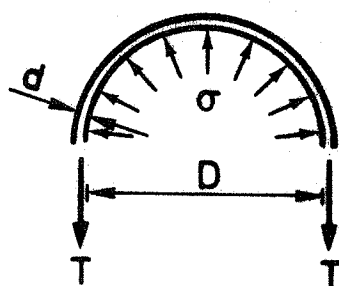
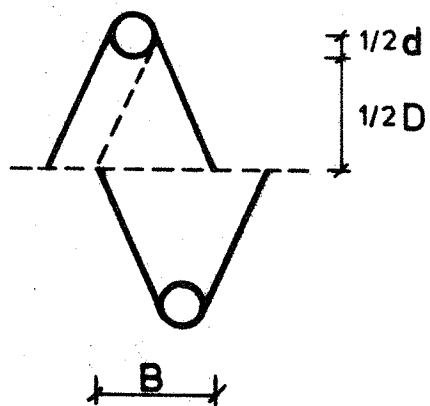
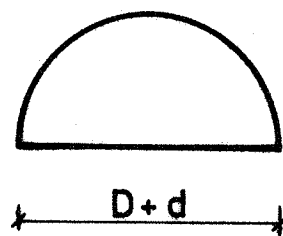


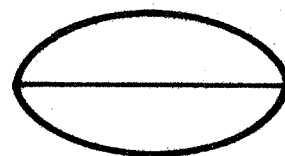
Fig. 6.28. Kræfter i bøjle.



a Midtersnit

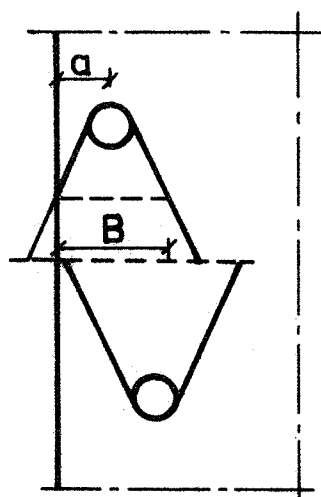


b

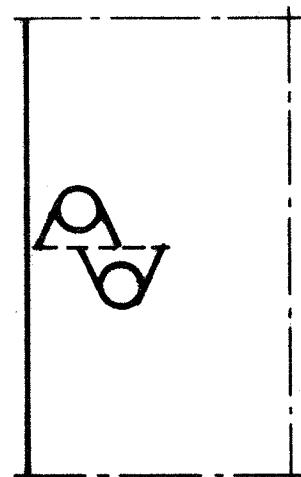


c

Fig. 6.29. Bestemmelse af F. Tilfælde 1.



a Midtersnit

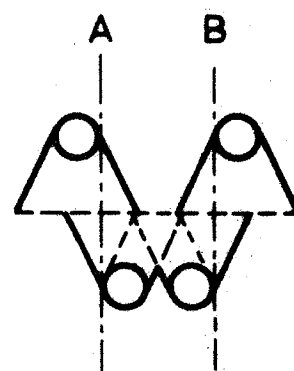
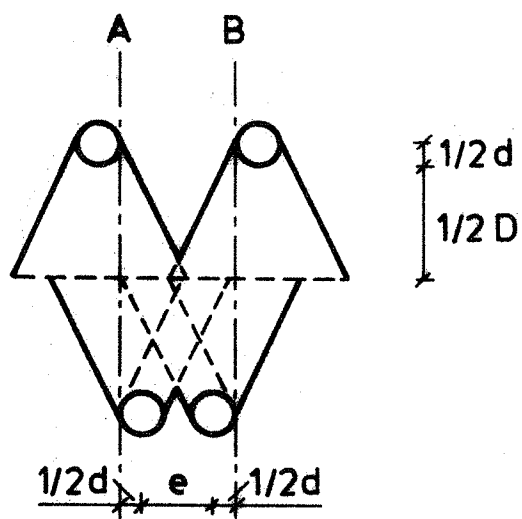


b Snit

Fig. 6.30. Bestemmelse af F. Tilfælde 2.

Nr	D mm	d mm	$\sigma_{f, \text{teori}}$ N/mm ²	$\sigma_{f, \text{forsøg}}$ N/mm ²	$\frac{\sigma_{f, \text{forsøg}}}{\sigma_{f, \text{teori}}}$
A3	120	12	54,4	46,6	0,86
A4	120	12	54,4	49,4	0,91
B1	121	12	53,1	54,0	1,02
B2	90	12	51,9	63,2	1,22

Tabel 6.7: Sammenligning af (f) med forsøg fra [73.5]



a Midtersnit

b Snit

Fig. 6.31. Bestemmelse af F. Tilfælde 3.

Nr	D mm	d mm	e mm	$\sigma_{f,teori}$ N/mm ²	$\sigma_{f,forsøg}$ N/mm ²	$\frac{\sigma_{f,forsøg}}{\sigma_{f,teori}}$
C1	170	12	43	612	466	0,76
C2	120	12	37	526	357	0,68
A1	121	12	36	524	430	0,82
A2	121	12	39	530	482	0,91

Tabel 6.8: Sammenligning af teori og forsøg fra [73.5]. Tilfælde 3.

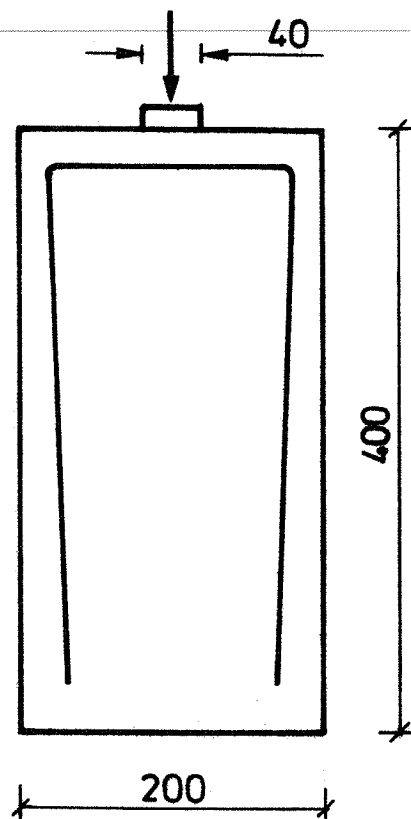


Fig. 7.1. Prøvelegeme fra [75.4].

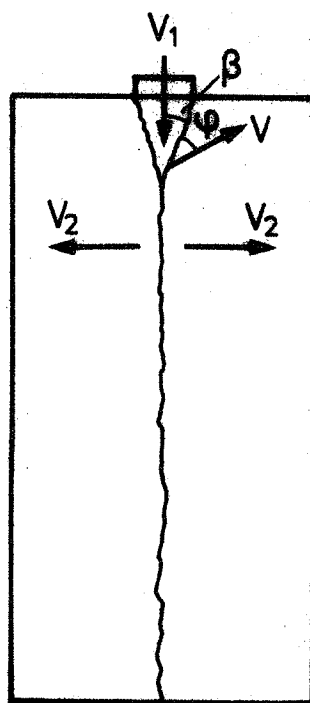


Fig. 7.2. Brudfigur.

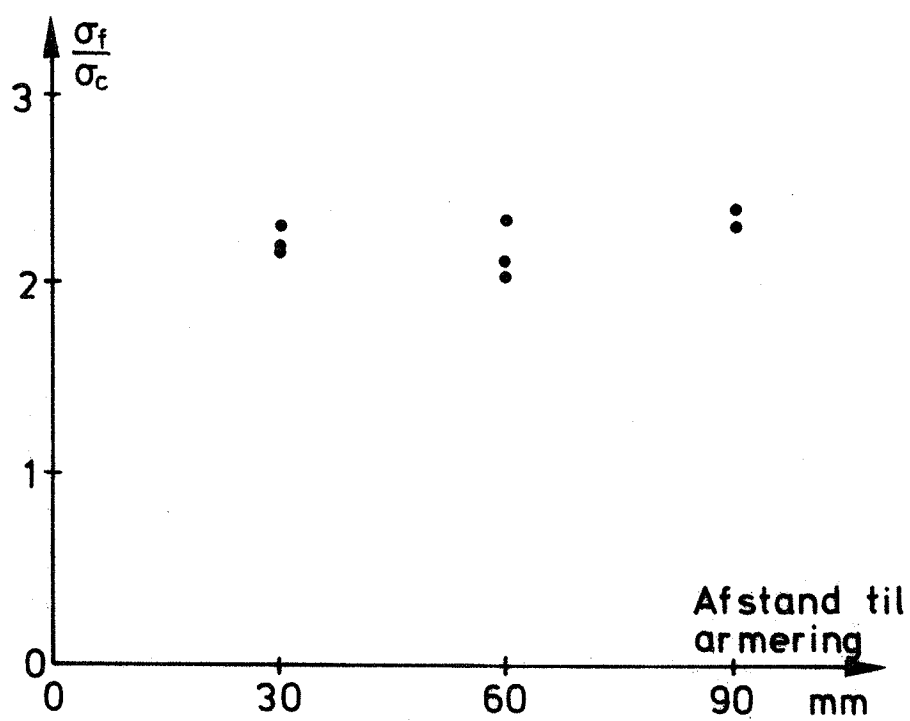


Fig. 7.3. Brudbæreevne. Tværarmering 3R10. Forsøg fra [75.4].

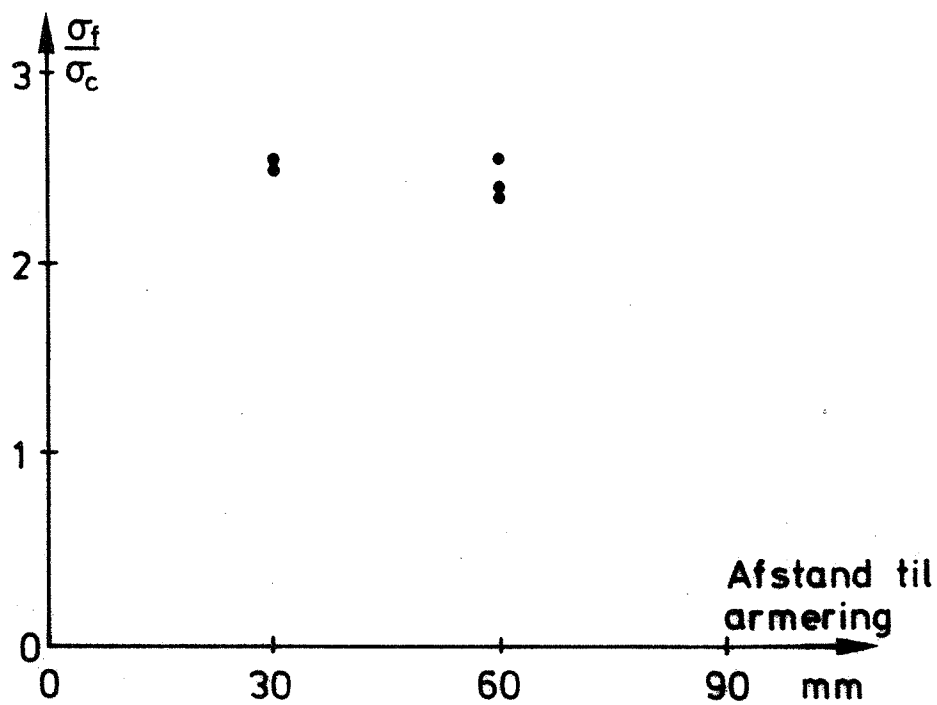


Fig. 7.4. Brudbæreevne. Tværarmering 4R10. Forsøg fra [75.4].

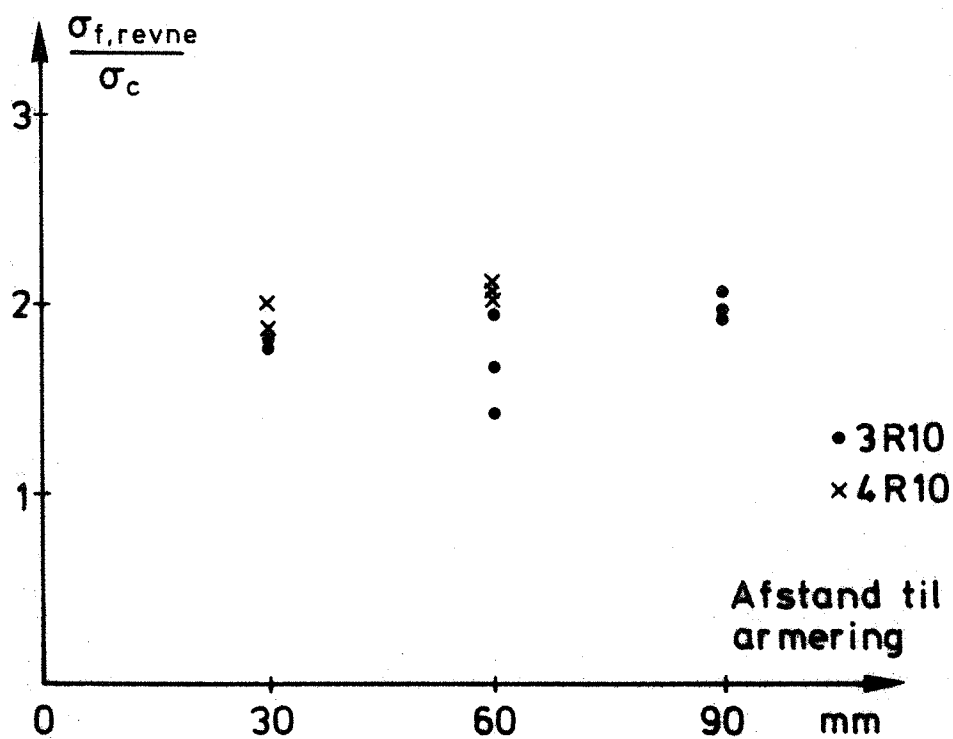


Fig. 7.5. Revnelast. Forsøg fra [75.4].

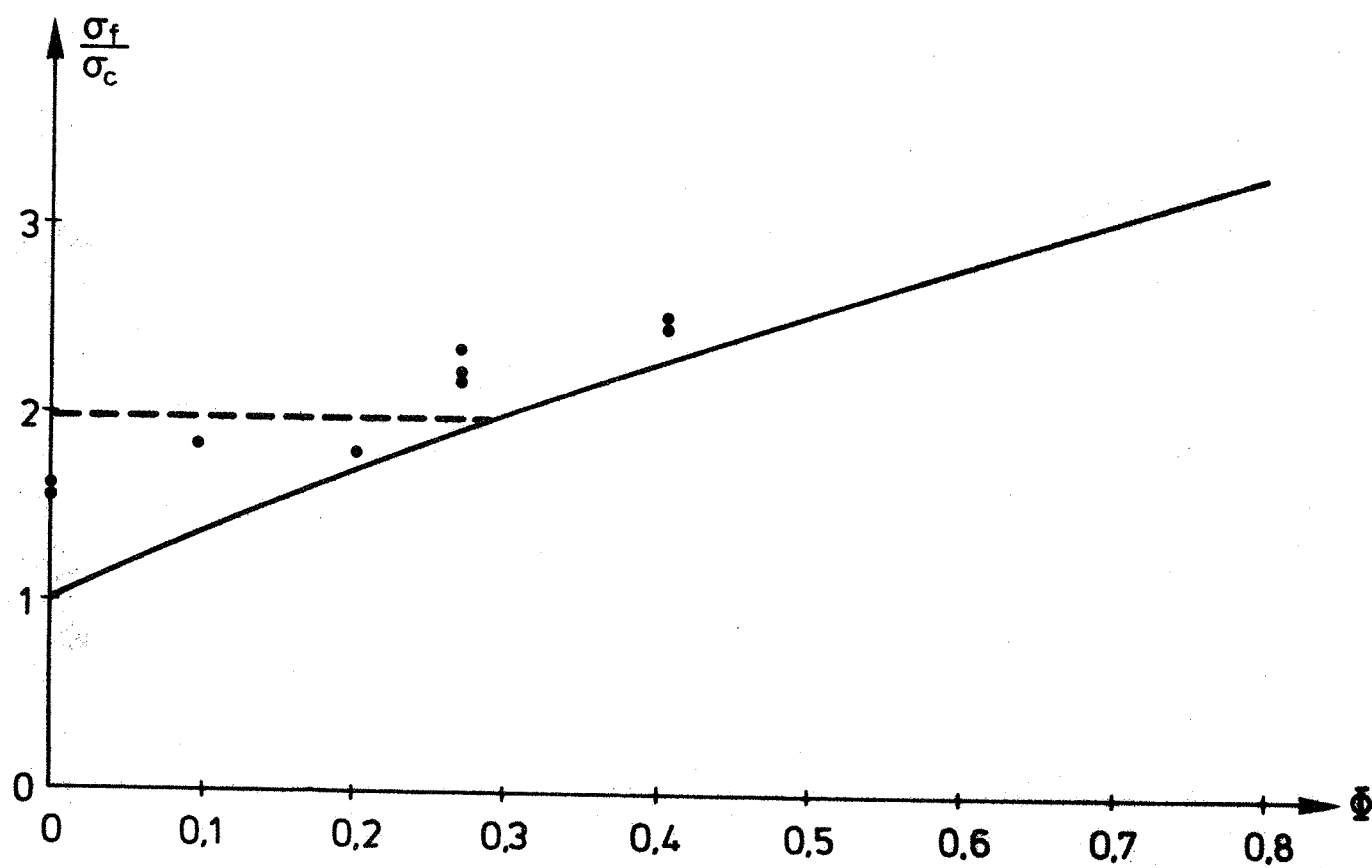


Fig. 7.6. Sammenligning af (7-10) med forsøg fra [75.4].

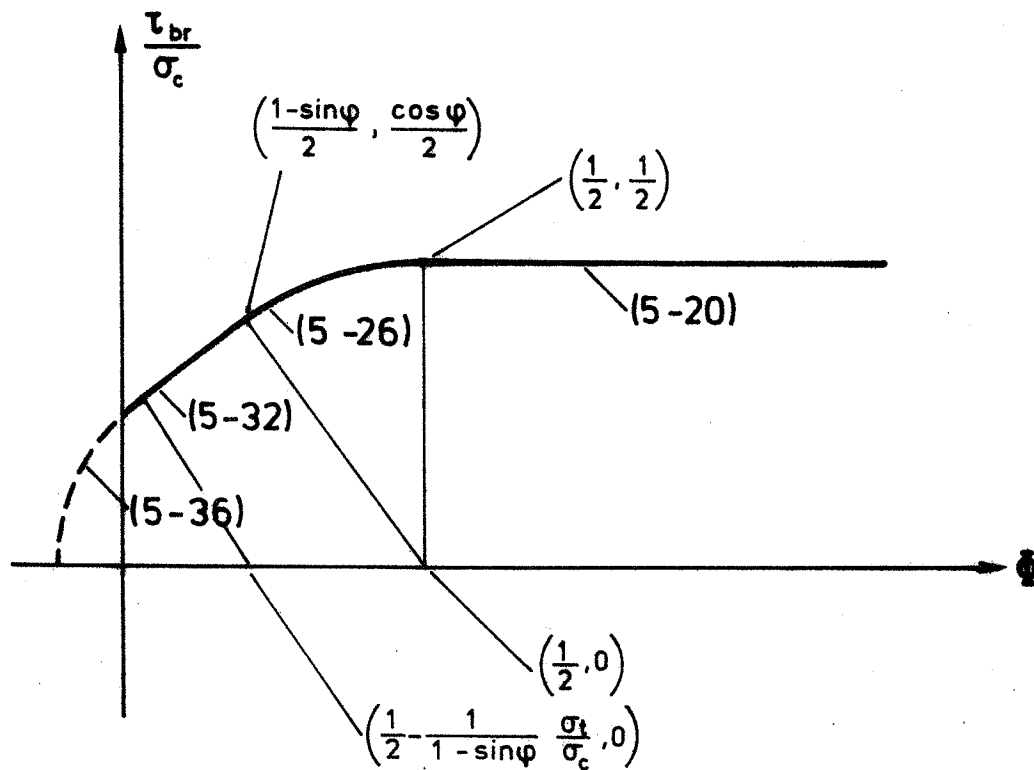


Fig. 5.4. Bæreevne ved plan spændingstilstand.

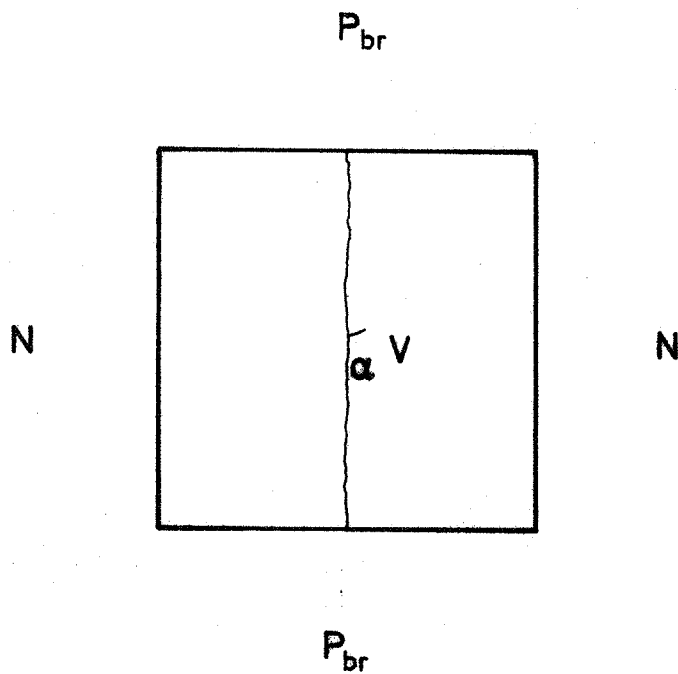


Fig. 5.5. Brudfigur for forskydning med normalkraft.

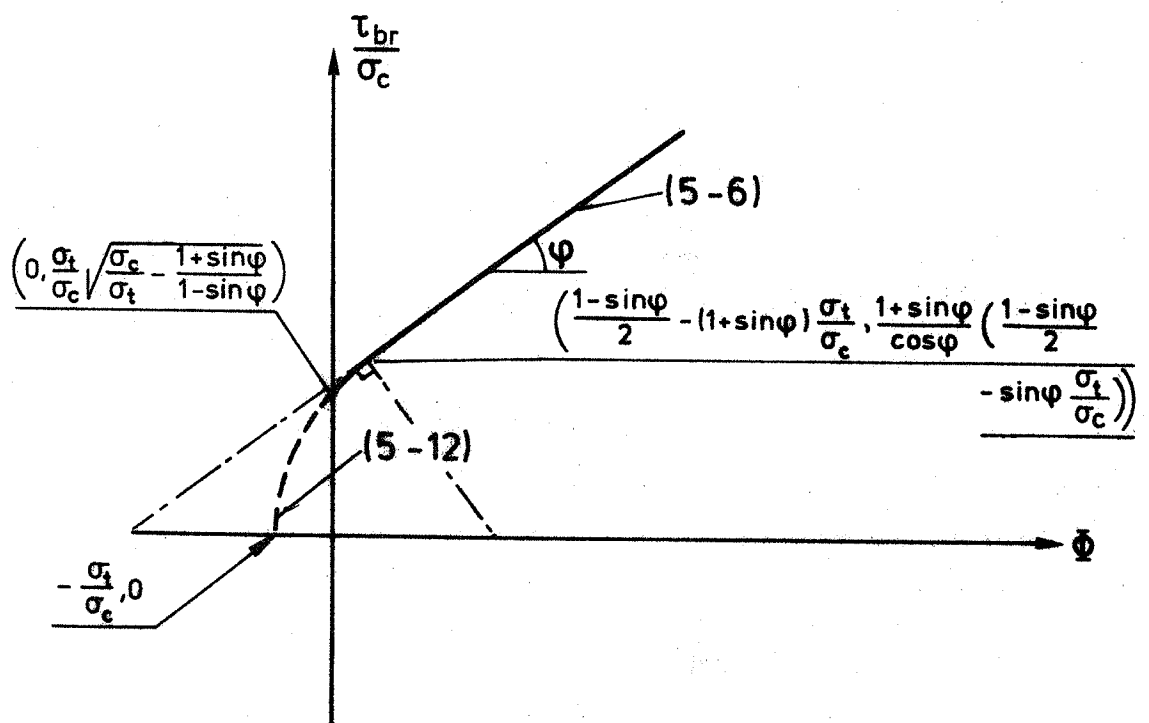


Fig. 5.3. Bæreevne ved plan deformationstilstand.

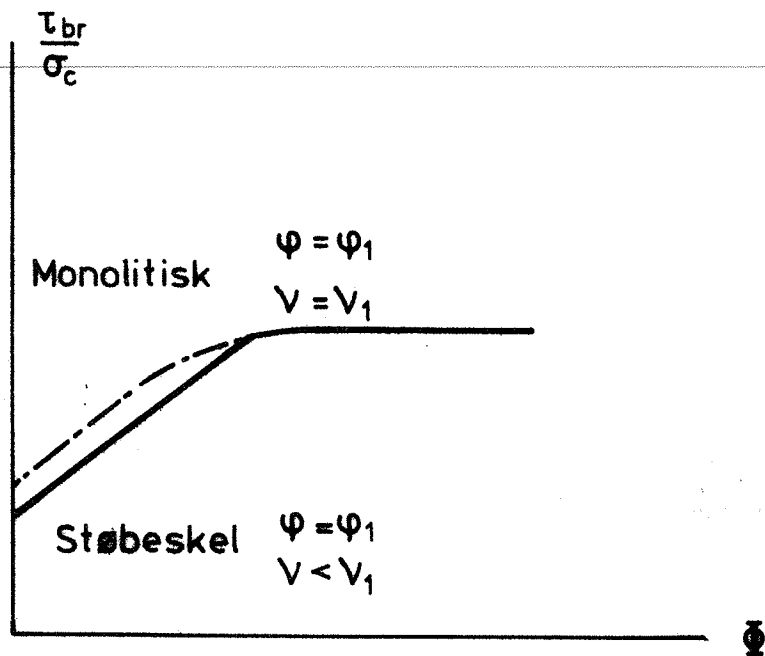


Fig. 5.9. Princip i støbeskels bæreevne.

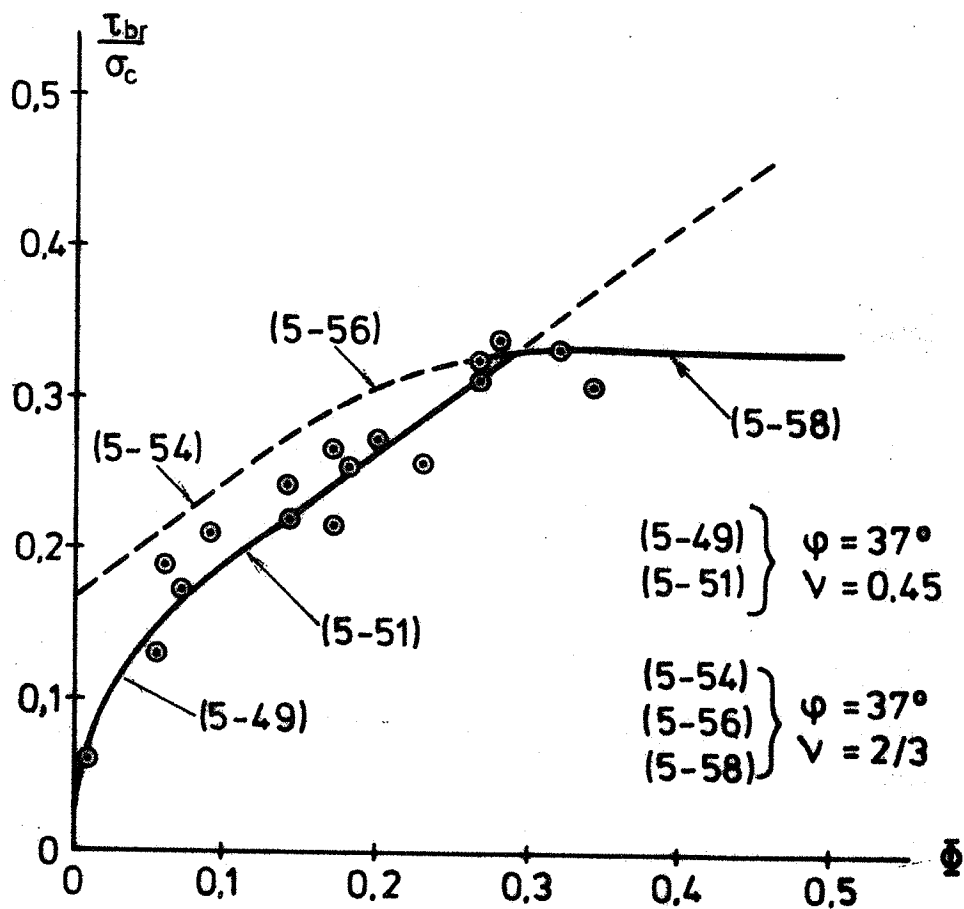


Fig. 5.10. Resultater med revnede prøvelegemer fra [69.5].

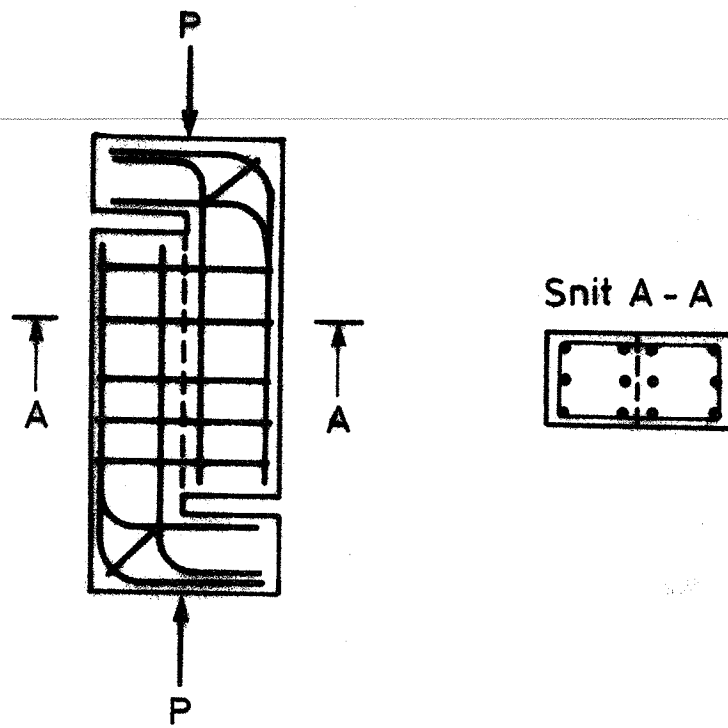


Fig. 5.6

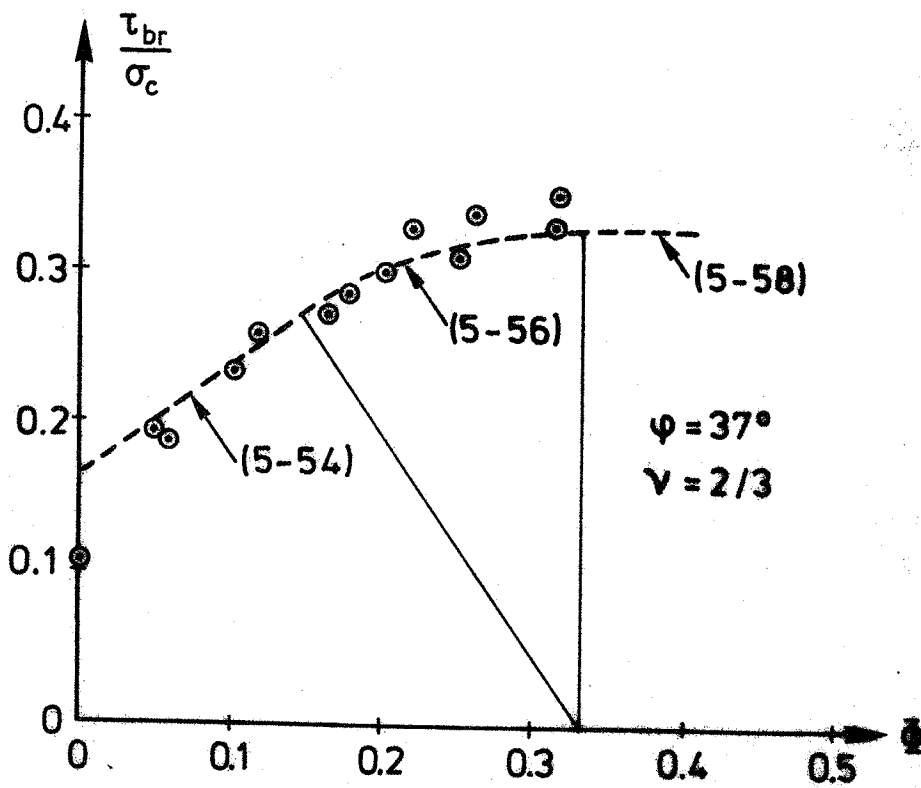


Fig. 5.7

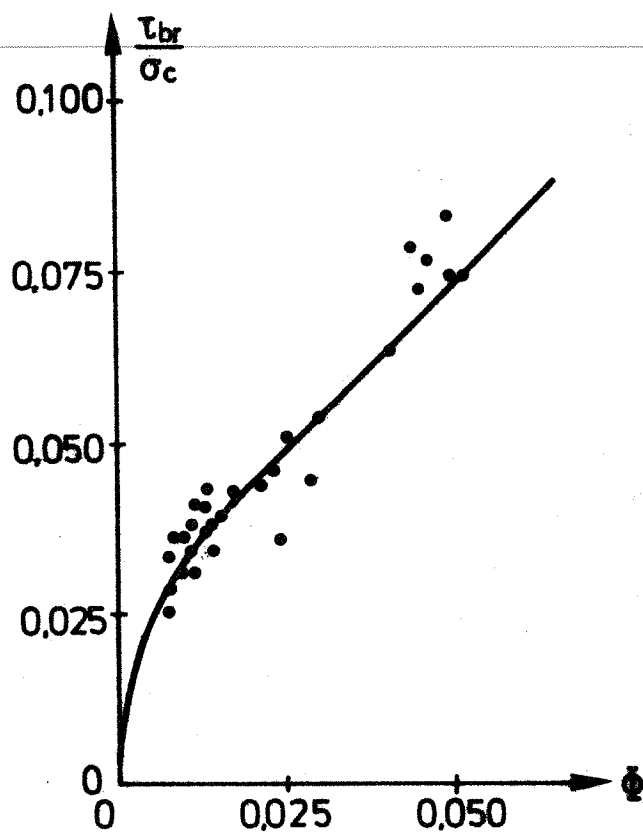


Fig. 5.17. Forsøg af Pommeret (fra [74.3]) med $\frac{B}{A} = 0,22$ og (e) og (f).

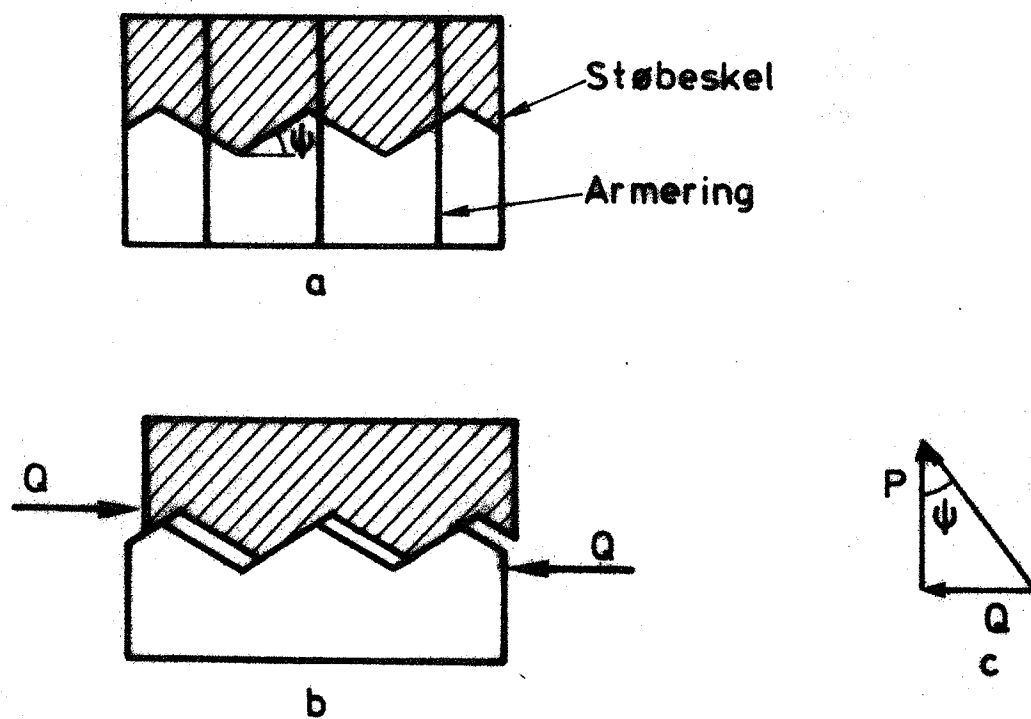


Fig. 5.18. Forskydning i støbeskel.

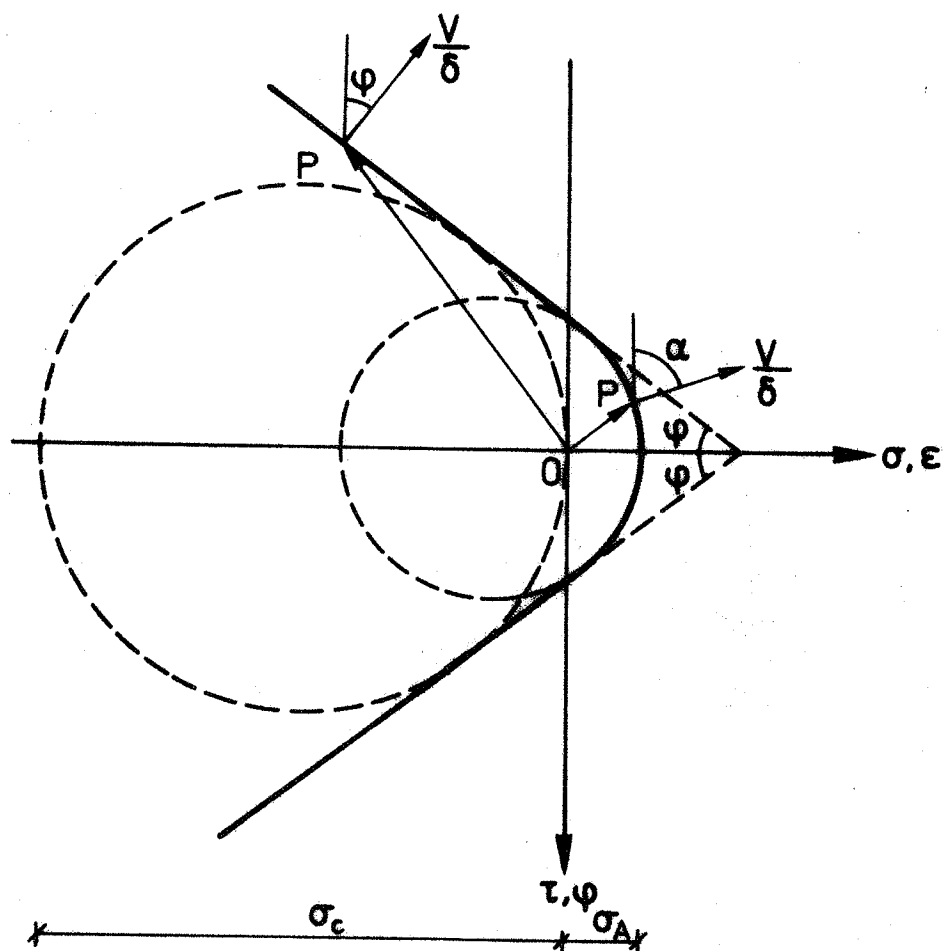


Fig. 3.6. Flydebetingelse med tøjningsvektorer.