



Afdelingen for Bærende Konstruktioner  
Department of Structural Engineering  
Danmarks Tekniske Højskole · Technical University of Denmark

## Jernbetonbjælkers Bæreevne - rene og kombinerede påvirkninger

Bent Feddersen

## INDHOLDSFORTEGNELSE

|                                                   | Side |
|---------------------------------------------------|------|
| FORORD .....                                      | I    |
| RESUME .....                                      | II   |
| SUMMARY .....                                     | III  |
| SYMBOLER .....                                    | IV   |
| 1. INDLEDNING .....                               | 1    |
| 2. TEORETISKE OG FYSISKE FORUDSÆTNINGER .....     | 5    |
| 2.1 Fra den generelle plasticitetsteori .....     | 5    |
| 2.1.1 Flydebetingelsen .....                      | 5    |
| 2.1.2 Flydeloven .....                            | 6    |
| 2.1.3 Statiske og geometriske betingelser ..      | 8    |
| 2.1.4 Ekstremalprincipperne .....                 | 10   |
| 2.2 Beton .....                                   | 11   |
| 2.2.1 Betons brudbetingelse .....                 | 11   |
| 2.2.2 Betons enaksede trykstyrke .....            | 15   |
| 2.2.3 Betons arbejdskurve .....                   | 36   |
| 2.3 Armering .....                                | 43   |
| 2.4 Plasticitetsteori for beton og jernbeton .... | 45   |
| 2.4.1 Teoretisk grundlag .....                    | 45   |
| 2.4.2 Betons plastiske arbejde .....              | 47   |
| 2.4.3 Effektivitetsfaktoren .....                 | 50   |
| 3. BLAKSTALE SPENDINGSTILSTANDE GENERELT .....    | 58   |
| 3.1 Beskrivelse af legeme .....                   | 58   |
| 3.2 Beregningsforudsætninger .....                | 60   |
| 3.3 Bæreevneudtryk .....                          | 63   |
| 3.3.1 Trækflydebetingelsen .....                  | 63   |
| 3.3.2 Trykflydebetingelsen .....                  | 67   |
| 3.3.3 Overgangsflydebetingelsen .....             | 69   |
| 3.4 Geometrisk mulig brudfigur .....              | 73   |
| 3.5 Specialtilfældet $\sigma_y = 0$ .....         | 74   |
| 3.6 Skævvinklet armering .....                    | 75   |
| 3.7 Armeringsbestemmelse .....                    | 78   |

Jernbetonbjælkers Bæreevne - rene og kombinerede påvirkninger  
 Copyright © by Bent Feddersen 1990  
 Tryk:  
 Afdelingen for Bærende Konstruktioner  
 Danmarks Tekniske Højskole  
 Lyngby  
 ISBN 87-7740-038-0

|       |                                                               |     |
|-------|---------------------------------------------------------------|-----|
| 4.    | REN BØJNING .....                                             | 81  |
| 4.1   | Bjælkebeskrivelse .....                                       | 81  |
| 4.2   | Bjælker uden trykarmring .....                                | 83  |
| 4.2.1 | Bæreevneudtryk .....                                          | 83  |
| 4.2.2 | Geometrisk mulig brudfigur .....                              | 86  |
| 4.2.3 | Effektivitetsfaktoren .....                                   | 87  |
| 4.3   | Bjælker med trykarmring .....                                 | 92  |
| 4.4   | Andre tværsnit og armeringsudformninger .....                 | 95  |
| 4.4.1 | Armeringen generelt .....                                     | 95  |
| 4.4.2 | Generel beregningsmodel .....                                 | 96  |
| 4.4.3 | Ikke rektangulære trykzoner .....                             | 97  |
| 4.5   | Armeringsbestemmelse .....                                    | 100 |
| 5.    | BØJNING MED NORMALKRAFT .....                                 | 102 |
| 5.1   | Bjælkebeskrivelse .....                                       | 102 |
| 5.2   | Beregningsudtryk .....                                        | 103 |
| 5.3   | Effektivitetsfaktoren .....                                   | 108 |
| 5.4   | Armeringsbestemmelse .....                                    | 110 |
| 6.    | FORSKYDNING .....                                             | 112 |
| 6.1   | Bjælkebeskrivelse .....                                       | 112 |
| 6.2   | Statisk tilladelig spændingsfordeling .....                   | 114 |
| 6.2.1 | Spændingsfordelingen i en stringerbjælke ..                   | 114 |
| 6.2.2 | Bæreevneudtryk for en stringerbjælke ..                       | 117 |
| 6.2.3 | Generel spændingsfordeling .....                              | 120 |
| 6.2.4 | Simplificering af bæreevneudtryk .....                        | 122 |
| 6.3   | Geometrisk mulig brudfigur .....                              | 125 |
| 6.4   | Effektivitetsfaktoren .....                                   | 126 |
| 6.5   | Andre tværsnit og armeringsudformninger .....                 | 130 |
| 6.5.1 | Armeringen generelt .....                                     | 130 |
| 6.5.2 | Ikke rektangulære tværsnit .....                              | 136 |
| 6.6   | Armeringsbestemmelse .....                                    | 139 |
| 7.    | REN VRIDNING .....                                            | 143 |
| 7.1   | Bjælkebeskrivelse .....                                       | 143 |
| 7.2   | Statisk tilladelig spændingsfordeling .....                   | 146 |
| 7.2.1 | Ligevægtsbetingelser .....                                    | 146 |
| 7.2.2 | Normalarmerede bjælker .....                                  | 153 |
| 7.2.3 | Overarmerede bjælker .....                                    | 156 |
| 7.2.4 | Gyldighedsområderne for de enkelte<br>armeringstilfælde ..... | 157 |
| 7.2.5 | Bestemmelse af $\beta_l$ .....                                | 158 |
| 7.2.6 | Beregningsudtryk .....                                        | 162 |

|        |                                                   |     |
|--------|---------------------------------------------------|-----|
| 7.3    | Geometrisk mulig brudfigur .....                  | 163 |
| 7.4    | Effektivitetsfaktoren .....                       | 168 |
| 7.5    | Simplificering af beregningsudtryk .....          | 171 |
| 7.6    | Andre tværsnit og armeringsudformninger .....     | 173 |
| 7.7    | Armeringsbestemmelse .....                        | 179 |
| 8.     | KOMBINERET VRIDNING OG BØJNING .....              | 182 |
| 8.1    | Bjælkebeskrivelse .....                           | 182 |
| 8.2    | Statisk tilladelig spændingsfordeling .....       | 184 |
| 8.3    | Bæreevnebestemmelse .....                         | 187 |
| 8.3.1  | Beregningsmetode .....                            | 187 |
| 8.3.2  | Bestemmelse af $t_k$ .....                        | 189 |
| 8.3.3  | Bestemmelse af $\sigma_T$ .....                   | 191 |
| 8.3.4  | Bestemmelse af $\rho$ .....                       | 191 |
| 8.3.5  | Bestemmelse af $Y_k$ og $M$ .....                 | 193 |
| 8.3.6  | Beregningsprocedure .....                         | 199 |
| 8.4    | Maksimalt vridningsbæreevne .....                 | 200 |
| 8.4.1  | Simpel beregningsmodel .....                      | 200 |
| 8.4.2  | Korrekt beregningsmodel .....                     | 202 |
| 8.5    | Geometrisk mulig brudfigur .....                  | 203 |
| 8.6    | Effektivitetsfaktoren .....                       | 203 |
| 8.7    | Teori vurderet ved forsøg .....                   | 206 |
| 8.8    | Generelt om flydefladen .....                     | 208 |
| 8.8.1  | Flydefladens udseende .....                       | 208 |
| 8.8.2  | Stringermodel .....                               | 210 |
| 8.9    | Andre tværsnit og armeringsudformninger .....     | 212 |
| 8.10   | Armeringsbestemmelse .....                        | 214 |
| 8.10.1 | Stringerbjælker .....                             | 215 |
| 8.10.2 | Bjælker med store trykzoner .....                 | 217 |
| 9.     | KOMBINERET VRIDNING, BØJNING OG FORSKYDNING ..... | 218 |
| 9.1    | Bjælkebeskrivelse .....                           | 218 |
| 9.2    | Statisk tilladelig spændingsfordeling .....       | 220 |
| 9.2.1  | Beregningsmetode .....                            | 220 |
| 9.2.2  | Kombineret forskydning og vridning ..             | 222 |
| 9.2.3  | Bæreevnebestemmelse .....                         | 227 |
| 9.2.4  | Teori vurderet ved forsøg .....                   | 229 |
| 9.3    | Andre tværsnit og armeringsudformninger .....     | 230 |
| 9.4    | Armeringsbestemmelse .....                        | 235 |

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| 10. KOMBINERDE PÅVIRKNINGER GENERELT .....         | 238 |
| 10.1 Kombineret N, V og M .....                    | 238 |
| 10.1.1 Statisk tilladelig spændingsfordeling ..... | 239 |
| 10.1.2 Det direkte tilfælde .....                  | 240 |
| 10.1.3 Det indirekte tilfælde .....                | 242 |
| 10.1.4 Armeringsbestemmelse .....                  | 242 |
| 10.2 Kombineret T og N .....                       | 242 |
| 10.3 Kombineret T, N og M .....                    | 244 |
| 10.4 Kombineret T, V, N og M .....                 | 244 |
| 10.5 Skæv bøjning med forskyning .....             | 246 |
| REFERENCER .....                                   | 250 |

|               |  |
|---------------|--|
| * APPENDIKS A |  |
| APPENDIKS B   |  |
| APPENDIKS C   |  |
| APPENDIKS D   |  |
| APPENDIKS E   |  |
| APPENDIKS F   |  |
| APPENDIKS G   |  |
| APPENDIKS H   |  |

\* APPENDIKS A-H forefindes i rapport nr. R 252.

## FORORD

Nærværende rapport er udarbejdet som et led i de betingelser, der skal opfyldes for opnåelse af den tekniske licentiatgrad.

Professor, dr.techn. M.P. Nielsen har været faglærer ved licentiatstudiet. Foreliggende arbejde er baseret på M.P. Nielsens grundliggende tanker vedrørende plasticitetsteoriens anvendelse ved brudberegning af beton og armeret beton. M.P. Nielsen har under hele arbejdet med denne afhandling været en uvurderlig inspirationskilde både hvad angår de teoretiske, praktiske og pædagogiske aspekter af nærværende emne.

Bente Jensen har maskinskrevet rapporten. Hun takkes for sin ikke ubetydelige hjælp ved bearbejdning af teksten. Esther Martens har rentegnet figurene. Christian Bransen har hjulpet med rapportens lay-out.

Trørød, Februar 1990

Bent Feddersen

---

## RESUME

---

Denne rapport beskæftiger sig med armerede betonbjælkers bæreevne under kombinerede snitkræfter.

Som teoretisk udgangspunkt anvendes teorien for idealplastiske materialer.

Indledningsvis berøres i rapporten grundlaget for anvendelse af plasticitetsteorien ved brudberegning af beton og jernbeton. Endvidere repeteres de generelle flydebetingelser og armeringsformler for armeret beton; da disse i udstrakt grad anvendes i den resterende del af rapporten.

I de efterfølgende kapitler behandles ren bøjning, bøjning med normalkraft, forskydning, ren vridning, kombineret forskydning, vridning og bøjning og endelig i sidste kapitel berøres andre kombinationer af snitkræfterne.

I hvert kapitel opstilles for en bjælke med rektangulært tværsnit, og en simpel snitkraftfordeling, udtryk til bestemmelse af bæreevnen. Denne model udstrækkes derefter til vilkårlige tværsnit, armeringsudformninger og snitkraftvariationer. Hvert kapitel afsluttes med en dimensioneringsanvisning (armeringsbestemmelse).

---

## SUMMARY

---

This report is dealing with the problem of calculation of the ultimate strength of beams loaded in combined actions.

The theory of plasticity is used as a theoretical model.

By way of introduction the report is touching on the basis for using the theory of plasticity by solving ultimate strength problems within the field of concrete and reinforced concrete. Furthermore, the yield conditions and the reinforcement design formulas for reinforced concrete are dealt with, these formulas being used to a vast extent in the remaining part of the report.

In the following chapters bending, bending with normal forces, shear, torsion, combined torsion and bending, combined shear, torsion and bending and finally other combinations are dealt with.

In each chapter the yield formulas for a rectangular beam with simple variations in the section forces is examined. These formulas are extrapolated to other sections, draws of reinforcement and variations of section forces. Finally the design situation is regarded in each chapter.

# SYMBOLER.

|                                                  |                                                                              |
|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| b                                                | - Bjælkebredde.<br>- Bredde af prismen til trykforsøg.                       |
| b <sub>e</sub>                                   | Effektive bjælkebredde, regnet fra bøjleyderside til bøjleyderside.          |
| b <sub>f</sub>                                   | Flangebredde.                                                                |
| b <sub>l</sub>                                   | Afstand mellem de lodrette flangers (skivers) centre (midtlinje).            |
| b <sub>m</sub>                                   | min (b <sub>e</sub> , b <sub>f</sub> ).                                      |
| b'                                               | Reduceret bjælkebredde, defineret ved b' = b - 2t <sub>x</sub>               |
| c                                                | - Deklag (vedrørende kapitel 8 se specielt figur 8.2).<br>- Betons kohæsion. |
| c <sub>o</sub> , c <sub>u</sub> , c <sub>v</sub> | Se figur 7.2.                                                                |
| c <sub>h</sub>                                   |                                                                              |
| c <sub>s</sub>                                   | Deklag langs bjælkerne lodrette sider.                                       |
| d                                                | - Diameter af armeringsjern.<br>- Diameter af cylindre til trykforsøg.       |
| d <sub>b</sub>                                   | Diameter af bøjlejern.                                                       |

|                                                     |                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| d <sub>c</sub>                                      | Trykarmeringens diameter.                                                                                             |
| d <sub>l</sub>                                      | Diameter af langedjern.                                                                                               |
| d <sub>h</sub>                                      | Diameter af langedjern placeret i tværsnittets hjørner.                                                               |
| d <sub>t</sub>                                      | Trækarmringens diameter.                                                                                              |
| f <sub>c</sub>                                      | Betons enskede trykstyrke (bestemt på cylindre med h = 300 mm og d = 150 mm.)                                         |
| f <sub>cp</sub>                                     | Betons ideal-plastiske trykstyrke, defineret ved f <sub>cp</sub> = ν f <sub>c</sub> .                                 |
| f <sub>cx</sub> , f <sub>cy</sub>                   | Armeret betons enskede trykstyrke, se formel (3.3)                                                                    |
| f <sub>o</sub>                                      | Maksimal spænding armeringen kan optage, se figur 2.32.                                                               |
| f <sub>t</sub>                                      | Betons enskede trækstyrke.                                                                                            |
| f <sub>tb</sub> , f <sub>tl</sub>                   | Armeret betons enskede trækstyrke, se formel (7.58-7.59).                                                             |
| f <sub>tp</sub>                                     | Betons ideal-plastiske trækstyrke, defineret ved f <sub>tp</sub> = ρ f <sub>c</sub> = ν <sub>t</sub> f <sub>t</sub> . |
| f <sub>cx</sub> , f <sub>cy</sub>                   | Armeret betons enskede trækstyrke, se formel (3.2).                                                                   |
| f <sub>u</sub>                                      | Armeringens brudspænding, se figur 2.32.                                                                              |
| f <sub>v</sub>                                      | Betons forskydningsstyrke.                                                                                            |
| f <sub>x</sub> (f <sub>yx</sub> , f <sub>xy</sub> ) | Armeringens trækflydespænding.                                                                                        |
| f <sub>y</sub>                                      | Bøjlernes trækflydespænding.                                                                                          |

|                             |                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f_{yc}, f_{yc}^*$          | Trykarmeringens træk- og trykflydespænding.                                                                                                                                            |
| $f_{y\ell}$                 | Længdearmeringens trækflydespænding.                                                                                                                                                   |
| $f_{y/p}$                   | Spændarmeringens flydespænding.                                                                                                                                                        |
| $f_{yt}, f_{yt}^*$          | Trækarmeringens træk- og trykflydespænding.                                                                                                                                            |
| $f_y^*(f_{yx}^*, f_{yy}^*)$ | Armeringens trykflydespænding.                                                                                                                                                         |
| $h$                         | - Bjælkehøjde.<br>- Højde af legemer til trykforsøg.                                                                                                                                   |
| $h_c$                       | Trykarmeringshøjde, regnet fra bjælkeoverside til tyngepunkt af trykarmering.                                                                                                          |
| $h_e$                       | Effektive bjælkehøjde, regnet fra bøjleyderside til bøjleyderside.                                                                                                                     |
| $h_f$                       | Flangehøjde.                                                                                                                                                                           |
| $h_i$                       | - Bjælakens indre momentarm, det vil sige afstanden fra center af trykstringeren til center af trækstringeren.<br>- Afstand mellem de vandrette flangers (skivers) centre (midtlinie). |
| $h_m$                       | $\max(b_e, h_e)$ .                                                                                                                                                                     |
| $h_t$                       | Trækarmeringshøjde, regnet fra bjælkeoverside til trækarmeringens tyngepunkt.                                                                                                          |
| $i_c$                       | Antal trykarmeringsjern.                                                                                                                                                               |
| $i_t$                       | Antal trækarmeringsjern.                                                                                                                                                               |
| $k$                         | - $h_m/b_m$<br>- Se formel (2.19).                                                                                                                                                     |

|                      |                                                                                                                                       |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\ell$               | $\phi_b/\phi_\ell$                                                                                                                    |
| $m$                  | Dimensionsløse bøjningsmoment, defineret ved $m = M/bh_t^2 f_c$ .                                                                     |
| $m_p$                | Dimensionsløse bæreevne ved ren bøjning, defineret ved $m_p = M_p/bh_t^2 f_c$ .                                                       |
| $m_s$                | Dimensionsløse bøjningsmoment, defineret ved $m_s = M/bh_1^2 f_c$ .                                                                   |
| $n$                  | - Dimensionsløse normalkraft, defineret ved $n = N/bh h_c$ .<br>- Antal snit i armering over tværsnit (for 2-snitbøjler er $n = 2$ ). |
| $\eta_p$             | Dimensionsløse bæreevne ved ren normalkraft, defineret ved $\eta_p = N_p/bh f_c$ .                                                    |
| $q_1 (\bar{q})$      | Generaliserede plastiske tøjningstilvækster.                                                                                          |
| $s$                  | Afstand mellem armeringsjern (bøjleafstand).                                                                                          |
| $t$                  | - Tykkelse af legeme.<br>- Dimensionsløse vridningsmoment, defineret ved $t = T/b_m^3 f_c$ .                                          |
| $t_1, t_2, t_3, t_4$ | Tykkelse af flanger (skiver) i kassedrager.                                                                                           |
| $t_k$                | Tykkelse af effektive tværsnit ved kombinerede påvirkninger.                                                                          |
| $t_\ell$             | Grænseværdi for tykkelsen af det effektive tværsnit. Grænseværdien gælder for overgangen mellem normalarmet og overarmet tværsnit.    |

## VIII

|               |                                                                                 |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $t_o$         | Trykkelse af det effektive tværsnit ved ren vridning.                           |
| $t_p$         | Dimensionsløse bæreevne ved ren vridning, defineret ved $t_p = T_p/b_m^3 f_c$ . |
| $t_v$         | Trykkelse af vægge i kassedrager.                                               |
| $u$           | Flytningsvektor.                                                                |
| $y_k$         | Trykzonehøjde ved kombinerede påvirkninger.                                     |
| $y_n$         | Nulliniedybde, regnet fra bjælkeoverside.                                       |
| $y_o$         | Trykzonehøjde ved ren bøjning.                                                  |
| $y_b$         | Areal af bøjlejern.                                                             |
| $A_{b\ell}$   | Bøjlearmeringsareal pr. længdeenhed, defineret ved $A_{b\ell} = A_b/s$ .        |
| $A_{b\ell r}$ | Bøjlearmeringsareal pr. længdeenhed knyttet til vridningsoptagelsen.            |
| $A_{b\ell v}$ | Bøjlearmeringsareal pr. længdeenhed knyttet til forskydningsoptagelsen.         |
| $A_{ef}$      | Areal af det effektive tværsnit.                                                |
| $A_x$         | Areal indenfor midtlinjen af det effektive tværsnit.                            |
| $A_\ell$      | Areal af længdearmering.                                                        |
| $A_{\ell c}$  | Areal af trykarmering.                                                          |
| $A_{\ell t}$  | Areal af trækarmering.                                                          |

## IX

|                        |                                                                                                        |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_{x\ell}, A_{y\ell}$ | Armeringsareal pr. længdeenhed, defineret ved $A_{x\ell} = nA_{bx}/s_x$ og $A_{y\ell} = nA_{by}/s_y$ . |
| $C$                    | Kraft i trykstringer.                                                                                  |
| $D$                    | Plastisk arbejde.                                                                                      |
| $E_c$                  | Betons elasticitetsmodul.                                                                              |
| $K$                    | Konstant der indgår i $\nu = K/\sqrt{f_c}$ .                                                           |
| $M$                    | Bøjningsmoment.                                                                                        |
| $M_E$                  | Forsøgsmæssigt bestemt bøjningsmoment.                                                                 |
| $M_p$                  | Bæreevnen ved ren bøjning.                                                                             |
| $M_{Tp}$               | Maksimalt bøjningsmoment der kan optages ved vridningspåvirkningen $T_p$ .                             |
| $N$                    | Normalkraft.                                                                                           |
| $N_p$                  | Bæreevnen ved ren normalkraft.                                                                         |
| $Q_1 (\bar{Q})$        | Generaliserede spændinger.                                                                             |
| $S_{ef}$               | Statiske moment om tyngdepunktet af kræfterne i det effektive tværsnit.                                |
| $T$                    | - Kraft i trækstringer.<br>- Vridningsmoment.                                                          |
| $T_c, T_c^*$           | Trykstringerens træk- og trykkapacitet.                                                                |
| $T_E$                  | Forsøgsmæssigt bestemt vridningsbæreevne.                                                              |
| $T_K$                  | Nødvendig trækkapacitet efter længdeaksen for optagelse af vridningsmomentet $T$ .                     |
| $T_{\ell}$             |                                                                                                        |
| $T_{\ell t}$           |                                                                                                        |

|                  |                                                                                                              |  |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $T_{\ell, \max}$ | $T_t + T_c$                                                                                                  |  |
| $T_M$            | Trækstringerkapacitet der benyttes til optagelse af bøjningsmomentet.                                        |  |
| $T_{\max}$       | Maksimalt vridningsmoment der kan optages.                                                                   |  |
| $T_p$            | Bæreevnen ved ren vridning.                                                                                  |  |
| $T_{sp}$         | Vridningsmomentet for hvilket deklaget skaller af.                                                           |  |
| $T_t, T_t^*$     | Trækstringerens træk- og trykkapacitet.                                                                      |  |
| $T_{\ell\ell}$   | Grænsevridningsmoment, som hvis $T < T_{\ell\ell}$ kan bøjlerne ikke regnes at flyde, jævnfør afsnit 8.3.2.  |  |
| $V$              | Forskydningskraft.                                                                                           |  |
| $V_E$            | Forsøgsmæssigt bestemt forskydningskraft.                                                                    |  |
| $V_p$            | Bæreevnen ved ren forskydning.                                                                               |  |
| $W_E$            | Ydre arbejde.                                                                                                |  |
| $W_I$            | Indre arbejde.                                                                                               |  |
| $W_{\ell}$       | Betonens plastiske arbejde pr. længdeenhed.                                                                  |  |
| $\alpha$         | - Vinkel mellem flytningsvektor og brudlinje.<br>- Armeringshældning i forhold til x-aksen.<br>- $h_c/h_t$ . |  |
| $\beta$          | $t_o/b_m$ .                                                                                                  |  |
| $\beta_{\ell}$   | $t_{\ell}/b_m$ .                                                                                             |  |
| $\beta_v$        | $t_v/b_m$ .                                                                                                  |  |

|                  |                                                                                                                                             |  |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $\gamma$         | - Faktor, se formel (6.15) og (7.19).<br>- $h/h_t$ .<br>- Vinkelændring, se afsnit 2.3.<br>- Opbøjet spændarmerings vinkel med længdeaksen. |  |
| $\epsilon$       | Tøjning.                                                                                                                                    |  |
| $\epsilon_c$     | Tøjning i beton.                                                                                                                            |  |
| $\epsilon_{cu}$  | Betons brudtøjning.                                                                                                                         |  |
| $\epsilon_o$     | Tøjning i beton svarende til toppunktet af ar-<br>bejdskurven.                                                                              |  |
| $\epsilon_s$     | Tøjning i armering.                                                                                                                         |  |
| $\epsilon_{so}$  | Tøjning i armering svarende til toppunktet af<br>arbejdskurven.                                                                             |  |
| $\epsilon_{su}$  | Armeringens brudtøjning.                                                                                                                    |  |
| $\dot{\epsilon}$ | Tøjningstilvækst.                                                                                                                           |  |
| $\eta$           | Rotationsvektor.                                                                                                                            |  |
| $\eta_b$         | $\phi_b/\nu_t$                                                                                                                              |  |
| $\eta_{\ell}$    | $\phi_{\ell}/\nu_t$                                                                                                                         |  |
| $\theta$         | Betontrykkets hældning (normalt i forhold til<br>x-aksen eller $\ell$ -aksen).                                                              |  |
| $\theta_e$       | Betontrykkets hældning i det revnede elastiske<br>stadium.                                                                                  |  |
| $\theta_k$       | Betontrykshældning ved kombinerede påvirkninger.                                                                                            |  |
| $\theta_{kt}$    | Betontrykshældning i det effektive tværsnit ved<br>kombineret forskydning og vridning.                                                      |  |

$\theta_{el}$  Grænseværdi for betontrykshældning, se afsnit 8.3.2.

$\theta_t$  Betontrykrets hældning ved ren vridning.

$\kappa$  - Rotation.  
-  $\cot \theta$ .

$\lambda$  - Konstant i normalitetsbetingelse, se formel (2.3).  
-  $f_{yx}/f_{yy}$ .

$\mu$  Grænseværdi, som multipliceret med  $h_t$  angiver øvre grænse for  $\gamma_k$  og  $\gamma_o$ .

$\nu$  Effektivitetsfaktor, som multipliceret med  $f_c$  angiver  $f_{cp}$ .

$\nu_b$  Effektivitetsfaktor for bøjning (rektangulært tværsnit).

$\nu_b^*$  Effektivitetsfaktor for bøjning (vilkarligt tværsnit).

$\nu_{bn}$  Effektivitetsfaktor for kombineret bøjning og normalkraft.

$\nu_{bs}$  Effektivitetsfaktor ved forskydning, hvor trykzonen er stor.

$\nu_{bt}, \nu_{bt}^*$  Effektivitetsfaktor ved kombineret bøjning og vridning.

$\nu_n$  Effektivitetsfaktoren ved ren normalkraft.

$\nu_s, \nu_s^*$  Effektivitetsfaktor ved forskydning.

$\nu_t$  - Effektivitetsfaktor, som multipliceret med  $f_t$  angiver  $f_{tp}$ .  
- Effektivitetsfaktor ved vridning (rektangulært tværsnit).

$\nu_t^*$  Effektivitetsfaktor ved vridning (vilkarligt tværsnit).

$\rho$  - Effektivitetsfaktor, som multipliceret med  $f_c$  angiver  $f_{tp}$ .  
- Reduktionsfaktor, som angiver den reduktion forskydningsspændingerne medfører i normalspændingskapaciteten.

$\rho_s$  Reduktionsfaktor, se afsnit 9.2.2.

$\sigma$  Spænding.

$\sigma_c$  Spænding i beton.

$\sigma_r$  Reduceret normalspændingskapacitet i beton på grund af forskydningspændinger.

$\sigma_s$  Spænding i armering.

$\sigma_r$  Spændingskomponent stammende fra forskydning, se afsnit 8.3.3.

$\tau$  Forskydningspænding.

$\tau_s$  Forskydningspænding knyttet til forskydningskraften.

$\tau_t$  Forskydningspænding knyttet til vridning.

- Betons friktionsvinkel.  
- Geometrisk armeringsgrad.

$$\varphi_c \quad \text{Geometrisk armeringsgrad defineret ved} \quad \varphi_c = \frac{A_{\ell c}}{bh_c}$$

$$\varphi_t \quad \text{Geometrisk armeringsgrad defineret ved} \quad \varphi_t = \frac{A_{\ell t}}{bh_t}$$

$$\psi \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \psi = \frac{2A_b f_{yb}}{bs f_c}$$

$$\psi \quad \text{meringsgrad defineret ved} \quad \psi' = \frac{2A_b \ell' y_b - \Omega_c}{b' f_c}$$

$$\phi_b \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_b = \frac{2A_b f_{yb}}{sb_m f_c}$$

$$\phi_c \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_c = \frac{A_{\ell c} f_{yc}}{bh_t f_c}$$

$$\phi_c^* \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_c^* = \frac{A_{\ell c} f_{yc}^*}{bh_t f_c}$$

$$\phi_{ct} \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_{ct} = \frac{(A_{\ell c} f_{yc} - \frac{1}{2} \sigma_r A_{ef})}{bh_t f_c}$$

$$\phi_{ct}^* \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_{ct}^* = \frac{(A_{\ell c} f_{yc}^* + \frac{1}{2} \sigma_r A_{ef})}{bh_t f_c}$$

$$\phi_{\ell} \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_{\ell} = \frac{A_{\ell} f_{y\ell}}{b h_e f_c}$$

$$\phi_{\ell t} \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_{\ell t} = \frac{A_{\ell t} f_{yt} + A_{\ell c} f_{yc}}{h_b f_c}$$

$$\phi_{\ell v} \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_{\ell v} = \frac{A_{\ell} f_{y\ell}}{bh_1 f_c}$$

$$\phi'_{\ell v} \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi'_{\ell v} = \frac{(A_{\ell} f_{y\ell} - \sigma_r A_{ef})}{b' h_1 f_c}$$

$$\phi_s \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_s = \frac{A_{\ell t} f_{yt}}{bh_1 f_c}$$

$$\phi'_s \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi'_s = \frac{(A_{\ell t} f_{yt} - \frac{1}{2} \sigma_r A_{ef})}{b' h_1 f_c}$$

$$\phi_t \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_t = \frac{A_{\ell t} f_{yt}}{bh_t f_c}$$

$$\phi_t^* \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_t^* = \frac{A_{\ell t} f_{yt}^*}{bh_t f_c}$$

$$\phi_{tt} \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_{tt} = \frac{(A_{\ell t} f_{yt} - \frac{1}{2} \sigma_r A_{ef})}{bh_t f_c}$$

$$\phi_x, \phi_x^* \quad \text{Mekanisk armeringsgrad defineret ved} \quad \phi_x = \frac{A_{\ell} f_{yx}}{t f_c} \quad \text{og} \quad \phi_x^* = \frac{A_{\ell} f_{yx}^*}{t f_c}$$

$\phi_y, \phi_y^*$ 

Mekanisk armeringsgrad defineret ved

$$\phi_y = \frac{A_y \ell_{fy}^2}{t f_c} \quad \text{og} \quad \phi_y^* = \frac{A_y \ell_{fy}^{*2}}{t f_c}.$$

 $\Omega$ 

Den del af bøjlearmeringen der anvendes ved vridningsoptagelsen, se afsnit 9.2.2.

 $\Omega_o$ Optimal værdi for  $\Omega$ .

# 1

## INDLEDNING

Emnet for denne afhandling er armerede betonbjælkers bæreevne ved rene og kombinerede snitkræftpåvirkninger. Som udgangspunkt er teorien for ideal-plastiske materialer benyttet.

Formålet med afhandlingen har været at opsummere eksisterende beregningsmodeller, at videreudvikle disse, og at udvikle beregningsmodeller for hidtil ikke behandlede snitkræfttilfælde.

Som grundliggende teoretisk model er teorien for ideal-plastiske legemer anvendt. For at kunne benytte denne model er der indført to nye parametre i betonstyrkelæren, nemlig betonens ideal-plastiske træk- og trykstyrker. I kapitel 2 gives der, udover nogle vigtige udpluk fra den generelle plasticitetsteori og materialernes fysiske egenskaber, en generel introduktion til plasticitetsteoriens anvendelse ved brudberegning af beton og i særdeleshed armeret beton.

I kapitel 3 berøres nogle af de simplifikationer og forudsætninger, der nødvendigvis må indføres for at gøre den plasticitetsteoretiske model anvendelig for beregning af jernbeton i praksis. Endvidere beskrives de forhold, herunder flydebetingelser og armeringsformler, der generelt gælder for jernbeton under biaksiale spændingsforhold. Denne gennemgang er forholdsvis detaljeret, hvilket skyldes, at disse spændingsfordelinger udgør en basis for mange af

de efterfølgende anvendte spændingsfordelinger, og at de i mange sammenhænge kan benyttes til løsning af problemer, for hvilke der ikke eksisterer standardiserede beregningsmodeller.

For at afgrænse omfanget af denne afhandling er alene armerede betonbjælkers bæreevne med hensyn til kombinationer af forskellige snitkraftbelastninger behandlet. Dette betyder, at andre, men ikke uvæsentlige, forhold vedrørende jernbetonbjælkers bæreevne og opførsel enten ikke er berørt eller kun berørt i periferet omfang.

Nogle af ovennævnte forhold skal her kort nævnes. Det forudsættes, at spændingsforholdene ved understøtningerne, og hvor kræfterne føres ind i bjælkerne, er af en sådan karakter, at de altid vil befinde sig indenfor flydefladen. Der ses i de fleste tilfælde bort fra betonens trækstyrke, hvilket betyder, at bjælkerne antages således armeret, at alle forekommende trækspændinger vil kunne optages af en armering. Da de fleste normer forudsætter en minimumsarmering, har bjælker uden eller delvis uden armering, som oftest ringe praktisk interesse, specielt da minimumsarmeringen har en sådan størrelsesorden, at betonens trækstyrke har en lille indflydelse på bæreevnen. Betonens trækstyrke har dog en betydning for visse specialproblemer, så som afskallning af dæklag. Der er ved opstillingen af bæreevneudtrykkene i det følgende ikke taget hensyn til den bæreevneforøgelse, der i visse tilfælde vil kunne finde sted i form af buedivulsi. Forhold i brugsstadiet er periferet berørt i enkelte afsnit vedrørende armeringsbestemmelsen, idet visse begrænsninger i plasticitetsteoriens anvendelse kan føre til løsninger, der ikke kræver nøjere vurderinger af opførslen i brugsstadiet. Dynamiske, stabilitetsmæssige, samt virkningen af langtidslaste er slet ikke berørt.

I kapitlerne 4 til 10 opstilles for specifikke snitkraftkombinationer teoretiske modeller for beregningen af jernbetonbjælkers bæreevne. Mens kapitlerne 4, 6 og 7 omhandler de rene påvirkninger, behandles i kapitlerne 5, 8 og 9 de vigtigste snitkraftkombinationer. Aflutningsvis berøres i kapitel 10 andre snitkraftkombinationer, som mere eller mindre kan baseres på tidligere gennemgængede beregningsmodeller.

Som udgangspunkt for den teoretiske og forsøgsmæssige undersøgelse benyttes den i praksis hyppigst forekommende bjælketype, nemlig

en vandret bjælke med rektangulært tværsnit, armeret med lodrette bjælker og en længdearmering placeret i tværsnittets over- og underside. De vigtigste geometriske og styrkemæssige parametre, herunder de hjælpeparametre der benyttes, introduceres i kapitlet afsnit. Derefter følger udviklingen af en teoretisk model baseret på nedrevræddemetoden, det vil sige en statisk tilfældig løsning. Som aflutning på den teoretiske del gennemgås nogle øvreræddeløsninger, det vil sige geometrisk mulige brudfigurer. På basis af forsøg gives der formuler til beregning af effektivitetsfaktoren, og dermed betonens ideal-plastiske trykstyrke, samtidig med at disse forsøg benyttes til en vurdering af den opstillede løsnings anvendelighed. En vurdering af teoriens anvendelse for andre bjælketyper, det vil sige andre tværsnit og armeringsudformninger, foretages i et selvstændigt afsnit. Endelig anføres aflutningsvis i hvert kapitel beregningsmodeller for design-situationen.

Plasticitetsteorien har i forhold til de fleste eksisterende beregningsmodeller mange fordele, hvoraf de vigtigste kort beskrevet er:

- Med plasticitetsteorien er der skabt en "generel teori" for brudberegning af beton og jernbeton, og dermed også en beregningsmodel, der kan benyttes for problemer, hvortil der ikke er udviklet standardiserede beregningsudtryk.
- Teorien kan gives et fysisk indhold, hvorved til eksempel kendte beregningsudtryk lettere kan ekstrapoleres til beslægtede problemer.
- Teorien fører som oftest til simple beregningsudtryk, der normalt er i endog særdeles god overensstemmelse med forsøg.
- I design-situationen opnås der en frihed med hensyn til armeringsføring, herunder fordelingen af armeringen.

Det er naturligvis værd at bemærke, at den her anvendte beregningsmodel ikke muliggør en fuldstændig beskrivelse af spændingsforholdene i brudstadiet, men at der er tale om en idealiseret beregningsmodel, som primært kan anvendes til en bestemmelse af

et aktuelt legemes bæreevne, herunder eventuelt en forudsigtelse af bruddets art.

Som nævnt ovenfor giver plasticitetsteorien en vis frihed med hensyn til valg af armeringsføring. Denne frihed skal dog anvendes med en vis forsigtighed. Eksempelvis kan en armeringsføring i en kontinuerlig bjælke, der er valgt langt fra den elastiske løsning, give problemer med den fornødne rotationskapacitet i de flydeled, der måtte optræde. Et andet og vigtigt eksempel er faren for spaltebrud i uarnerede partier, selvom spændingerne ud fra en statisk tilladelig betragtning synes i orden. Her som ovenfor gælder det, at en vis skelen til de elastiske spændingsforhold kan være af stor vigtighed for valg af den plastiske løsning.

Selvom plasticitetsteorien, som anført ovenfor, har mange fordele, er der også begrænsninger for dens anvendelse i praksis, medmindre der indføres simplifikationer, som desværre ikke i alle tilfælde fuldt ud tilfredsstiller de statiske betingelser. Hvis dette krav skulle overholdes, ville det betyde, at en beregning ikke kunne baseres på en aktuell bjælkes snitkraftkurve, men derimod på en model som eksakt gælder for det pågældende lasttilfælde. Dette ville naturligvis ikke være gangbart i almindeligt projekteringsarbejde.

Som udgangspunkt for de beregningsmodeller, der er opstillet i denne afhandling, er alene meget simple lasttilfælde betragtet. Ud fra disse er det forsøgt at give modellen et mere generelt indhold.

Et af de primære mål med denne afhandling har været, at vurdere hvilke værdier der kan benyttes for betonens plastiske styrker, og dermed effektivitetsfaktoren. Desværre varierer størrelsen af denne en del, alt efter geometriske, materiallemæssige og belastningsmæssige forhold. Det har af disse årsager ikke været muligt at give et fuldstændigt billede af effektivitetsfaktorens værdispektrum. Denne afhandling angiver dog nogle retningslinier, således at mange problemer, mere eller mindre konservativt, vil kunne løses på en fornuftig måde.

## 2 TEORETISKE OG FYSISKE FORUDSÆTNINGER

I dette kapitel vil det teoretiske grundlag for udledelsen af bæreevneudtrykkene i de følgende kapitler, samt de generelle forhold vedrørende materialernes fysiske egenskaber, blive behandlet.

### 2.1 FRA DEN GENERELLE PLASTICITETSTEORI

De vigtigste resultater fra den generelle plasticitetsteori vil her kort blive opsummeret. For en mere uddybende beskrivelse henvises til speciallitteraturen, eksempelvis M.P. Nielsen [77.2] og P. Lange-Hansen [77.1] og [75.1].

For at gøre fremstillingen uafhængig af de kraft- og deformationsmål der anvendes for det betragtede legeme, indføres for disse de såkaldte generaliserende størrelser. Kraftmålene - de generaliserede spændinger - benævnes  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), mens deformationsmålene - de generaliserede plastiske tøjningsstørrelser - benævnes  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Størrelserne  $Q_i$  og  $q_i$  skal vælges således, at summen  $\sum_{i=1}^n Q_i q_i$  repræsenterer det pågældende legemes indre arbejde.

#### 2.1.1 Flydebetingelsen

Legemet, der består af et ideel-plastisk materiale, er flydebetingelsen bestemt ved de kombinationer af de generaliserede spæn-

dingen  $Q_1$ , der netop fører til flydning i legemet. Flydebetingelsen udtrykkes ved

$$f(Q_1) = 0 \quad (2.1)$$

Funktionsudtrykket  $f$  vælges således, at det for den generaliserede spændingskombination gælder, at denne henholdsvis kan og ikke kan optages af legemet for henholdsvis  $f < 0$  og  $f > 0$ . For  $f = 0$  kan flydning i form af plastiske deformationer - det vil sige blivende deformationer - finde sted.

Den grafiske afbildning af punktmængden bestemt ved udtrykket (2.1) benævnes *flydefladen*.

## 2.1.2 Flydeloven

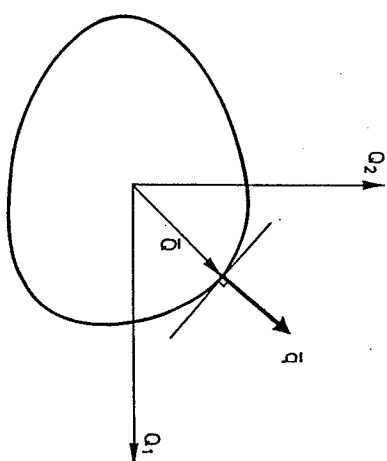
For samhørende værdier af  $Q_1$  og  $q_1$ , er legemets *plastiske arbejde* bestemt ved

$$D = \int_V W \, dV = \int_V (Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots + Q_n q_n) \, dV \quad (2.2)$$

Flydefladen, som forudsættes uden plane flader og spidser, antages differentiel og konvex. Regnes Von Mises's hypotese vedrørende det *maksimalt arbejde* at gælde og kræves det, at  $W$  er stationær, kan legemets generaliserede plastiske tøjningstilvækster udtrykkes ved

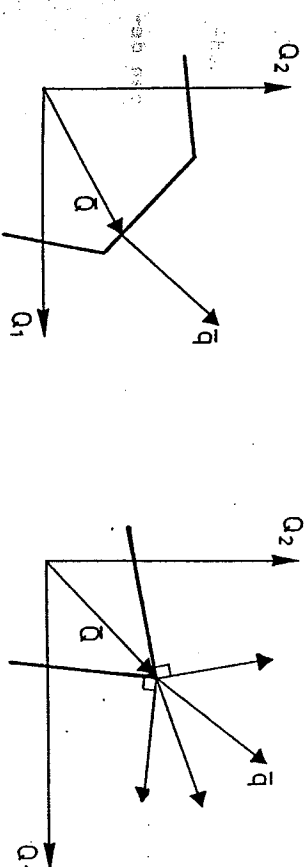
$$q_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial Q_1} \quad (2.3)$$

hvor  $\lambda$  er en positiv konstant. Som det fremgår af udtrykket (2.3) udgør den generaliserede plastiske tøjningstilvækstvektor  $\bar{q}$  en udadrettet normal til flydefladen, jævnfør figur 2.1. Betingelsen (2.3) benævnes derfor *normalitetsbetingelsen*, eller undertiden *den associative flydelov*.



Figur 2.1: Normalitetsbetingelsen.

Indeholder flydefladen plane flader gælder det, at der ikke er nogen entydig sammenhang mellem  $\bar{q}$  og  $\bar{q}$ , idet det plastiske arbejde  $D$  er konstant over fladen, se figur 2.2. Optræder der spidser på flydefladen gælder det, at den generaliserede plastiske tøjningstilvækstvektor kan antage alle retninger, der ligger i vinkelrummet mellem grænsenormalerne for de tilstødende flader, som udgør flydefladen omkring spidsen, se figur 2.2.



Figur 2.2: Normalitetsbetingelsen ved plane flader og spidser.

## 2.1.3 Statiske og geometriske betingelser

Spændingsmatricen  $\bar{S}$  i det retvinklede (x, y, z)-koordinatsystem er defineret ved

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

For dette spændingssystem gælder følgende ligevægtsbetingelser

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

Idet der er set bort fra legemets massefylde.

Langs randen af legemet gælder de statiske randbetingelser

$$\bar{p} = \bar{S} \bar{n} \quad (2.8)$$

hvor  $\bar{p}$  er spændingsvektoren langs randen, mens  $\bar{n}$  er den udadrettede enhedsnormalvektor til randen.

I et tilsvarende (x, y, z)-koordinatsystem er tøjningsmatricen defineret ved

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Idet flytningsvektorens komponenter betegnes  $u_x$ ,  $u_y$  og  $u_z$ , er sammenhængen mellem disse og tøjningerne defineret ved, idet disse benævnes de geometriske betingelser

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.15)$$

Idet  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  og  $\gamma_{yz}$  er vinkelændringen mellem linier parallel med koordinataksene.

De geometriske betingelser - kaldet kompatibilitetsbetingelserne - lyder

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \quad (2.21)$$

## 2.1.4 Ekstremlprincipperne

Under forudsætning af normalitetsbetingelsen gælder plasticitets-teoriens ekstremlprincipper, omfattende *nåværende*, *øvre* og *en-tydigheds*sætningen, for ideal-plastiske materialer.

Følgende definitioner indføres:

- En *statisk tilladelig spændingsfordeling* - er en spændingsfordeling, der opfylder ligevægtsbetingelserne og de statiske randbetingelser.
- En *sikker spændingstilstand* - er en spændingstilstand, der overalt i legemet opfylder kravet  $f < 0$ .
- En *kinematisk mulig brudfigur* - er en deformationstilstand, der opfylder normalitetsbetingelsen, kompatibilitetsbetingelserne samt de geometriske randbetingelser.
- *Flydelasten* - er for et ideal-plastisk legeme den belastning, for hvilken spændingstilvæksterne overalt i legemet er nul.

Med ovenstående definitioner kan ekstremlsætningerne formuleres på følgende måde:

Nåværendesætningen: En belastning bestemt på basis af en sikker statisk tilladelig spændingsfordeling, er mindre end eller lig med flydelasten.

Øvre sætningen: En belastning, der er fundet ved hjælp af "arbejdsaligheden" for en kinematisk mulig brudfigur, er større end eller lig med flydelasten.

En-tydighedsætningen: En belastning, der er bestemt både på basis af nedre- og øvre sætningen, er lig med flydelasten.

## 2.2 BETON

I dette afsnit vil nogle af betonens vigtigste fysiske egenskaber blive berørt.

De mange forskelligartede metoder, der verden over benyttes til bestemmelse af betonens enskede trykstyrke, gør, at dette emne er forholdsvis detaljeret behandlet. Dette eksempelvis ikke mindst fordi den enskede trykstyrke indtager en central placering hvad angår behandlingen af forsøgsresultater, herunder fastlæggelsen af betonens plastiske styrker, jævnfør afsnit 2.4.

Da interessen i de kommende kapitler primært er knyttet til betonens trykstyrke, vil betonens enskede trækstyrke, herunder den forsøgs-mæssige fastlæggelse af denne, ikke blive berørt.

### 2.2.1 Betons brudbetingelse

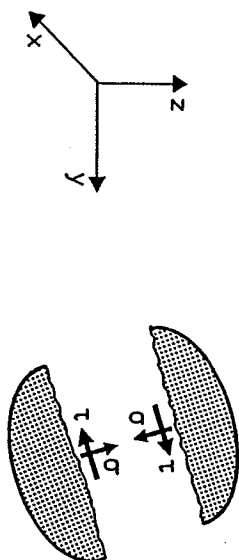
Til beskrivelse af betons brudegenskaber benyttes *Coulomb's modificerede brudhypotese*, som er nærmere beskrevet i M.P. Nielsen [84.1]. Coulomb's modificerede brudbetingelse er sammensat af to delbetingelser, nemlig *glidningsbruddet*

$$|\tau| - c + \sigma \tan \varphi = 0 \quad (2.22)$$

og *adskillelsesbruddet*

$$\sigma - f_t = 0 \quad (2.23)$$

hvor  $\tau$  og  $\sigma$  er forskydnings- og normalspændingen i brudsnittet, se figur 2.3, mens  $c$ ,  $\varphi$  og  $f_t$  er betonens henholdsvis *kohesion*, *friktionsvinkel* og *enskede trækstyrke*.



Figur 2.3: Spændingerne i brudsnittet.

Indføres hovedspændingerne, defineret ved  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , i gældningskriteriet (2.22) ændres dette til

$$k \sigma_1 - \sigma_3 - f_c = 0 \quad (2.24)$$

hvor

$$k = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.25)$$

og  $f_c$  er betonens enskede trykstyrke.

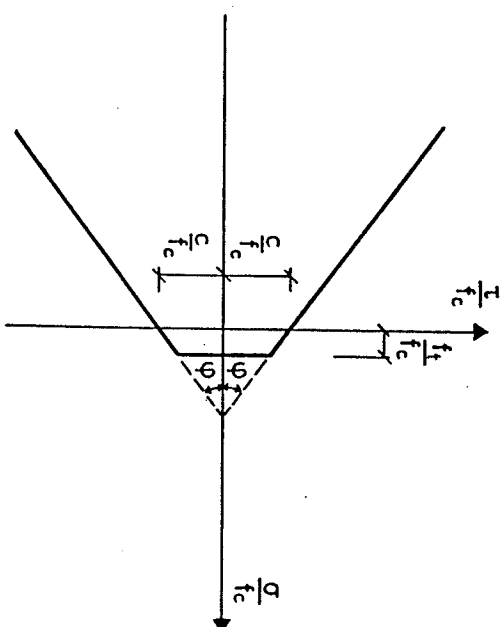
Af ovenstående findes kohæsionen  $c$  at kunne udtrykkes ved

$$c = \frac{f_c}{2\sqrt{k}} \quad (2.26)$$

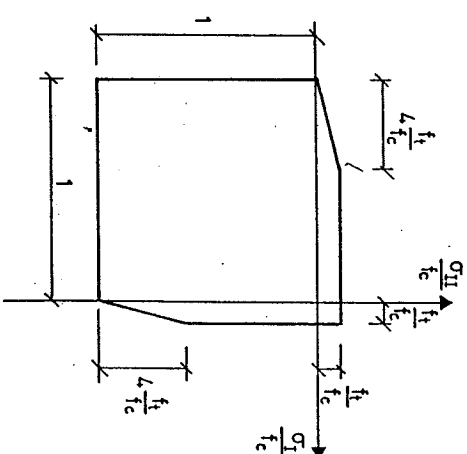
For adskillelseskriteriet fås umiddelbart

$$\sigma_1 - f_t = 0 \quad (2.27)$$

Parametrene, som indgår i Coulomb's modificerede brudhypotese, fastlægges via forsøg. Mens styrkeparametrene  $f_c$  og  $f_t$  bestemmes for den aktuelle beton, kan friktionsvinklen  $\phi$  tilnærmelsesvis regnes at være konstant med værdien  $\phi \approx 37^\circ$ , hvilket svarer til  $k \approx 4$ .



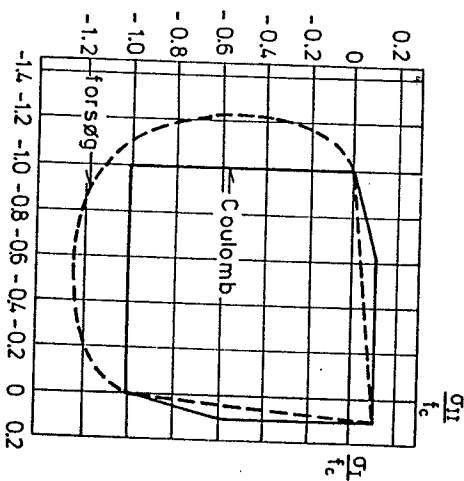
Figur 2.4: Betons brudbetingelse i et  $(\sigma, \tau)$ -koordinatsystem.



Figur 2.5: Betons brudbetingelse ved plan spændingstilstand.

I blandt andet B.C. Jensen [76.1] er Coulomb's modificerede brudhypotese vurderet ved forsøg med beton under biaxial spændingspåvirkning. Her skal kun de generelle forhold vedrørende denne vurdering fremhæves.

Forholdet mellem Coulomb's modificerede brudhypotese og forsøg vil kvalitativt være som vist i figur 2.6.



Figur 2.6: Forsøg og Coulomb's modificerede brudhypotese i det biaxiale spændingsstilfælde.

Om forsøgskurven vist i figur 2.6 skal følgende bemærkes. For det tilfælde hvor begge hovedspændinger er trykspændinger, eksisterer der en mængde forsøgsdata. Disse bekræfter alle det principielle forløb af forsøgskurven vist i figur 2.6. Derimod eksisterer der kun en begrænset forsøgsmængde for det tilfælde, hvor den ene hovedspænding er en trækspænding, og den anden hovedspænding er enten en trækspænding eller en trykspænding. Mens den teoretiske flydeflade af forsøgsresultaterne, hersker der for træk-træktilfældet større usikkerhed omkring forsøgskurvens beliggenhed i forhold til den teoretiske kurve, idet nogle forsøg ligger på linie med forløbet af

tryk-trykforsøgskurven, mens andre forsøg ligger moderat udenfor den teoretiske flydeflade.

Der eksisterer adskillige forslag til flydeflader, der er i bedre overensstemmelse med forsøg end Coulomb's modificerede brudhypotese. Disse vil ikke blive behandlet nærmere her, da deres anvendelse i denne sammenhæng er af minimal interesse. For yderligere studium af dette emne henvises til I. Wasthels [79.1].

Selvom der er afvigelser mellem forsøgsdataerne og Coulomb's modificerede brudhypotese - som vist i figur 2.6 - synes denne dog som en tilnærmelse at beskrive betonens brudforhold tilfredsstillende, specielt når hypotesens simpelhed tages i betragtning. Coulomb's modificerede brudhypotese vil således her - som nævnt i indledningen - blive anvendt til beskrivelse af betonens brudegenskaber.

Det bør bemærkes, at det i forsøgsmæssig sammenhæng er endog særdeles vanskeligt at frembringe den hovedspændingstilstand som ønskes, på grund af friktionen mellem prøvemaskinens belastningsflade og prøvelegemet - nærmere herom i afsnit 2.2.2. Det kan således fremhæves, at desto mere den forsøgsmæssige spændingstilstand er i overensstemmelse med den ønskede, desto tættere vil forsøgskurven, vist i figur 2.6, ligge på Coulomb-flydefladen. Endvidere bør det bemærkes, at beton på grund af udstøbning, komprimering og hærdning, ikke som vist i figur 2.6 har isotrope egenskaber, men derimod anisotrope egenskaber - nærmere herom i afsnit 2.2.2.

Som vist i det foregående kan en aktuel betons brudforhold beskrives alene med kendskab til denne betons styrkeparametre  $f_c$  og  $f_t$ . Ofte vil kendskabet til en betons enaksede trykstyrke  $f_c$  dog være tilstrækkeligt, da der eksisterer analytiske udtryk for trækstyrken som funktion af trykstyrken.

Da  $f_t \approx \sqrt{0,1 f_c}$ , findes betonens forskydningsstyrke  $f_v$  at være  $f_v = f_t$ , idet forskydningsbruddet er et adskillelsesbrud.

## 2.2.2 Betons enaksede trykstyrke

Den enaksede trykstyrke er den mest centrale af betonens materialeparametre, dels fordi det er denne af betonens egenskaber, der pri-

mært udnyttets i betonkonstruktioner, men også fordi man alene med kendskab til denne kan fastlægge en betons brudforhold og arbejds-  
kurve - se afsnit 2.2.1 og 2.2.3.

En betons trykstyrke bestemmes ved et forsøg, hvor et prøvelegeme påføres en enakset trykspændingstilstand. Den forsøgsmæssigt bestemte trykstyrke stemmer sjældent overens med den trykstyrke, der optræder i en konstruktion, hvilket blandt andet skyldes forskelle i udstøbning, komprimering samt hardning. Den forsøgsmæssigt bestemte trykstyrke er derfor i højere grad en referencestykke, ud fra hvilken en aktuel konstruktions styrkeniveau kan vurderes, end det er en reel styrkeparameter. Desværre eksisterer der mange forskellige opfattelser af, hvorledes denne referencestykke fastlægges. I dette afsnit skal de vigtigste af de faktorer, der indvirker på styrkeprøvningen - se oversigten i tabel 2.1 - vurderes nærmere. Det er i denne sammenhæng interessant at bemærke, at forskellige personer erfaringsmæssigt kan få signifikant afvigende resultater efter samme standardiserede prøvemethodik, hvilket skyldes, at en standardisering umuligt kan beskrive alle detaljer vedrørende en styrkeprøvning.

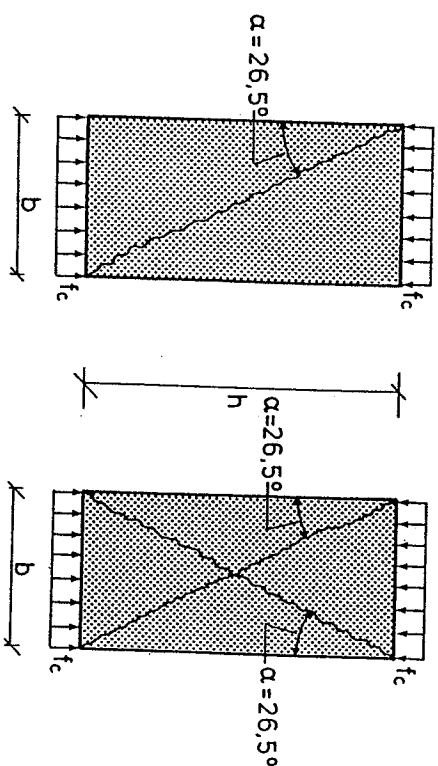
|                |                                                                                                                           |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| prøvelegeme    | form, størrelse<br>absolutte dimensioner<br>belastningsfladens planhed<br>mellemlæg til prøvemaskinen<br>udstøbt, udboret |
| prøveprocedure | belastningshastighed<br>belastningsvarighed<br>fugt<br>temperatur<br>forsøgstidspunkt<br>på prøvetidspunkt                |
| betonen        | sammensætning<br>stenstørrelse<br>fugt<br>temperatur<br>udstøbning<br>komprimering<br>under lagring                       |
| prøvemaskine   | konstruktion<br>kalibrering<br>trykpladens bevægelighed<br>centricitet<br>stivhed<br>planhed, glathed<br>betjening        |
| pålidelighed   | antal prøvelegemer<br>spredning                                                                                           |

Tabel 2.1: Styrkeafhørende faktorer.

I det følgende skal faktorerne nævnt i tabel 2.1 vurderes nærmere. Desværre eksisterer der ikke for alle faktorerens vedkommende alment accepterede omsætningskurver, omsætningsstabeller eller analytiske udtryk. Denne gennemgang vil derfor primært omhandle faktorerens kvalitative betydning for de målte styrkeværdier. For et mere detaljeret studium af et specifikt forholds indflydelse på styrken henvises til speciallitteraturen.

### Brudmekanismen

Ifølge Coulomb's modificerede brudhypotese vil det enaksede trykbrud være et glidningsbrud. De brudsnit, der dannes ved ovenstående påvirkning, findes både teoretisk og forsøgsmæssigt at danne vinklen  $\alpha = 26,5^\circ$  med kraftretningen, se figur 2.7. Det bemærkes, at der også eksisterer andre brudmekanismer end de i figur 2.7 viste, se eksempelvis H. Exner [83.6].

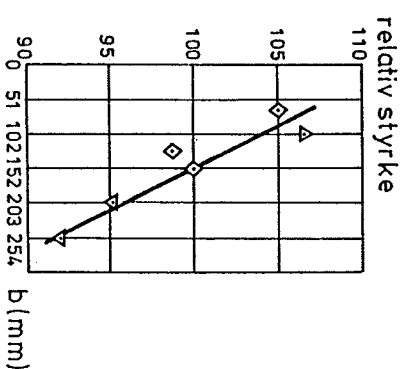


Figur 2.7: Brudsnit i beton under enaksset tryk.

Betegnes prøvelegemets dimensioner i henholdsvis kraftretningen og tværretningen  $h$  og  $b$  - dog  $d$  for cylindre - kræves det hermed for at glidningsbruddet uhindret kan dannes at  $h/d \geq 2$ .

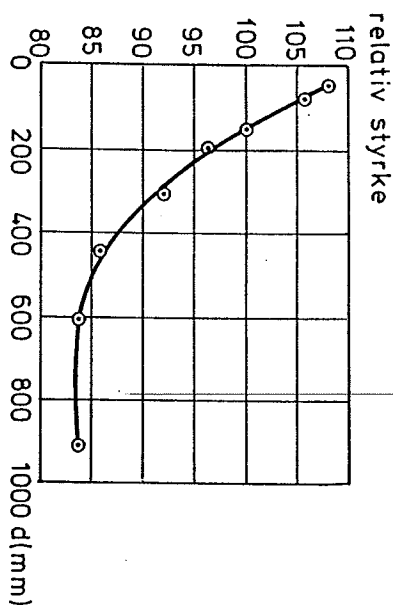
### Prøvelegemets absolutte dimension

For prøvelegemer med samme  $h/d$ -forhold - det vil sige liggendende legemer - afhænger den målte styrke af prøvelegemets absolutte dimensioner, det vil sige betonvolumen. Generelt gælder, desto større betonvolumen desto mindre styrker og spredning. Dette forhold skyldes den såkaldte *statistiske effekt* - undertiden benævnt *Weibull-effekten* - idet sandsynligheden for fejl i materialet vokser med voksende betonvolumen. I figur 2.8 og 2.9 er målte relative styrker for prøvelegemer med henholdsvis  $h/b = 1$  (terningeformet) og  $h/d = 2$  (cylinderformet) vist som funktion af de absolute dimensioner.



Figur 2.8: Statistisk effekt for terningeformede prøvelegemer (efter A.M. Neville [81.1]).

Om figur 2.8, og til dels figur 2.9, bemærkes det, at kurvens beliggenhed i nogen grad er afhængig af betonens styrkeniveau - hvilket der ikke i figuren er taget hensyn til - således at hældningen af kurven - i forhold til vandret - for de svagere betoner er større. Afvigelsen fra en middellokke, som den i figur 2.8 viste, vil dog sjældent være mere end cirka 5%. Styrkeniveauets indflydelse er iøvrigt nærmere behandlet i forbindelse med figur 2.16.



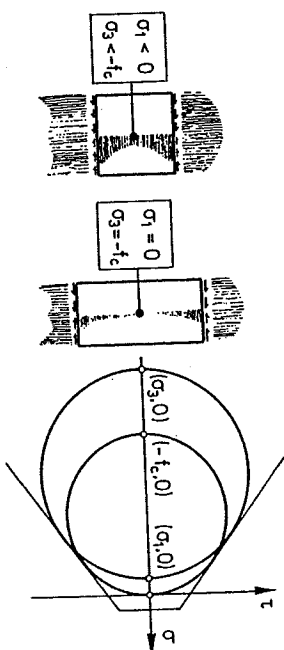
Figur 2.9: Statisk effekt for cylindriske prøveløgner, med  $h/d = 2$  (efter A.M. Neville [81.1]).

Bestemmende for prøveløgners absolutte dimensioner er hvornår betonen ud fra en makroskopisk betragtning tilnærmelsesvis kan betragtes som et homogent materiale. Erfaringsmæssigt er dette tilfældet, når prøveløgnets tværmål  $b$  er mindst tre gange største stenstørrelse.

### Spændingstilstanden i prøveløgnen

På grund af friktionen mellem prøvemaskinens lejeflader og prøveløgnets belastningsflader, vil der i prøveløgnets belastningsflader opstå forskydningspændinger, således at der fremkommer en treakset spændingstilstand. Desto mindre prøveløgnets  $h/d$ -forhold er, desto mere udbredt vil ovennævnte treaksede spændingstilstand være i prøveløgnen. Er derimod  $h/d$ -forholdet stort, vil kun en vis udstrækning omkring prøveløgnets belastningsflader være influeret af den tredimensionale spændingstilstand, hvilket betyder, at et område midt i prøveløgnen kan regnes at være påvirket af et enskæst tryk. Ovennævnte betyder, at de styrker, der findes for prøveløgner med et lille  $h/d$ -forhold, ikke svarer til Mohr's cirkel, der går igennem punkterne  $(-f_c, 0)$  og  $(0, 0)$ , men derimod cirkler

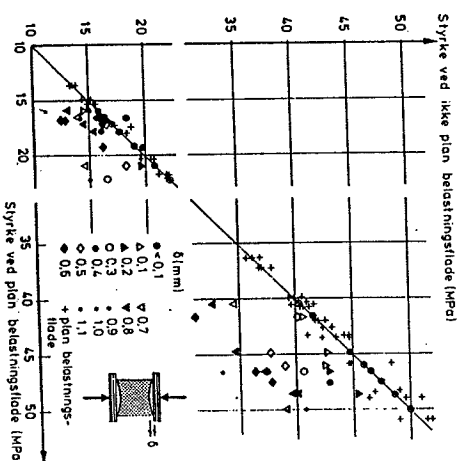
der går igennem punkterne  $(\sigma_3, 0)$  og  $(\sigma_1, 0)$  - jævnfør figur 2.10.



Figur 2.10: Spændingsforholdene i forskellige forsøgløgner (efter Beton-bogen [85.1]).

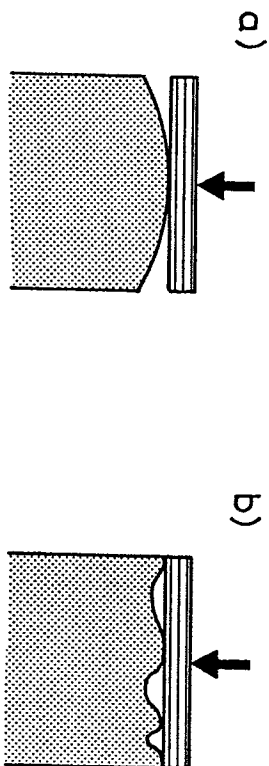
### Prøveløgnets planhed ved belastningsflader

Planheden af prøveløgnets belastningsflader, samt disses ortogonalitet med kraftretningen, influerer på, hvorledes belastningen føres ind i prøveløgnen. I figur 2.11 er vist, hvordan planheden af terningsformede prøveløgner ( $h = b = 300$  mm) påvirker de styrkeresultater, der opnås.

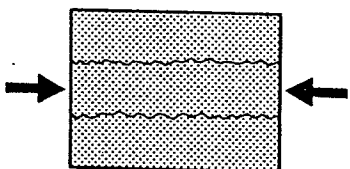


Figur 2.11: Styrkeindsfyldelse på grund af manglende planhed af belastningsfladerne (efter S. Månget [68.1]).

på grund af prøvelegemets udstøbning, hvis denne er sammenfaldende med belastningsretningen, vil belastningsfladens form ofte tilnærmelsesvis være nedad hult, som vist i figur 2.11. Dog bemærkes det, at for betoner af mere fed konsistens, kan der forekomme flader, der er opad hult - se figur 2.12a. Mere ustrukturerede ujævnheder, som de i figur 2.12b viste, forekommer dog også hyppigt. Sådanne ujævnheder kan betyde, at belastningen via enkelte punkter føres koncentreret ind i prøvelegemet, hvorved det såkaldte spaltebrud kan opstå - se figur 2.13. De her nævnte forhold gælder også for belastningsflader, der er opad hult.



Figur 2.12: Prøvelegemets ujævnheder ved belastningsfladen.



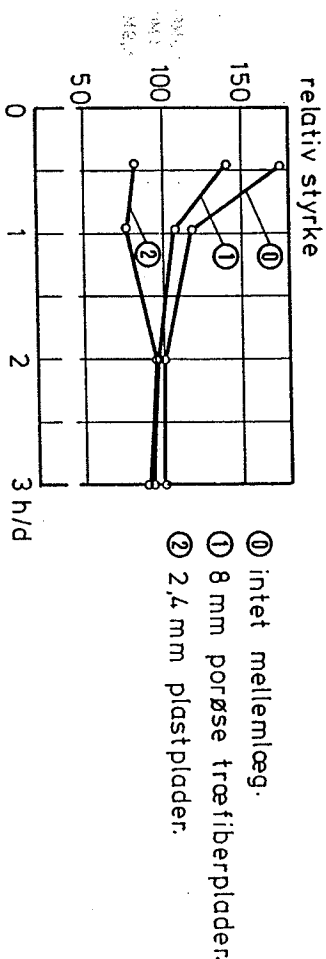
Figur 2.13: Spaltebrud.

Det bemærkes, at spaltebruddet ifølge Coulomb's modificerede brudhypotese er et adskillelsesbrud, det vil sige et trækbrud, og har som sådant ikke noget med betonens trykstyrke at gøre.

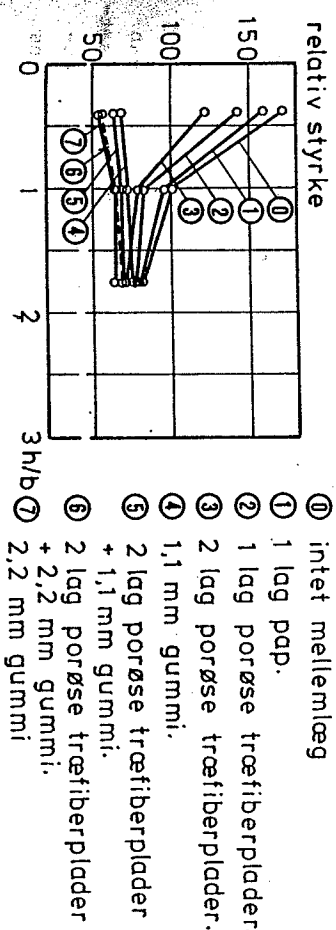
For at opnå en rimelig plan belastningsflade, kan det i visse situationer være nødvendigt at planslibe denne.

### Mellemlag mellem prøvemaskine og prøvelegeme

For at minimalisere indflydelsen af dels ovennævnte ujævnheder, og tildels de forskydningspændinger, der opstår mellem prøvemaskinen og prøvelegeme, anvendes mellem disse de såkaldte mellemæg. I figur 2.14 og 2.15 er vist forskellige typer mellemlags indflydelse på de styrkeresultater, der opnås.



Figur 2.14: Mellemlagets indflydelse på målte styrker for cylindre med  $d = 100$  mm (efter S. Thaulow [60.1]).

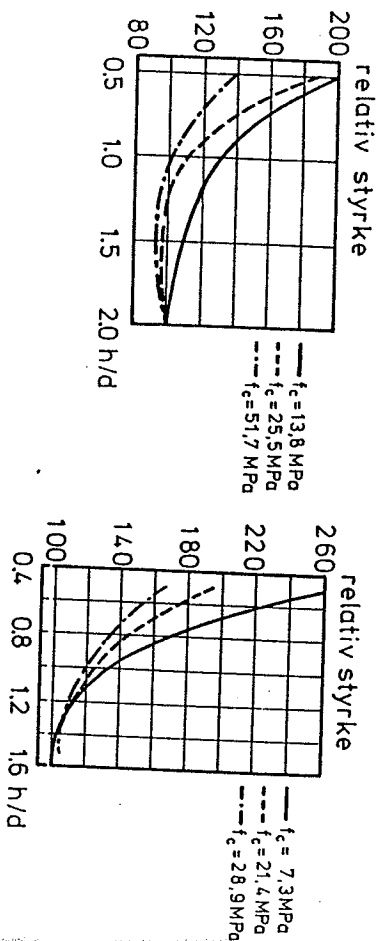


Figur 2.15: Mellemlagets indflydelse på målte styrker for prismar med  $b = 200$  mm (efter S. Thaulow [60.1]).

Som det fremgår af figur 2.14 og 2.15, ses typen af mellemæg, i overensstemmelse med princippet i figur 2.10, at have større betydning desto mindre prøvelegemets  $h/d$ -forhold er.

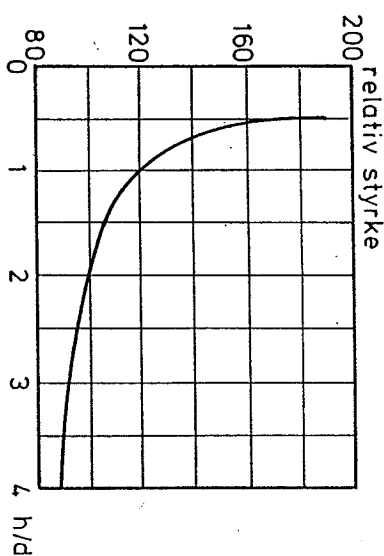
### Prøvelegemets højde/bredde-forhold

Om der anvendes prismar eller cylindre som prøvelegemer giver ikke nogen afgørende forskel i de styrker der opnås. Derimod spiller  $h/d$ -forholdet - som vist ovenfor - en afgørende rolle. Desværre er sammenhængen mellem de styrker, der måles for forskellige  $h/d$ -forhold, afhængige af betonens styrkeniveau, som vist i figur 2.16.



Figur 2.16: Betonens relative styrke som funktion af  $h/d$  og betonens trykstyrke  $f_c$  ( $f_c = \text{cylindrestyrke}$  ( $h/d = 2$ )). (Efter J.W. Mindock et al. [57.11]).

Desværre eksisterer der ikke alment accepterede omsætningskurver, der tager hensyn til betonens styrkeniveau, hvorfor man indtil videre er henvist til at bruge den styrkeafhængige omsætningskurve vist i figur 2.17. Kurverne i figur 2.16 kan dog anvendes til en kvalitativ vurdering, af den indflydelse betonens styrkeniveau har.



Figur 2.17: Omsætningskurve for cylindertestprøvelegemer (uden mellemæg) (Efter A.M. Neville [81.1]).

I tabel 2.2 er generelle omsætningsfaktorer for de hyppigst anvendte typer af prøvelegemer vist. De anførte faktorer tager ikke hensyn til alle de forhold, der er gennemgået i det foregående, og kan som sådan til tider give endog særdeles misvisende resultater. Faktorerne bør derfor benyttes med en vis forsigtighed.

| Prøvelegeme | Dimensioner (mm) |       | Relativ styrke |
|-------------|------------------|-------|----------------|
|             | Diameter/bredde  | Højde |                |
| Cylinder    | 50               | 100   | 1,09           |
|             | 75               | 150   | 1,06           |
|             | 100              | 200   | 1,03           |
|             | 150              | 300   | 1,00           |
|             | 200              | 400   | 0,97           |
|             | 300              | 600   | 0,91           |
| Terning     | 100              | 100   | 1,25           |
|             | 150              | 150   | 1,20           |
|             | 200              | 200   | 1,14           |
|             | 300              | 300   | 1,08           |
| Prisme      | 150              | 450   | 0,95           |
|             | 200              | 600   | 0,95           |

Tabel 2.2: Omsætningsfaktorer for forskellige prøvelegemetyper (uden mellemæg). (Efter Beton-bogen [85.1]).

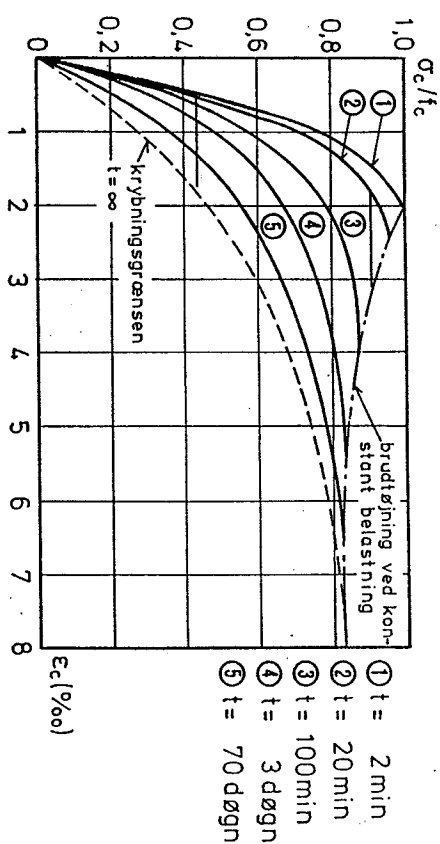
## Udborede prøvelegemer

Normalt anvendes ved en styrkebestemmelse støbte prøvelegemer. Der er dog situationer, hvor der ikke eksisterer støbte prøvelegemer, således at man er henvist til at anvende udborede legemer som prøvelegemer. På grund af udstøbning, komprimering og hærning vil der for en beton med samme modenhed komme en vis afvigelse i de styrker, der måles for de to typer prøvelegemer. De styrker, der findes ved hjælp af udborede prøvelegemer, er ikke alene afhængige af hvilken konstruktion, de er taget fra, men også hvorledes de er taget i den aktuelle konstruktion. Disse forhold vanskeliggør i en vis udstrækning fastsættelsen af den aktuelle konstruktions referencestyrke. Forsøg synes dog at vise, at styrkerne for udborede legemer i forhold til udstøbte legemer er 10-30% mindre, samt at spredningen for førstnævnte legemer er større. Generelt kan der regnes med, at de styrker, der findes for udborede legemer, skal hæves med 25% for at få de tilsvarende styrker for udstøbte legemer. Ovennævnte forudsætter at betonen har samme modenhed.

## Belastningshastighed

Desto mindre belastningshastigheden er desto mindre forsøgsstyrker opnås, som det fremgår af figur 2.18. Dette forhold skyldes til dels, at en vis krybning, afhængig af belastningsvarigheden, finder sted.

Da den primære interesse her er knyttet til korttidsstyrken, det vil sige en belastningshastighed på 0,4-1 MPa/sek. - svarende til en belastningsvarighed på cirka 2 minutter - vil effekten af belastningstiden på de opnåede resultater sjældent være mere end cirka 5%.

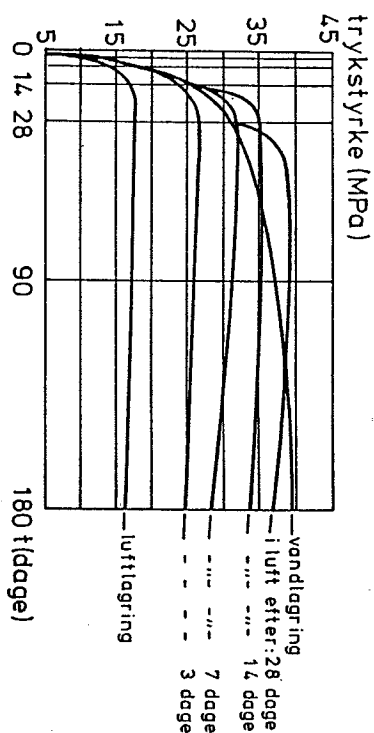


Figur 2.18: Målte styrker som funktion af belastningsvarigheden.  
(Efter M.P. Nielsen [74.2]).

## Lagring fugtighed

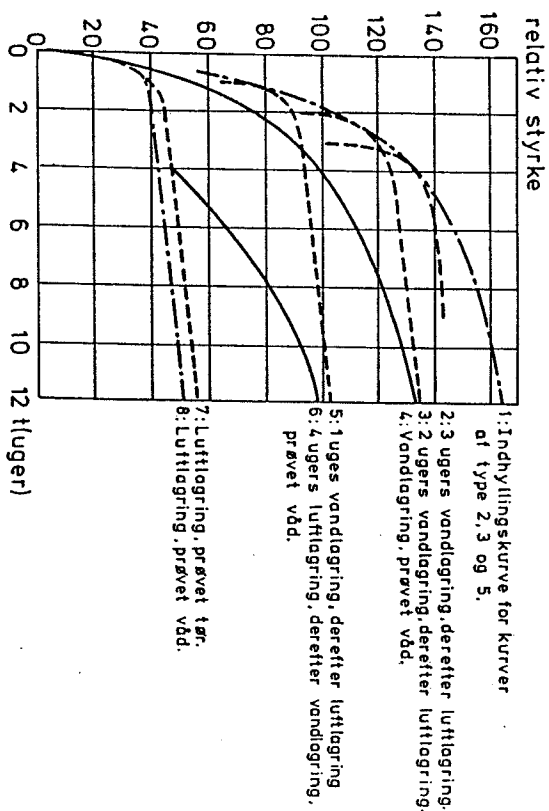
Afgørende for betonens styrkeudvikling er, om det nødvendige vand til hærkning af betonen er til stede i lagringsperioden. Omgivelsernes fugtighed skal således ikke alene hindre vand i at fordampes fra legemet, men også yde en vis mængde fugt til legemet, således at den optimale styrke opnås. Hermed følger det også, at det ikke er tilgængeligt under hvilke fugtighedsforhold prøvelegemet opbevares mellem udstøbningstidspunktet og forsøgstidspunktet.

Der skelnes mellem to typer opbevaring, nemlig den hvor betonen er omgivet af vand, og den hvor betonen er omgivet af en luft med en vis relativ luftfugtighed (RF). I figur 2.19 og 2.20 er det vist hvorledes fugtighedsforholdene influerer på styrkeudviklingen. Vedrørende figur 2.20 skal det specielt bemærkes, at kurverne er baseret på få forsøgsresultater og kan som sådan i visse tilfælde være misvisende. Kurverne kan dog anvendes for en kvalitativ vurdering af fugtighedsindflydelsen.



temperatur: 21° C  
luftlagring: Relativ luftfugtighed svarende til normal indendørsklima.

Figur 2.19: Lagringsforholdenes indflydelse på styrken ( $v/c = 0,50$ ).  
(Efter W.H. Price [51.1]).



Prøvelegeme: Cylinder ( $d = 50$  mm,  $h = 100$  mm)  
luftlagring: Relativ fugtighed svarende til normal indendørsklima.

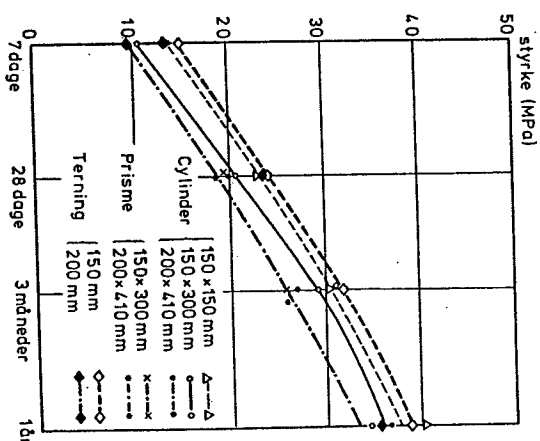
Figur 2.20: Lagringsforholdenes indflydelse på den relative styrke  
(efter E. Svenson [31.1]).

Generelt kan vandlagrede legemer regnes at have 10% større styrker end legemer opbevaret ved 100% RF. Desværre eksisterer der ikke nogen oplysninger for hvorledes forskellige relative luftfugtigheder påvirker styrkerne.

Desto tyndere et legeme er, desto mere følsom vil det være overfor omgivelsernes fugtighedsforhold. Der synes også at være en tendens til, at de mere fede betonkonsistenser er mere påvirkelige overfor fugtforholdene end de tyndere konsistenser.

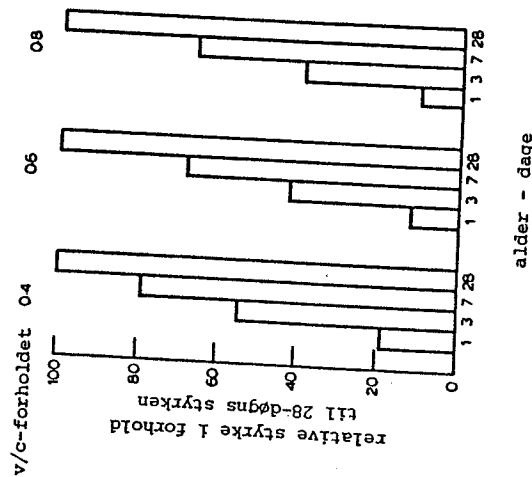
### Styrkeudvikling

Eksisterer der vand nok til betonens hardning vil styrkeudviklingen kunne fortsætte gennem flere år, som vist i figur 2.21. Specielt interessant ved figur 2.21 er det, at prøvelegemets form ingen indvirkning har på styrkeudviklingen. Mange faktorer in-



Figur 2.21: Hærdningstidens indflydelse på betonens styrke  
(efter A.M. Neville [81.1]).

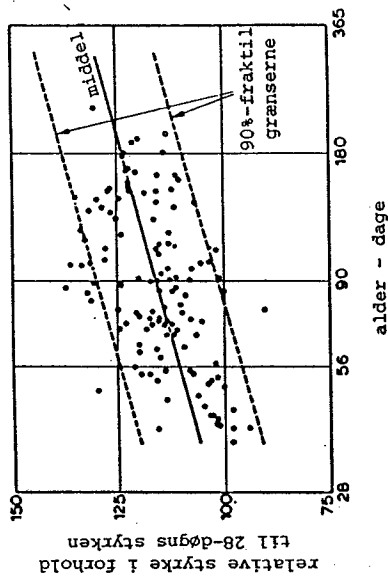
fluerer på hvorledes styrken udvikler sig som funktion af tiden. Blandt disse faktorer kan nævnes cementkvaliteten, v/c-forholdet, styrkeniveauet samt omgivelsernes fugt og temperatur, se tidligere. Eksempelvis gælder det, at desto lavere v/c-forholdet er, desto hurtigere vil styrkeudviklingen være, hvilket er illustreret i figur 2.22.



Figur 2.22: v/c-forholdets indflydelse på styrkeudviklingen (efter A.M. Neville [81.1]).

Som det fremgår af ovennævnte, er det vanskeligt at konstruere nogle generelle omsætningskurver. Ses der bort fra indflydelsen af de forskellige parametre nævnt ovenfor, hvilket naturligvis øger spredningen væsentligt, fås styrkeudviklingen at være som vist i figur 2.23.

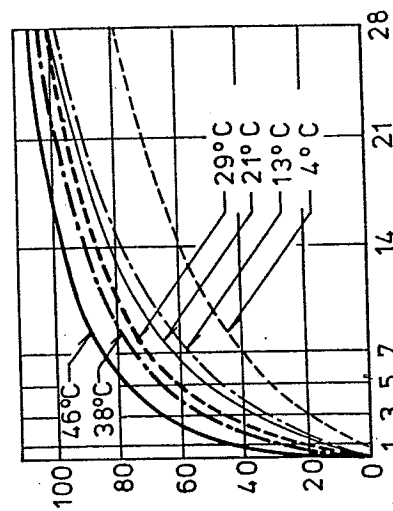
Generelt ligger 28-dags-styrken 1,3-1,7 gange over 7-dags-styrken, dog således at hovedparten af målingerne ligger over 1,5. For visse cementtyper eksisterer der kurver over styrkeudviklingen. Der henvises til speciallitteraturen.



Figur 2.23: Styrkeudvikling som funktion af tiden. Referencestyrken er 28-døgn styrken (efter A.M. Neville [81.1]).

### Lagringstemperatur

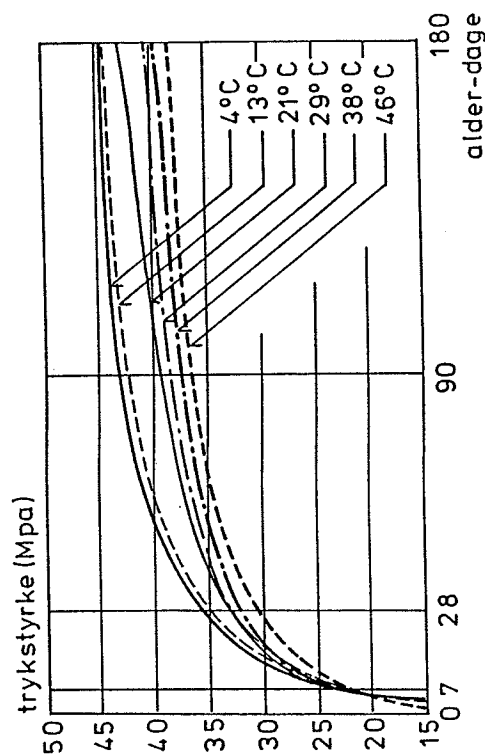
Lagringstemperaturen influerer primært på betonens styrkeudviklingshastighed, som vist i figur 2.24. En høj lagringstemperatur fører dog på langt sigt til lavere styrker, end de der opnås ved lagring under lavere temperaturer.



Figur 2.24: Lagringstemperaturens indflydelse på styrken (efter A.M. Neville [81.1]).

Kurverne i figur 2.24 gælder for konstant temperatur gennem hele hærtningsperioden. Startes der for eksempel med forskellige temperaturer og andres temperaturen efter et par timer til at være den samme, vil legemerne der startede ved en høj temperatur relativt hurtigt få en svagere styrke, end de der startede ved en lavere temperatur, se figur 2.25.

Generelt kan man overslagsmæssigt regne med en styrkereduktion på 1,3 MPa, hvis temperaturen lige efter udstøbningen er 5°C højere end lagringstemperaturen.



Figur 2.25: Effekt på styrkeudviklingen af legemer opbevaret under forskellige temperaturer de to første timer efter udstøbningen. Deres var temperaturen konstant 21°C. (Efter A.M. Neville [81.1]).

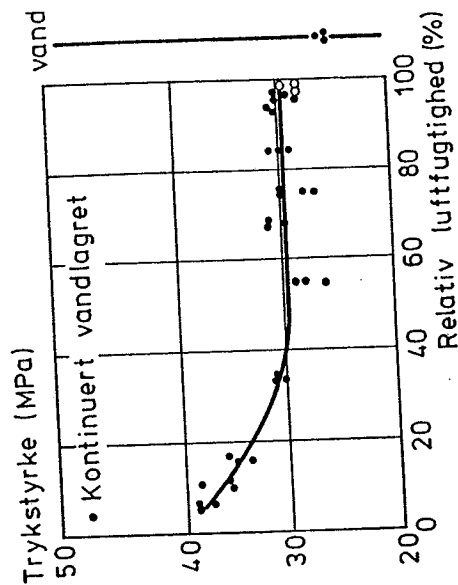
I speciallitteraturen, eksempelvis Betonbogen [85.1], findes former efter hvilke styrken kan beregnes, hvis temperaturen har varieret.

For temperaturer lavere end -12°C vil der ingen styrkeudvikling finde sted.

## Prøvelegemets fugtighed på forsøgstidspunktet

Når en beton udstøbes, dannes der i porevandet kapillære undertryk, der på grund af de små porer i cementpastaen, kan blive endog særdeles store. Ovenstående betyder, at der i prøvelegemet optræder egenspændinger i form af en slags forspænding, således at prøvelegemets styrke vil være øget. Prøvelegemets udtørring er ikke alene en funktion af den omgivende lufts relative fugtighed og temperatur, men også af prøvelegemets absolutte dimensioner, det vil sige betongvolumen, således at udtørringseffekten spiller en større rolle for små legemer end for store.

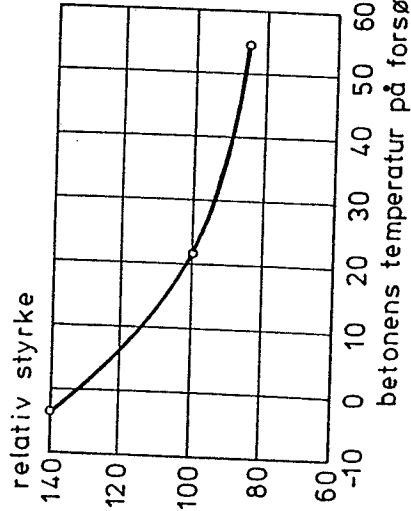
I forhold til fuldstændig vandmættede forsøgslegemer vil forsøgslegemer, der opbevares i 40-100% RF, have en styrkeforøgelse på cirka 15%, mens forsøgslegemer med en lavere RF end 40% vil have en mere markant styrkeforøgelse, nemlig op til 50%, se figur 2.26.



Figur 2.26: Styrkens afhængighed af legemets fugttilstand på forsøgstidspunktet (Efter A.M. Neville [81.1]).

### Prøvelegemets temperatur på forsøgstidspunktet

I figur 2.27 er vist, hvorledes betonens temperatur på forsøgstidspunktet influerer på de målte styrker. Normalt bestemmes en betons styrke for prøvelegemer med en temperatur på cirka 20°C.



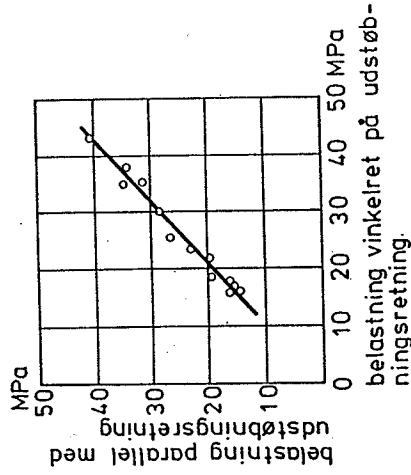
Figur 2.27: Indflydelsen af betonens temperatur på forsøgstidspunktet (efter A.M. Neville [81.1]).

### Udstøbning og komprimering

Kvaliteten af betonens vibrering øver en vis indflydelse på de styrker, der opnås ved forsøg. En dårlig vibrering kan således føre til inhomogeniteter i prøvelegemet, og dermed stor spredning på de styrker der måles. Generelt bør alle forsøgslegemer vibreres i lige lang tid.

Hvorvidt et forsøgslegeme belastes i støberetningen, herunder lagringsretningen eller vinkelret herpå, er ikke ligegyldigt for de styrker der opnås, omend betydningen er minimal. Således vil tungere partikler i udstøbningsretningen, under indflydelse af tyngden og vibreringen, have tendens til at søge mod bunden af forsøgslegemet. Opbevares forsøgslegemet med udstøbningsretningen lodret, vil der være tendens til vandseparation og sedimentation.

I figur 2.28 er belastningsretningens indflydelse på styrken vist for terningsformede forsøgslegemer.



Figur 2.28: Belastningsretningens indflydelse på de målte styrker (efter A.M. Neville [81.1]).

### Prøvemaskinen

Alt afhængig af hvilken prøvemaskine der benyttes, kan der være en afvigelse på op til 10% på de styrker der måles. Årsagen her til er blandt andet prøvemaskinernes konstruktion og kalibrering, trykpladernes bevægelighed, centricitet, stivhed, planhed og glathed samt betjening.

Vedrørende prøvemaskinernes konstruktion spiller selve maskinernes stivhed en central rolle. Er prøvemaskinen eksempelvis forholdsvis spinkel, vil den under forsøget få relativt store deformationer og dermed oplagres en stor mængde energi. Når bruddet i forsøgslegemet nås, vil denne energi gøre at forsøgslegemet splintres. Benyttes derimod en meget stiv prøvemaskine vil bruddet forløbe langt roligere, jævnfør afsnit 2.2.3.

Som betjeningsfejl kan nævnes en excentrisk placering af prøvelegemerne i prøvemaskinen. Eksempelvis vil en excentricitet på 5 mm føre til en styrkereduktion på cirka 10%.

### Pålidelighed

På grund af betonens inhomogenitet vil der være en forholdsvis stor spredning på de forsøgsresultater der måles. Til eksempel kan det nævnes, at foretages prøvningen under velkontrollerede forhold, vil variationskoefficienten sjældent komme under cirka 4%. Generelt ligger variationskoefficienten mellem 4% og 6%.

Det er derfor vigtigt, at der ligger flere forsøg til grund for en styrkefastsættelse. Dette dels for at øge pålideligheden til den angivne styrke, men også for at få et mål til en vurdering af den aktuelle betons kvalitet.

Det er klart, at desto flere forsøg der gennemføres, desto mere pålidelig vil den angivne styrke være. Omvendt kan man også sige, at få forsøgsresultater, med en lille spredning, giver en større tillid end en stor forsøgsserie med en stor spredning. For en mere uddybende behandling af dette emne henvises til speciallitteraturen, eksempelvis Betonbogen [85.1].

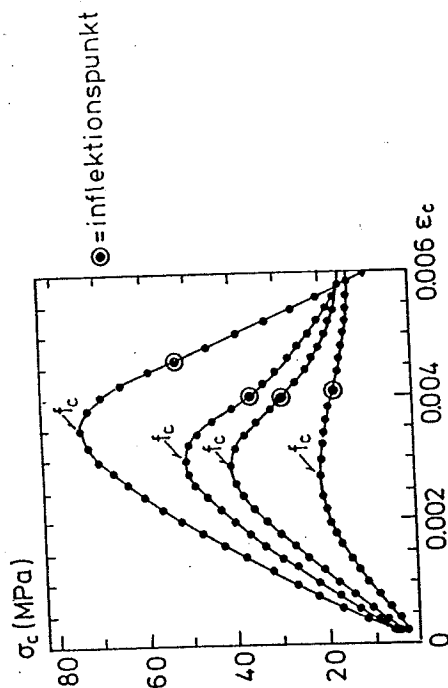
Vedrørende laboratorieforsøg, hvor en betons styrke skal fastlægges, bør der som et minimum gennemføres 3 forsøg, før den bestemte styrke kan siges at være pålidelig.

### Referencestykker

Som referencestykker vil her blive benyttet styrker, der er målt på cylindre med  $h = 300$  mm og  $d = 150$  mm. Betonen forudsættes bordvibreret, og der regnes med en liggende opbevaring. Prøvelegemerne forudsættes vådlagret, samt at være i våd tilstand ved prøvningen. Temperaturen både ved lagring og prøvning regnes at være  $20^\circ\text{C}$ . Belastningshastigheden skal være ca.  $0,8$  MPa/sek. Prøvemaskinen skal være så stiv, at dens deformation ikke påvirker resultatet.

### 2.2.3 Betons arbejdskurve

I figur 2.29 er vist nogle forsøgsmæssigt bestemte arbejdskurver for beton under enakset tryk.



Figur 2.29: Arbejdskurver for beton med forskellige styrker under enakset tryk (efter P.T. Wang et al. [78.3]).

I det følgende vil den del af arbejdskurven, der ligger før toppunktet, blive kaldt *kurvens opadgående gren*, mens kurvedelen efter toppunktet vil blive benævnt *kurvens nedadgående gren*. Om kurvens nedadgående gren bemærkes, at dels udviser denne voksende idealplastiske egenskaber for aftagende værdier af betonens trykstyrke, og dels indeholder den et infleksionspunkt, det vil sige et vendepunkt for tangenten. Infleksionspunktet identificeres i forsøgsmæssig sammenhæng ved henholdsvis et lille fald i spændingsintensiteten og en revnelignende lyd.

Der eksisterer utallige forslag til analytiske udtryk for betons arbejdskurve. Her vil et analytisk udtryk foreslået af P.T. Wang et al. [78.3], og senere korigeret af H. Exner [83.5] blive anvendt. Det analytiske udtryk er af de oprindelige forfattere fundet gennem en test med mange forskelligartede analytiske udtryk på deres egne forsøgsdata.

Betonen, som blev anvendt ved bestemmelsen af ovennævnte forsøgsdata, var sammensat af cement type I, kvarts-sand og et dolomitisk limstens grusmateriale med en maksimal stenstørrelse på  $9,5$  mm. Vand-cement-, sand-cement- samt grus-cementforholdet var på henholdsvis  $0,45$ ,  $2,0$  og  $3,0$ . Forsøgsmønstrene opbevarede indtil dagen

før prøvning ved 21°C og 100% relativ fugtighed. For at kunne lagte arbejdskurver med varierende betonstyrker havde betonen på prøvetidspunktet varierende alder fra 2 dage til 125 dage. For hvert styrkeniveau blev 6 cylindre ( $d = 76 \text{ mm}$ ,  $h = 152 \text{ mm}$ ) afprøvet.

For forsøgsmæssigt at kunne følge kurvens nedadgående gren blev en deformationsstyret prøvemaskine anvendt. Betoncylindrene blev under forsøget placeret i et stålør (diameter = 102 mm) således at denne blev påført samme deformationer som cylindrene. Denne metode blev brugt til erstatning for anvendelsen af en prøvemaskine med stor stivhed. Stålrøret var hærdet, således at det var lineær-elastisk op til tøjninger på 6 o/oo, hvilket netop var den øvre grænse for de forsøgsmæssigt bestemte arbejdskurver for betonen. Arbejdskurven for betonen blev fundet gennem måling af tøjningerne i stålrøret midtvejs mellem belastningspladerne. Belastningshastigheden var 0,01 o/oo tøjning pr. sekund. Til checking af metodens anvendelighed blev indledningsvis kurvens opadgående gren sammenlignet med den tilsvarende kurve for beton prøvet efter den normale prøvningsprocedure.

Ovenstående målingsmetode har nogle svagheder, hvoraf et par af de væsentligste skal nævnes her. Der stilles endog særdeles store krav til forsøgsopstillingen til sikring af, at kraften samtidigt fordeles over både betoncylinder og stålrør. Den målte tøjning er en middeltøjning over hele legemets højde, til trods for at der ved betoncylindrens endeflader optræder både normal- og forskydnings-spændinger. Det er ikke muligt at observere betoncylindrenes opførsel under forsøget på grund af stålrøret.

Betonens arbejdskurve beskrives ved et analytisk udtryk af formen.

$$y = \frac{Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} \quad (2.28)$$

$$y = \frac{\sigma_c}{f_c}, \quad x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_o}$$

hvor  $(\epsilon_o, f_c)$  er arbejdskurvens topunkt.

En arbejdskurve indeholder to sæt konstanter, nemlig  $A_o, B_o, C_o$  og  $D_o$  for kurvens opadgående gren og  $A_n, B_n, C_n$  og  $D_n$  for kurvens nedadgående gren. Regnes følgende forhold for arbejdskurven kendt:

- topunktet  $(\epsilon_o, f_c)$
- sekantelasticitetsmodulet  $E_c, 0,45$  for  $\sigma_c = 0,45 f_c$
- infleksionspunktet  $(\epsilon_1, \sigma_1)$
- et punkt  $(\epsilon_{21}, \sigma_{21})$  der opfylder kravet  $\epsilon_{21} - \epsilon_1 = \epsilon_1 - \epsilon_o$

samt stilles følgende krav til henholdsvis kurvens opadgående og nedadgående gren

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\epsilon_o E_c, 0,45}{f_c} & \text{for } (x, y) = (0, 0) \\ x &= 0,45 \frac{f_c}{\epsilon_o E_c, 0,45} & \text{for } y = 0,45 \\ x &= 1 & \text{for } y = 1 \\ \frac{dy}{dx} &= 0 & \text{for } (x, y) = (1, 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

og kurvens nedadgående gren

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= (1, 1) \\ \frac{dy}{dx} &= 0 & \text{for } (x, y) = (1, 1) \\ x &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_o} & \text{for } y = \frac{\sigma_1}{f_c} \\ x &= \frac{\epsilon_{21}}{\epsilon_o} & \text{for } y = \frac{\sigma_{21}}{f_c} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

kan for en aktuel beton konstanterne i udtrykket (2.28) bestemmes.

Kravene (2.29)-(2.30) er opstillet af P.T. Wang et al. [78.3].

En betingelse for anvendelse af arbejdskurven udover  $\epsilon_c = 6.0/100$  er, at asymptoteverdier

$$\lim_{\epsilon_c \rightarrow \infty} \sigma_c = \frac{B_n}{D_n} f_c \quad (2.31)$$

er lig med nul, det vil sige  $B_n = 0$ . Denne betingelse er ikke opfyldt af kravene i (2.30). Erstattes kravet om at kurven skal gå igennem  $(\epsilon_1, \sigma_1)$ , med kravet om  $B_n = 0$ , vil dette ikke for tøjningsintervallet 0-6.0/100 føre til nogen mærkbar ændring af kurvens beliggenhed, se figur 2.30. Ovenstående korrektion skyldes H. Exner [83.5].

Til fastlæggelse af en betons arbejdskurve kræves, som nævnt ovenfor, kendskab til fire punkter på arbejdskurven. P.T. Wang et al. [78.3] har på basis af deres forsøgsresultater fundet, at disse punkter tilnærmelsesvis kan findes som lineære funktioner af trykstyrken, hvorved arbejdskurven for en aktuel beton kan bestemmes alene med kendskab til denne betons enaksede trykstyrke  $f_c$ .

For topunktstøjningen  $\epsilon_0$  haves

$$\epsilon_0 = 0,0000181 f_c + 0,00230 \quad (2.32)$$

mens sekantelasticitetsmodulet  $E_c, 0,45$  er bestemt ved

$$E_c, 0,45 = 271 f_c + 6740 \quad (2.33)$$

For inflektionspunktet fås

$$\epsilon_1 = 0,000007 f_c + 0,00401 \quad (2.34)$$

$$\sigma_1 = 0,580 f_c + 5,34$$

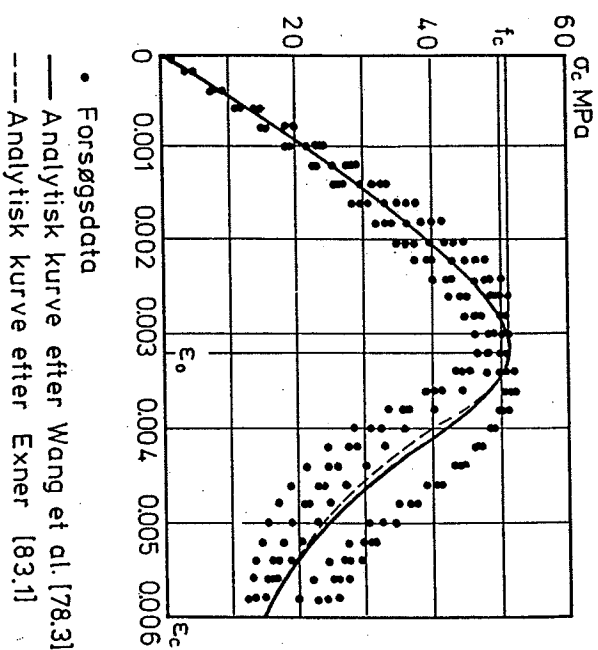
mens det sidste punkt er bestemt ved

$$\epsilon_{21} = 2\epsilon_1 - \epsilon_0$$

(2.35)

$$\sigma_{21} = 0,085 f_c + 13,96$$

Med ovenstående oplysninger er det muligt at fastlægge en betons arbejdskurve. I figur 2.30 er otte af ovenstående forfatters forsøgsmæssigt bestemte arbejdskurver indtegnet sammen med en teoretisk arbejdskurve bestemt på basis af gennemsnitsværdier af  $f_c$  for ovenstående forsøg.



Figur 2.30: Teoretisk arbejdskurve sammenlignet med forsøg.

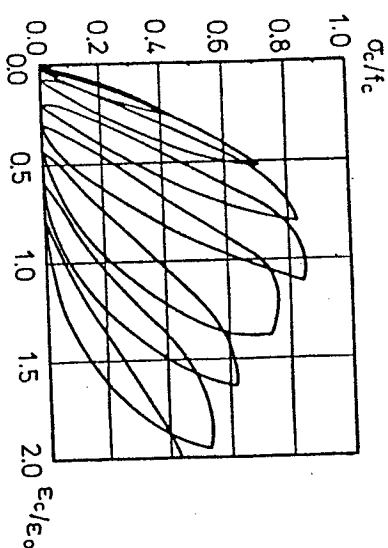
Generaliteten af ovennævnte teoretiske arbejdskurve er verificeret gennem sammenligning med andre forsøgsmæssigt bestemt arbejdskurver, som indeholdt tøjningsmål på op til 20.0/100.

Ovenstående analyse er baseret på, at belastningen er en engangslast. Værdierne (2.32)-(2.35) kan ikke umiddelbart anvendes, hvis der har været tale om et tidligere belastningsforløb. Eksempelvis

vill  $E_c^{0,45}$  have en større værdi, hvis der er tale om en angangsbelastning, og førstegangsbelastningen højst har været en brøkdel af brudlasten.

P.T. Wang et al. [78.3] har gennem en test med blandt andet udborede prøvelegemer fundet, at metoden også i dette tilfælde giver endog særdeles tilfredsstillende resultater. Prøvelegemernes lagringsforhold med mere synes således ikke at have nogen væsentlig indflydelse på de resultater, der opnås på basis af udtryk (2.32)-(2.35). En vis forsigtighed bør dog udvises indtil dette er fuldstændig verificeret gennem flere analyser.

I figur 2.31 er en eksperimentelt bestemt arbejdskurve for beton under cyklisk belastning vist. Interessant er det at se, at arbejdskurven beskrevet ved ovennævnte udtryk udgør en indhyldningskurve, omend trykstyrken her kun må regnes at være cirka 84% af den der opnås ved det normale trykforsøg.



Figur 2.31: Betons arbejdskurve ved cyklisk belastning.

Ovenstående formel gælder for normalbeton. For letbeton kan det analytiske udtryk (2.28) samt betingelserne (2.29)-(2.30) også regnes at gælde. Derimod ændres de numeriske værdier i formlerne (2.32)-(2.35). Ovennævnte forfattere har dog angivet de tilsvarende udtryk i den her anvendte artikel.

Endelig kan det afslutningsvis bemærkes, at betonens arbejdskurve, med hensyn til enaksset træk, i form minder om trykarbejdskurven, blot med den forskel at den nedadgående gren i dette tilfælde er afhængig af revnevæiden i stedet for tøjningen. Interesserede henvises til speciallitteraturen for yderligere oplysninger.

## 2.3 ARMERING

Som omtalt i afsnit 2.2.1 udgør betonens trækstyrke kun en brøkdel af trykstyrken, hvorfor der i betonen indlægges armering - i form af jernstænger, liner og tråd - til optagelse af de trækspændinger, der måtte optræde.

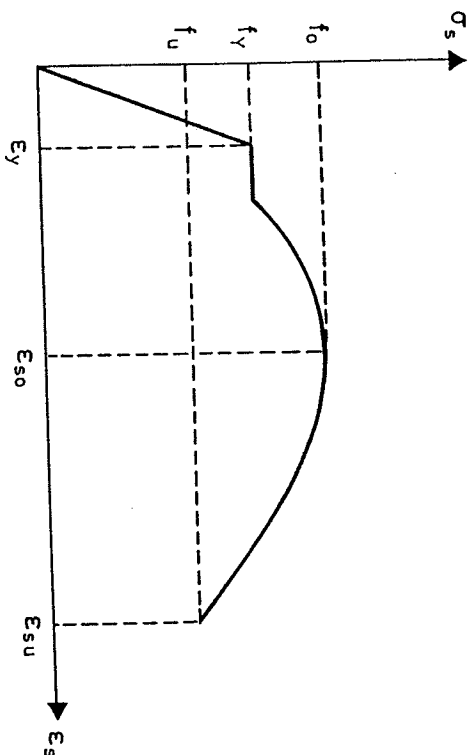
Armeringens overfladestruktur, som ikke er uden betydning for jernbetons virkemåde, vil ikke blive behandlet her, men perifert berørt i afsnit 3.2.

I de kommende kapitler forudsættes armeringen alene at optage træk- og trykspændinger i jernenes længderetning, se nærmere herom i afsnit 3.2, hvorfor interessen vil knytte sig til armeringens egenskaber med hensyn til disse påvirkninger.

Da der eksisterer et utal af forskellige armeringstyper, og dermed arbejdskurver, vil kun nogle af de vigtigste og mest generelle forhold vedrørende armeringens arbejdskurve blive berørt. I figur 2.32 er en generel arbejdskurve for en armering under enaksset træk vist sammen med nogle af de parametre på arbejdskurven, der har en primær interesse i denne sammenhæng.

For små tøjninger kan arbejdskurven regnes lineær-elastisk.

For tøjninger nær flydespændingen  $f_y$  vil arbejdskurvens form være noget fra armeringstype til armeringstype. Normalt kan man skelne mellem armeringer med og uden udpræget flydning. For sidste nævnte gruppe, hvor overgangen mellem det lineær-elastiske og det plastiske område er glidende, definerer man normalt flydespændingen at være den spænding, der hører til en vis grænsetøjning, eksempelvis 0,2%-grænsen. Armering, der benyttes til forspænding,



Figur 2.32: Armeringens arbejdskurve.

det vil primært sige liner, henhører normalt sammen med tensorstål til denne gruppe. For armeringer med udpræget flydning vil overgangen mellem det lineær-elastiske og det ideal-plastiske område være relativt brat. Kamsstål og St. 37 falder ind under denne gruppe.

Efter flydning er indtrådt, vil nogle armeringstyper udvise ideal-plastiske egenskaber. Blandt disse hører eksempelvis ovennævnte liner, og til dels tensorstål.

Visse typer armering vil, efter en kort overgang med ideal-plastiske egenskaber, atter få en spændingstilvækst, på grund af tøjningshærdning. Hvornår tøjningshærdningen indtræffer, og hvor stor denne vil være, er forskellig. Benævnes den maksimale spænding, armeringen kan optage,  $f_o$ , vil størrelsen af denne spænding kunne være op til det dobbelte af flydespændingen. Kamsstål og St. 37 hører under ovennævnte kategori.

Endelig er der brudtøjningen  $\epsilon_{su}$ , som kan være vidt forskellig fra armeringstype til armeringstype.

Som det fremgår af ovennævnte, indtager parametrene  $f_o/f_y$  og  $f_u/f_y$  samt brudtøjningen  $\epsilon_{su}$ , en central rolle for vurderingen

af en aktuel armerings arbejdskurve, hvis en sådan ikke eksisterer. Ved af- og genbelastning af armeringen vil arbejdskurven som oftest være retlinjet, svarende til en kurve der er parallel til den lineære elastiske del af arbejdskurven. Normalt vil man ved genbelastningen komme tilbage til punktet på arbejdskurven, hvor aflastning fandt sted, for derefter at følge arbejdskurven der hører til engangsbelastningen.

Arbejdskurven, der hører til trykpåvirkningen, vil ikke blive beskrevet her, blot skal det nævnes, at trykflydespændingen normalt svarer til trækflydespændingen, selv om den til tider kan være lavere, eksempelvis 80% af trækflydespændingen.

## 2.4 PLASTICITETSTEORI FOR BETON OG JERNBETON

I dette afsnit skal det teoretiske grundlag, samt nogle beregningsudtryk, for benyttelse af plasticitetsteorien ved brudberegning af beton og jernbeton gives.

### 2.4.1 Teoretisk grundlag

En betingelse for benyttelse af nedre- og øvregrænsningerne, se afsnit 2.1.3, er at materialet er ideal-plastisk.

Som det fremgår af figur 2.32, opfylder armeringen tilnærmelsesvis denne betingelse. Selv om den ideal-plastiske sammenhæng ikke fuldt ud er til stede, eksempelvis på grund af tøjningshærdning, vil det være en tilnærmelse på den sikre side at benytte den ideal-plastiske model, karakteriseret ved trækflydespændingen  $f_y$  og trykflydespændingen  $f_y^*$ . Hvor et jernbetonlegemes bæreevne således primært er styret af armeringen, kan plasticitetsteorien anvendes uden problemer. Dette er eksempelvis tilfældet for bjælker, plader og skiver med små armeringsgrader.

Hvor betonens styrkeforhold er afgørende for bæreevnen, er det derimod ikke indlysende at bruge teorien for ideal-plastiske materialer, jævnfør arbejdskurverne vist i figur 2.29 og 2.30. En stor

mængde forsøg har dog vist, at benyttes der en reduceret betonstyrke i de plastiske beregningsudtryk, er overensstemmelsen mellem teori og forsøg endog særdeles god. Teoretisk kan dette forhold udtrykkes ved, at den reduktion på betonstyrken, der skal benyttes, er bestemt af kravet om, at det indre arbejde i brudstadiet, for henholdsvis den virkelige konstruktion og den idealplastiske model, skal være identisk.

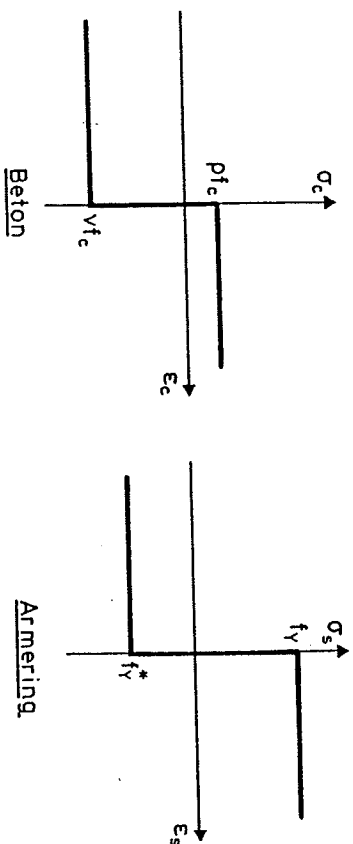
Med ovenstående er der indført to nye parametre i betonstyrkelæren, nemlig betons idealplastiske styrker med hensyn til træk og tryk. Disse benævnes

$$f_{cp} = v f_c \quad (2.36)$$

$$f_{tp} = v_t f_t = \rho f_c \quad (2.37)$$

hvor størrelserne  $v$ ,  $v_t$  og  $\rho$  kaldes effektivitetsfaktorerne, mens  $f_c$  og  $f_t$  er betonens henholdsvis enaksede tryk- og trækstyrke.

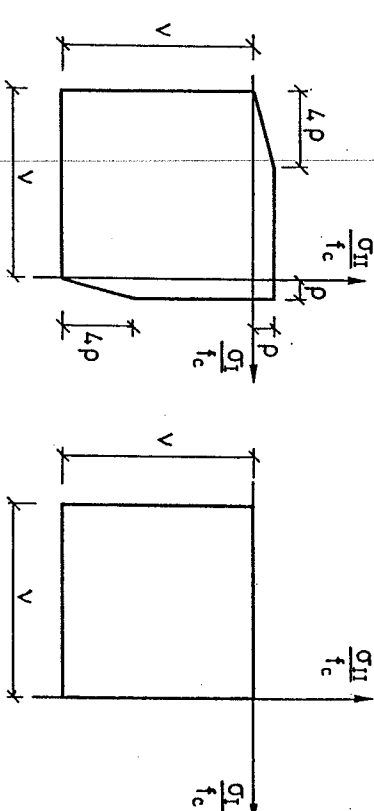
For de enaksede påvirkninger haves hermed, for henholdsvis beton og armering, arbejdskurverne vist i figur 2.33.



Figur 2.33: Betons og armerings plastiske styrker ved enaksede påvirkninger.

Indføres de plastiske størrelser defineret ved (2.36) og (2.37) i Coulomb's modificerede brudbetingelse, se afsnit 2.2.1, haves

en flydebetingelse til fastlæggelse af betonens flydeflade. For plan spændingstilstand vil flydefladsens udseende være som vist i figur 2.34a.



Figur 2.34: Betons flydeflade ved plan spændingstilstand.

Er bæreevnen primært styret af armeringen og betonens trykstyrke, kan trækstyrken negligeres, det vil sige  $\rho = 0$ , og flydefladsen bliver som vist i figur 2.34b.

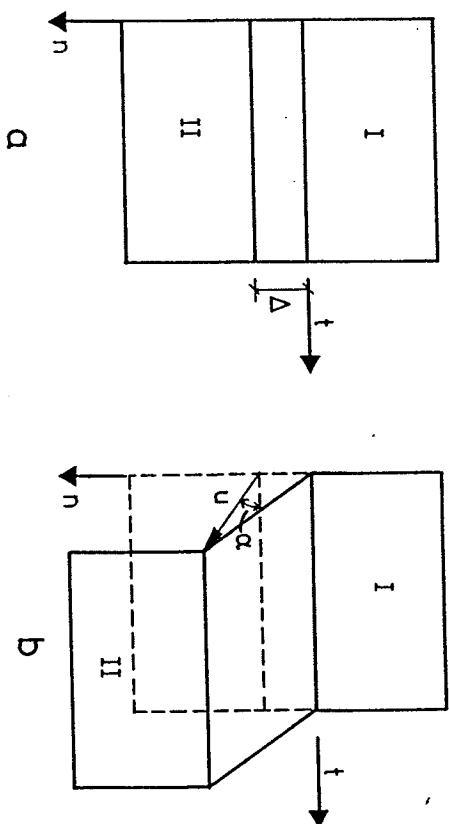
I afsnit 2.4.3 vil en mere detaljeret beskrivelse af effektivitetsfaktoren, og de forhold der influerer på værdien af denne, blive givet.

## 2.4.2 Betons plastiske arbejde

For at kunne benytte øvrerværdimetoden ved bæreevneberegninger af beton, kræves der kendskab til det indre arbejde, betonen vil yde i brudstadiet.

Opstilling af udtryk for betonens plastiske arbejde, kræver kendskab til den deformation, der finder sted i brudlinien, der undertiden også benævnes flydelinien. For langt de hyppigste tilfælde,

kan man regne med en retlinet brudlinje, og dermed deformations-tilstanden vist i figur 2.35, hvis der er tale om et translationsbrud.



Figur 2.35: Deformationer i en brudlinje.

Deformationen regnes at ske ved, at del II, som et stift legeme, translateres stykket  $u$  i forhold til del I, der ligeledes forbliver stiv.

Tøjningstilstanden, der antages homogen i den deformerede zone, kan udtrykkes ved

$$\epsilon_n = \frac{u}{\Delta} \sin \alpha \quad (2.38)$$

$$\epsilon_t = 0 \quad (2.39)$$

$$\phi_{nt} = 2 \gamma_{nt} = \frac{u}{\Delta} \cos \alpha \quad (2.40)$$

Af transformationsformlerne findes hovedtøjningerne at være bestemt ved

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{u}{\Delta} (\sin \alpha + 1) \quad (2.41)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{u}{\Delta} (\sin \alpha - 1) \quad (2.42)$$

Ved hjælp af normalitetsbetingelsen, jævnfør afsnit 2.1.2, kan de tilhørende hovedspændinger bestemmes. Udtryk for det plastiske arbejde, se afsnit 2.1, kan nu opstilles, hvilket ikke vil blive gjort, blot skal resultatet anføres. Det indre arbejde pr. længdeenhed ved ovenstående bevægelse er, idet der regnes med plan spændingstilstand, jævnfør figur 2.36, bestemt ved

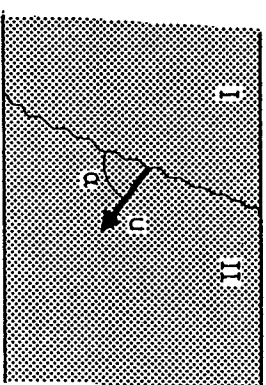
$$W_k = \frac{1}{2} f_c u t (v(1 - \sin \alpha) - \rho (3 - 5 \sin \alpha)) \quad (2.43)$$

$$\text{for } 37^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

og

$$W_k = \frac{1}{2} v f_c u t (1 - \sin \alpha) \quad \text{for } -90^\circ \leq \alpha \leq 37^\circ \quad (2.44)$$

Idet  $t$  betegner tykkelsen af legemet. Det bemærkes, at udtrykkene (2.43) og (2.44) er uafhængige af  $\Delta$ , og dermed også gælder for en brudlinje, hvor det gælder at  $\Delta \rightarrow 0$ .



del I fast

Figur 2.36: Brudlinje i beton.

For  $f_t = 0$ , det vil sige  $\rho = 0$ , ses udtrykket (2.43) at være

identisk med (2.44), således at (2.44) gælder for hele  $\alpha$ -intervallet.

For plane tøjningstilstande gælder alene udtrykket og betingelsen (2.43).

Arbejdsudtrykkene (2.43) og (2.44) kan udstrækkes til at gælde for en vilkårlig brudlinje, samt bevægelse mellem de to legemer I og II, idet der blot integreres op langs brudlinjen over parametrene  $u$  og  $\alpha$ , hvis disse varierer i størrelse fra punkt til punkt på brudlinjen.

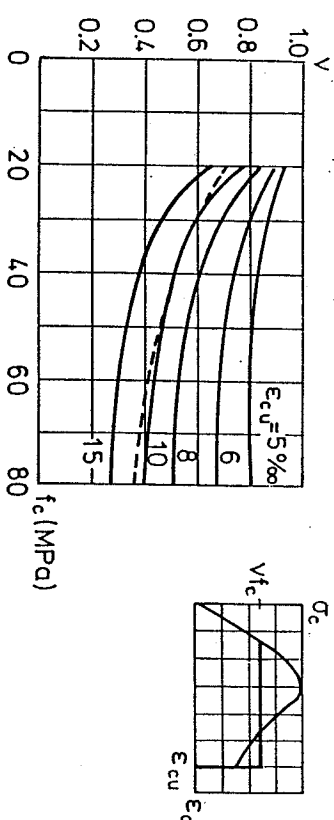
### 2.4.3 Effektivitetsfaktoren

Nogle af de faktorer, der har en primær betydning for effektivitetsfaktorens værdi, skal kort berøres i dette afsnit.

Interessen vil primært knytte sig til værdien af  $v$ , da betonens trækstyrke, og dermed  $\rho$ , som oftest kan negligeres. Dette gælder ikke mindst, hvor et legemes bæreevne hovedsagelig er styret af armeringens trækstyrke og betonens trykstyrke. For meget små armeringsgrader, det vil sige for værdier af  $\rho$  fy mindre end eller i området af  $f_t$ , er trækstyrken ikke uden betydning for bæreevnen. Da disse tilfælde som oftest er uinteressante i normal dimensionsringspraksis, jævnfør normregler vedrørende minimumsarmering, vil det være rimeligt at se bort fra betonens trækstyrke, specielt når simplifikationen af beregningsudtrykkene tages i betragtning.

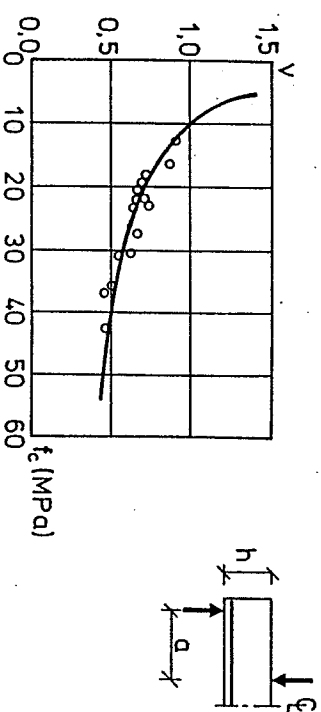
En idé om effektivitetsfaktorens værdi kan fås ved at betragte henholdsvis den virkelige og den ideal-plastiske arbejdskurve for beton under enakset tryk, og for disse kræve at de har samme indre arbejde, det vil sige samme areal. En sådan beregning er udført af H. Exner [83.6], idet det analytiske udtryk for betonens arbejds-kurve givet i afsnit 2.2.3 er benyttet. Resultatet fremgår af figur 2.37.

Som det fremgår af figur 2.37 er  $v$  en funktion af  $f_c$ , og brudtøjningen  $\epsilon_{cu}$ . At  $v$  er en funktion af  $f_c$  skyldes, at arbejdskurven for de stærkere betoner, i forhold til de svagere, falder



Figur 2.37: Sammenligning mellem den virkelige og den ideal-plastiske arbejds-kurve for beton.

relativt hurtigere efter passagen af toppunktet. Sammenhængen mellem  $v$  og  $f_c$  kan tilnærmelsesvis skrives på formen  $v = K/\sqrt{f_c}$ . Denne sammenhæng er i en del tilfælde verificeret eksperimentelt, således hører den stiplede kurve i figur 2.37 til forskydningsforsøg med ikke forskydningsarmerede bjælker, hvor alene  $f_c$  varierede, jævnfør figur 2.38.



Figur 2.38: Forsøg med ikke forskydningsarmerede bjælker.

I nogle tilfælde kan sammenhængen mellem  $v$  og  $f_c$  være så svagt krum, at en lineær afhængighed kan benyttes.

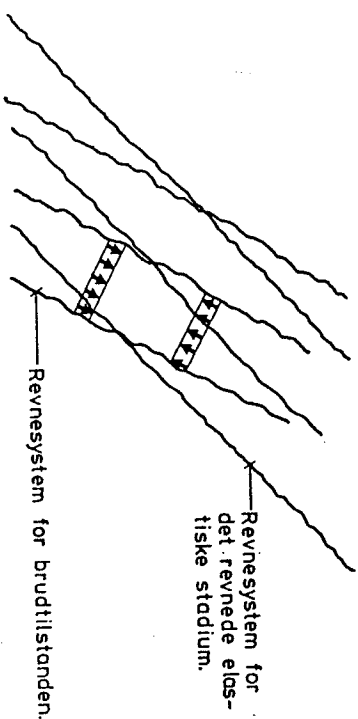
En analytisk bestemmelse af effektivitetsfaktoren er kun mulig i ganske få og simple tilfælde, eksempelvis for en bjælke påvirket til bøjning, jævnfør afsnit 4.2.3. Derfor er man i praksis nødt til at benytte forsøg ved fastlæggelsen af effektivitetsfaktoren.

For bjælker påvirket til bøjning haves i betonen en kendt tøjningstilstand og dermed brudtøjning. Dette gælder desværre ikke generelt, hvorfor betontøjningerne og dermed brudtøjningen for et aktuelt legeme som oftest må opfattes som udjævnedes værdier, der ikke kan bruges for en detaljeret beskrivelse af betontøjningerne i et vilkårligt punkt af legemet.

Effektivitetsfaktoren vil således, udover materialafhængigheden, også være en funktion af det aktuelle legemes geometri, herunder armeringsudformning, og belastningsforhold, hvilket komplicerer en generel bestemmelse af effektivitetsfaktoren.

Generelt gælder det, at desto mere homogen tøjningstilstanden i betonen er, desto større er  $v$ , og omvendt, desto stærkere inhomogenitet, desto lavere værdi antager  $v$ . I det følgende skal nogle af de faktorer, der har en primær indflydelse på  $v$  kort berøres.

I brudtilstanden vil betontrykket som oftest krydse revnesystemer, der er dannet for mindre belastninger, se figur 2.39.



Figur 2.39: Revnesystemer.

At der overhovedet kan overføres forskydningsspændinger i brudstadiet skyldes, at revnerne i reglen er meget ujævne.

I en konstruktion kan der optræde tre revnesystemer, nemlig:

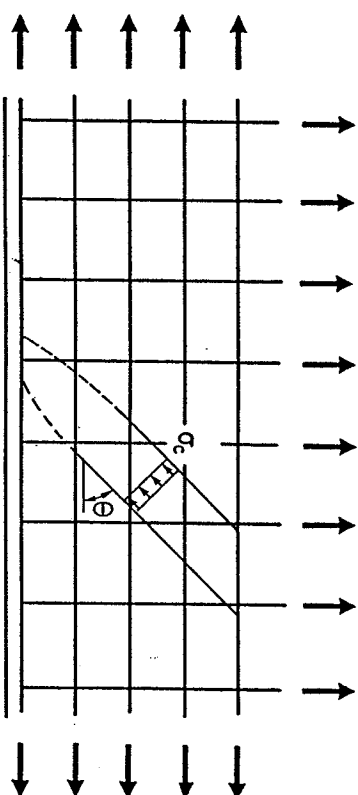
*Det initiale revnesystem*, der dannes når betonens trækstyrke overskrides. Revnerne dannes i snitene med trækspændingerne.

*Revnesystemet for det revnede stadium*, hvor beton og armering endnu kan regnes lineær-elastisk. Revneretningen svarer til armeringsretningen til et system, hvor trækstyrken er nul.

*Revnesystemet for brudstadiet* dannes i det plastiske stadium. Revneretningen bestemmes på basis af en optimal udnyttelse af materialerne. Det understreges, at dette revnesystem ikke nødvendigvis er sammenfaldende med brudlinjeforløbet.

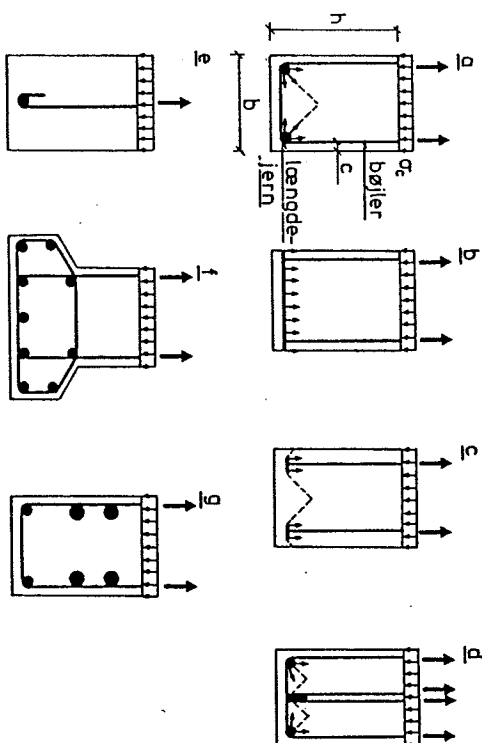
Alt afhængigt af revnesystemets kompleksitet vil der ske en reduktion af betontykkelsen. For små revnevidthder vil reduktionen dog være minimal. For en mere detaljeret beskrivelse af ovennævnte revnesystemer henvises til B. Pedersen et al. [83.8].

Der kan i en konstruktion optræde lokale forstyrrelser af betontykkelsen. Et eksempel herpå er vist i figur 2.40, hvor betontykkelsen skal fanges af armeringen.



Figur 2.40: Betontryk ved rand.

Reduktionen af betontrykket afhænger af, hvorledes armeringen er udført. Eksempler på randarmeringer er vist i figur 2.41.



Figur 2.41: Forskellige randarmeringsudformninger.

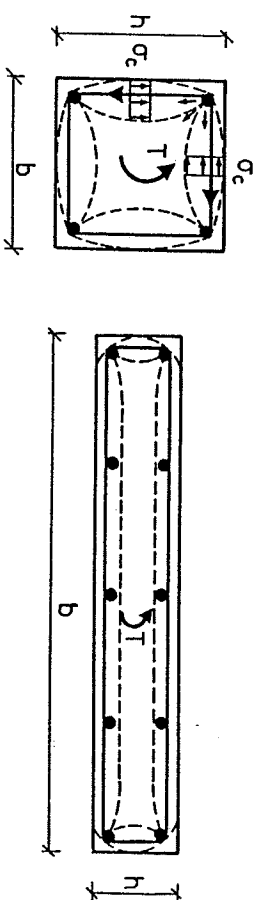
Som det fremgår af figur 2.41a, skal et betontryk fanges af bøjle-armeringen. Dette fører til lokale trykkoncentrationer ved de længde-jern, der er placeret i bøjlerens hjørner. Heraf følger det også umiddelbart, at betonøjningerne  $\epsilon_c$  vil variere i størrelse fra punkt til punkt af legemet. Eksempelvis kan  $\epsilon_c$  lokalt være meget større end  $\epsilon_o$ , mens  $\epsilon_c$  andre steder i legemet er mindre end  $\epsilon_o$ , jævnfør figur 2.30. Den værdi for  $\epsilon_c$ , der benyttes for legemet som helhed, er derfor en udjævnet værdi. Den til  $\epsilon_c$  knyttede spænding bliver dermed også en udjævnet værdi, der alt andet lige vil være mindre end  $f_c$ . Betragtes figur 2.41b, hvor betontrykket møder en plade i stedet for, ses der ikke at optræde spændingskoncentrationer, således at der er tale om en relativt homogen spændingstilstand, og dermed en forholdsvis høj værdi af  $v$ , det vil sige  $v = 1$ , hvilket er eksperimentelt verificeret.

For en armeringsudførelse som vist i figur 2.41a, d, e og f, vil størrelsen af  $v$  være en funktion af  $h/b$ ,  $c/b$ , antallet af længdejern, herunder disses diameter, samt intensiteten af bjelkearmeringen. I afsnit 6.4 er nogle forsøgsresultater med forskyd-

ningspåvirkede bjælker anført.

Generelt kan man som nævnt sige, at desto mere homogen spændingstilstanden er, desto højere værdi antager  $v$ . For de i figur 2.41b, d, f, a, c og e viste gælder det således, at  $v$  er størst for førstnævnte og mindst for sidstnævnte, idet det dog bemærkes, at størrelsen af  $v$  i 2.41c afhænger af ankerpladernes størrelse. Endelig kan det bemærkes, at der inde i selve legemet også kan forekomme lokale koncentrationer, hvilket er illustreret i figur 2.41g.

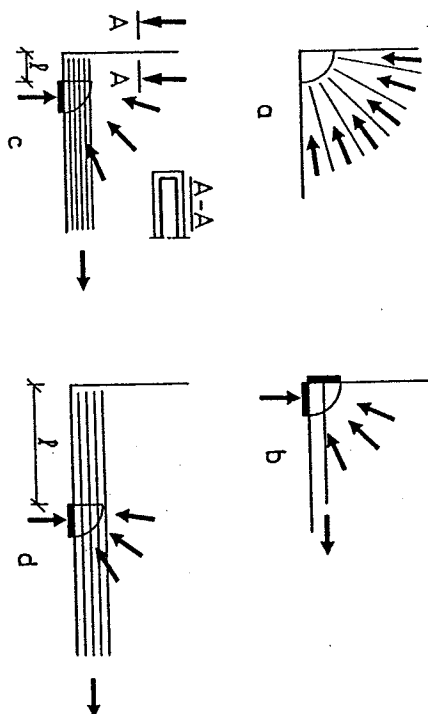
Et indtryk, af hvor stor en rolle spændingstilstandens homogenitet spiller, kan fås ved at betragte en bjælke påvirket til vridning, jævnfør figur 2.42.



Figur 2.42: Vridningspåvirket bjælke og plade.

På grund af en kraftig spændingskoncentration i hjørnerne, vil  $v$  blandt andet være en funktion af forholdene der. Dette ses i særdeleshed at være tilfældet for små værdier af  $b/h$ , hvor hjørnerne har en væsentlig indflydelse på spændingsforholdene. For voksende værdier af  $b/h$  ses derimod indflydelsen af hjørnerne at aftage, og dermed vokser værdien af  $v$ . Forsøg bekræfter fuldt ud denne stigning, jævnfør afsnit 7.4.

Optræder der lokale trykkoncentrationer, jævnfør figur 2.43, afhænger reduktionen her som ovenfor af randforholdene, det vil sige, hvorledes trykkene optages.



Figur 2.43: Lokale trykfeltet.

Benyttes der ankerplader, se figur 2.43b, vil  $v$  være stor, det vil sige  $v = 1$ . I visse tilfælde vil  $v$  endda kunne regnes større end 1. For de i figur 2.43c og d viste udformninger afhænger  $v$  af udformningen,  $\lambda$ , og antallet af jern.

Belastningens indflydelse på  $v$  kan illustreres med bjælken vist i figur 2.38, idet desto mindre  $a/h$  er, desto kraftigere vil buvirkningen være i det elastiske stadium, hvilket gør, at der vil være en mindre spændingsomlejring sted, således at  $v$  her vil være større end for store værdier af  $a/h$ , hvor store spændingsomlejringer finder sted.

Endelig skal det nævnes, at betonlegemets geometriske data også kan indflyvere på  $v$ . Dette er blandt andet tilfældet for bjælker påvirket af normalkræfter, jævnfør afsnit 5.3.

Som det fremgår af ovennævnte, spiller en mængde forhold ind på værdien af effektivitetsfaktoren, hvilket kan føre til forholdsvis komplicerede udtryk for  $v$ . I praksis kan en del af disse forhold dog negligeres, uden at bæreevnebestemmelsen herved bliver forringet. Til bestemmelse af  $v$  kræves der mange forsøg,

dels for at vurdere betydningen af de enkelte faktorer, men også for at eliminere indflydelsen af den store spredning, der normalt optræder ved forsøg med beton. I denne sammenhang er det også vigtigt at understrege, at der kun benyttes forsøg, om hvilket vides, at brudformen stemmer overens med den teoretisk antagne. Det er også klart, at hvis de teoretiske bæreevneudtryk er eksakt plastiske løsninger, det vil sige, at de samme bæreevneudtryk både kan findes ved hjælp af nedre- og øvregrænsetoden, vil den eksperimentelt bestemte  $v$ -faktor være generelt anvendelig for den aktuelle type belastning. Hvis dette ikke er tilfældet, er det væsentligt at understrege, at den angivne  $v$ -værdi er tæt knyttet til den anvendte plastiske løsning.

Desværre har det ikke, som det vil fremgå af de kommende kapitler, været muligt at fastlægge værdien af  $v$  i alle tilfælde. Hvor der ikke vides noget om  $v$ , eller hvor der kan være en vis usikkerhed, bør en vis konservatisme derfor udvises ved fastsættelsen af en værdi for  $v$ . Generelt synes erfaringerne for nuværende dog at vise, at  $v$  sjældent er mindre end

$$v = \frac{2}{\sqrt{f_c}} \quad (f_c \text{ i MPa}) \quad (2.45)$$

Denne værdi kan derfor i tvivlstilfælde, indtil videre, benyttes som en vejledende værdi for  $v$ .

Det bemærkes, at ved fastsættelse af  $v$  for anvendelse i praksis, skal de karakteristiske værdier af materialeværdierne altid benyttes, hvis disse indgår i et formeludtryk for  $v$ .

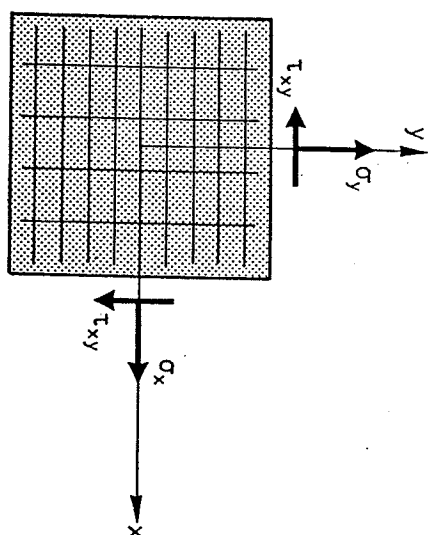
### 3 BIAKSALE SPÆNDINGSTILSTANDE GENERELT

I dette kapitel skal flydebetingelserne for et ortogonalt armeret legeme, påvirket af en ydre homogen biaksial spændingstilstand, behandles. Disse flydebetingelser udgør i mere eller mindre grad fundamentet for mange af de plastiske bæreevneudtryk, der eksisterer for jernbeton. Bjælkerne er ingen undtagelse herfra, hvilket mange af de følgende kapitler vil bevise. Det kan specielt bemærkes, at flydebetingelserne ikke kun er aktuelle for de bæreevneudtryk der findes i det følgende, men også udgør et vigtigt redskab ved bestemmelsen af simple nedreværdiløsninger for mere specielle bjælkeproblemer, hvor der ikke eksisterer færdige beregningsudtryk.

Den væsentligste del af indholdet i dette kapitel skyldes M.P. Nielsen [69.1], hvortil der henvises for supplerende oplysninger.

#### 3.1 BESKRIVELSE AF LÆGEME

Jernbetonlegemet, vist i figur 3.1, med de ortogonale armeringsretninger  $x$  og  $y$ , tykkelsen  $t$  samt den ydre homogene spændingspåvirkning  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$ , betragtes.



Figur 3.1: Jernbetonlegeme.

Da flydefladen, som det vil fremgå af det følgende, er symmetrisk om planen  $\tau_{xy} = 0$ , vil kun positive værdier af  $\tau_{xy}$  blive betragtet.

Betragtes et snit efter enten  $x$ - eller  $y$ -aksen, regnes armeringen at være symmetrisk fordelt over legemets tykkelse. Armeringsarealerne pr. længdeenhed efter henholdsvis  $x$ - og  $y$ -retningen betegnes  $A_{x1}$  og  $A_{y1}$ .

Efter  $x$ - og  $y$ -retningen benævnes armeringens trækflydespændinger henholdsvis  $f_{yx}$  og  $f_{yy}$ , mens armeringens trykflydespændinger efter de samme retninger betegnes  $f_{yx}^*$  og  $f_{yy}^*$ .

Betonen regnes at have den ideal-plastiske trykstyrke  $v f_c$ . Legemets mekaniske armeringsgrader defineres ved

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{A_{x1} f_{yx}}{t f_c}, & \phi_x^* &= \frac{A_{x1} f_{yx}^*}{t f_c}, \\ \phi_y &= \frac{A_{y1} f_{yy}}{t f_c}, & \phi_y^* &= \frac{A_{y1} f_{yy}^*}{t f_c} \end{aligned} \quad (3.1)$$

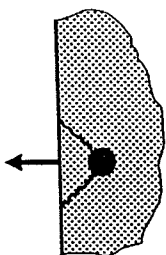
For andre armeringsarrangementer, det vil sige skævvinklet arme-

ring og armering efter flere retninger, henvises til afsnit 3.6.

### 3.2 BEREGNINGSFORUDSÆTNINGER

Jernbetonlegemet, beskrevet i afsnit 3.1, forudsættes sikret mod stabilitetssvigt, således at den svigtende bæreevne alene skyldes en overskridelse af materialestykkerne.

For at armeringen kan regnes aktiv ved optagelsen af trykspændinger, skal armeringen være sikret mod stabilitetssvigt. I figur 3.2 er vist et lokalt brud forårsaget af stabilitetssvigt i armeringen. Selv om der ikke regnes med trykarmering, vil armeringen være påvirket til tryk, og en vis opmærksomhed skal derfor under alle omstændigheder udvises overfor bruddet vist i figur 3.2.



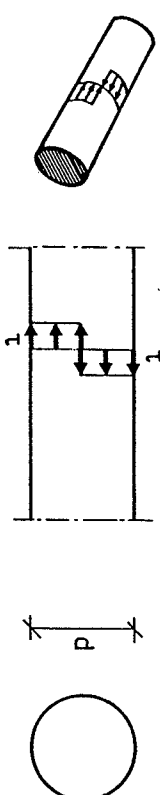
Figur 3.2: Lokalt brud på grund af stabilitetssvigt i armeringen.

Er armeringsjernene perfekt retlinet, vil der ifølge forsøg normalt ikke være nogen fare for stabilitetssvigt. Er dette krav ikke opfyldt, kan stabilitetssvigt forebygges ved en sammenfæstning af armeringen efter de to retninger i knudepunkterne.

Armeringsudformningen, herunder afstanden mellem armeringsjernene, samt tykkelsen af legemet, forudsættes at være af en sådan karakter, at armeringsspændingerne kan regnes jævnt fordelt over legemets tykkelse.

I den følgende plastiske analyse antages armeringsjernene kun at optage træk og tryk i deres længderetning. Under specielle forhold er denne forudsætning ikke opfyldt, idet der i selve armeringsjernene kan optræde forskydningspændinger. For at give et indtryk af disse forskydningspændingers størrelsesorden, skal et par ekstremtilfælde betragtes.

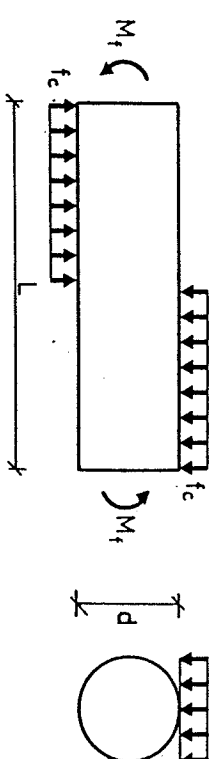
I figur 3.3 er et armeringsjern, påvirket af en forskydningspænding  $\tau$ , vist.



Figur 3.3: Armeringsjern påvirket til ren forskydning.

Betragtes et lille element af jernet, begrænset af to normalsnit, giver en momentligning, at middelværdien af  $\tau_a$  for et normalsnit er  $\tau_a = \frac{4}{\pi} \tau$ . Da  $\tau$  maksimalt kan antage værdien  $\tau = \frac{1}{2} f_c$ , jævnfør afsnit 3.3, fås som en øvre grænse for  $\tau_a$  værdien  $\tau_a = \frac{2}{\pi} f_c$ .

I figur 3.4 er et armeringsjern, belastet af normalpændinger, vist. Denne belastning svarer til at armeringsjernet udsættes for den såkaldte dornvirkning.

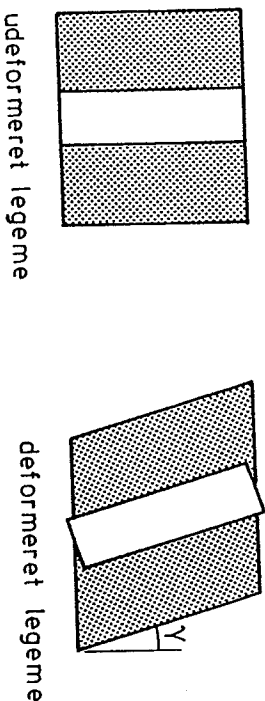


Figur 3.4: Armeringsjern belastet med normalpændinger.

Som en øvre grænse for belastningen regnes med normalpændingen  $f_c$ . Bestemmes  $L$  således, at der netop opnås flydning i armeringsjernet på grund af bøjning, fås den største middelværdi af  $\tau_a$ , for et normalsnit, at være bestemt ved  $\tau_a = \frac{4}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{f_c f_c}$ .

Værdien af ovenstående forskydningspændinger ses at være af en sådan størrelsesorden, at de ikke altid kan antages negligeble. I reglen vil de dog være det, specielt da armeringsjernene indlægges med det formål at optage trækspændinger. Det bemærkes, at ifølge nedrevardeprincippet vil en beregning baseret på, at der kun regnes med træk- og trykspændinger efter armeringsjernenes længdeakse, føre til en sikker spændingsfordeling i armeringen.

Konsekvensen af ovenstående forudsætning er, at armeringsjernene regnes uendelige slappe overfor bøjning. Dette betyder, at udsættes jernbetonlegemet for en vinkelændring i armeringsjernenes retning, får jernene en stiftlegemedrejning af samme størrelsesorden som vinkelændringen i betonen, se figur 3.5, således at der ikke forekommer nogen vinkelændringer af betydning i selve jernene.



Figur 3.5: Deformationsforholdene i jernbeton.

Hermed følger det også, at de deformationsmål der anvendes for jernbetonlegemet, er udjævne størrelser for hele legemet. Deformationsmålene kan således ikke bruges til en detaljeret beskrivelse af legemet.

Ovennævnte betragtninger forudsætter, at der kan ske en vis glidning mellem armering og beton. Denne antagelse vil normalt være opfyldt, da adhesionen mellem armering og beton mere eller mindre vil være brudt, når brudlasten nås. For forkaftet armering vil der dog stadig ske en kraftoverføring mellem armering og beton via lokale tryk omkring kammen.

Regnes armeringen fuldt udnyttet til flydning over hele legemet, skal specielle forholdsregler tages ved armeringens endepunkter,

hvilket normalt vil være ved legemets rand, i form af eksempelvis forankringsplader, kroge eller bøjler. Disse forholdsregler gælder altid glat armering. For forkaftet armering kan en forankring eventuelt ske i en trykzone, hvis en sådan eksisterer.

### 3.3 BÆREEVNEUDTRYK

I den følgende behandling har det vist sig hensigtsmæssigt, at inddеле legemets flydebetingelse i tre deltilfælde, afhængig af hvorledes armeringen flyder. Flydebetingelsen vil i de tre tilfælde blive kaldt:

- *trækflydebetingelsen*: Denne gælder i de tilfælde, hvor al armeringen har opnået flydning på grund af træk. Legemet er således *normalarmeret*.
- *trykflydebetingelsen*: Denne gælder i de tilfælde, hvor al armeringen har opnået flydning på grund af tryk. Legemet er således *totalt overarmeret*.
- *overgangsflydebetingelsen*: Denne gælder i de situationer, hvor armeringen befinder sig mellem ovennævnte to deltilfælde. Legemet er således *partielt overarmeret*.

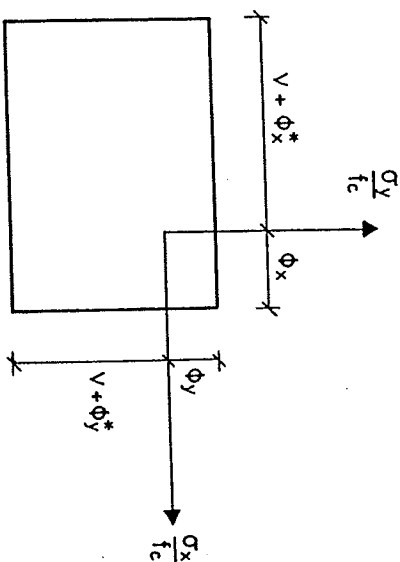
#### 3.3.1 Trækflydebetingelsen

Jernbetonlegemets træk- og trykstyrker efter henholdsvis x- og y-retningen ses umiddelbart at være bestemt ved

$$f_{tx} = \phi_x f_c, \quad f_{ty} = \phi_y f_c \quad (3.2)$$

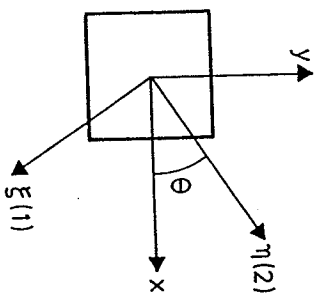
$$f_{cx} = (\nu + \phi_x^*) f_c, \quad f_{cy} = (\nu + \phi_y^*) f_c \quad (3.3)$$

Herved fås flydefladens udseende for  $\tau_{xy} = 0$ , at være som vist i figur 3.6.



Figur 3.6: Flydefladen for  $\tau_{xy} = 0$ .

Beliggigheden af betonens hovedspændingssystem, i forhold til  $(x, y)$ -systemet, regnes at være som vist i figur 3.7. Armeringens hovedspændingssystem er sammenfaldende med  $(x, y)$ -systemet.



Figur 3.7: Beliggigheden af betonens hovedspændingssystem.

Er normalspændingen efter  $\xi$ -aksen bestemt ved

$$\sigma_{\xi} = \phi_x f_c \sin^2 \theta + \phi_y f_c \cos^2 \theta \quad (3.4)$$

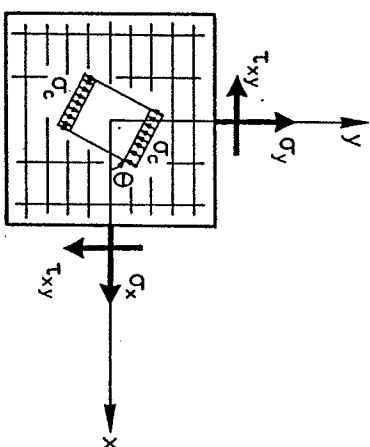
svarende til  $\sigma_{c1} = 0$ , kan al armeringen regnes at flyde, så længe betongspændingen  $\sigma_{c2}$  efter  $\eta$ -aksen er beliggende i intervallet  $-\nu f_c \leq \sigma_{c2} \leq 0$ , hvilket svarer til at normalspændingen efter  $\eta$ -aksen ligger i intervallet  $(\phi_x \cos^2 \theta + \phi_y \sin^2 \theta) f_c > \sigma_{\eta} > -(\nu - \phi_x \cos^2 \theta - \phi_y \sin^2 \theta) f_c$ .

Ovenstående fører til spændingstilstanden vist i figur 3.8. Af liggængtsligningerne fås, idet  $\sigma_{c2}$  sættes til  $\sigma_{c2} = -\sigma_c$

$$\sigma_x = -\sigma_c \cos^2 \theta + \phi_x f_c \quad (3.5)$$

$$\sigma_y = -\sigma_c \sin^2 \theta + \phi_y f_c \quad (3.6)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_c \sin \theta \cos \theta \quad (3.7)$$



Figur 3.8: Spændingstilstanden i det normalarmerede tilfælde.

Elimineres  $\sigma_c$  og  $\theta$  af ligningerne (3.5)-(3.7) fås

$$-(\phi_x f_c - \sigma_x)(\phi_y f_c - \sigma_y) + \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.8)$$

som er trækflydebetingelsen.

Af ligningerne (3.5)-(3.7) findes endvidere det enskede betontryk  $\sigma_c$  samt dets vinkel med  $x$ -aksen at være bestemt ved

$$\sigma_c = (\phi_x + \phi_y) f_c - (\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.9)$$

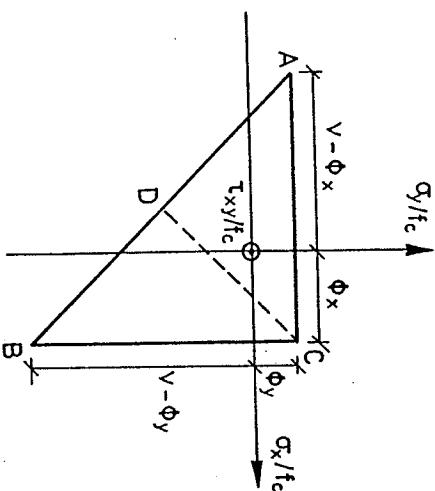
$$\tan^2 \theta = \frac{\phi_y f_c - \sigma_y}{\phi_x f_c - \sigma_x} \quad (3.10)$$

Udtrykkene (3.5)-(3.10) kan regnes at gælde sålænge  $\sigma_c \leq v f_c$ , eller idet (3.9) for  $\sigma_c$  anvendes,

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{f_c} \geq \phi_x + \phi_y - v \quad (3.11)$$

samt sålænge, at ingen af normalspændingerne overstiger legemets trækstyrker, det vil sige  $\sigma_x \leq \phi_x f_c$  og  $\sigma_y \leq \phi_y f_c$ .

Afregnes ovenstående område i et  $\left(\frac{\sigma_x}{f_c}, \frac{\sigma_y}{f_c}, \frac{\tau_{xy}}{f_c}\right)$ -koordinatsystem, fås for  $\tau_{xy} = 0$  trekantområdet ABC vist i figur 3.9.

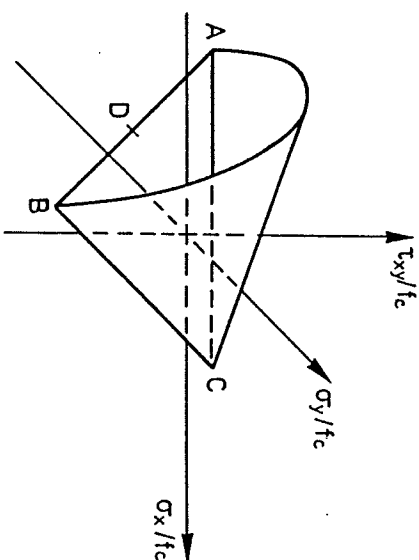


Figur 3.9: Gyldighedsområdet for trykflydebetingen.

Regnes lighedstegnet i udtrykket (3.11) at gælde, ses denne ligning at føre til den rette linie AB i figur 3.9. Flydefluden bestemt ved (3.8) ses således at fremstille en kegleflade med

toppunkt i C og akse i retning CD, hvor D er midtpunktet mellem A og B. I punkt D er flydefluden bestemt ved værdien  $\tau_{xy} = \frac{1}{2} v f_c$ .

Flydefluden, der hører til flydebetingen (3.8), er vist i figur 3.10.



Figur 3.10: Flydefluden for det normalerede område.

### 3.3.2 Trykflydebetingen

Regnes normalspændingen efter  $\eta$ -aksen, se figur 3.7, bestemt ved

$$\sigma_\eta = -(v + \phi_x^* \cos^2 \theta + \phi_y^* \sin^2 \theta) f_c \quad (3.12)$$

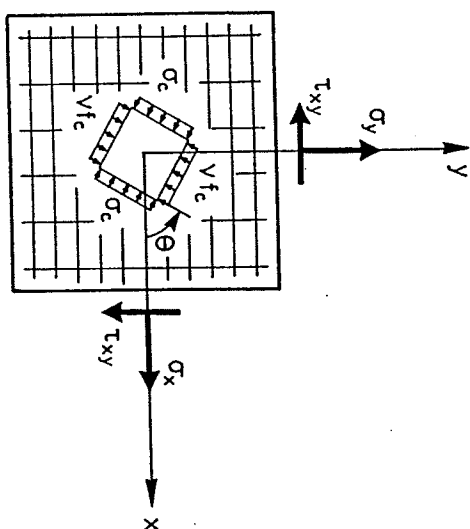
kan al armeringen regnes at have opnået flydning på grund af tryk, sålænge betonspændingen efter førsteaksen er beliggende i intervallet  $-v f_c \leq \sigma_{c1} \leq 0$ , hvilket svarer til at normalspændingen efter  $\xi$ -aksen ligger i intervallet  $-(v + \phi_x^* \sin^2 \theta + \phi_y^* \cos^2 \theta) f_c \leq \sigma_\xi \leq -(\phi_x^* \sin^2 \theta + \phi_y^* \cos^2 \theta) f_c$ .

Ligevægtsligningerne giver således for spændingstilstanden vist i figur 3.11, idet  $\sigma_{c1}$  sættes til  $\sigma_{c1} = -\sigma_c$

$$\sigma_x = -v f_c \cos^2 \theta - \sigma_c \sin^2 \theta - \phi_x^* f_c \quad (3.13)$$

$$\sigma_y = -v f_c \sin^2 \theta - \sigma_c \cos^2 \theta - \phi_y^* f_c \quad (3.14)$$

$$\tau_{xy} = (v f_c - \sigma_c) \sin \theta \cos \theta \quad (3.15)$$



Figur 3.11: Spændingstilstanden i det totale overrørerede tilfælde.

Elimineres  $\sigma_c$  og  $\theta$  af ligningerne (3.13)-(3.15), fås tryk-flydebetingelsen

$$- \left[ (v + \phi_x^*) f_c + \sigma_x \right] \left[ (v + \phi_y^*) f_c + \sigma_y \right] + \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.16)$$

For betonspændingen  $\sigma_c$  og dennes vinkel med y-aksen fås

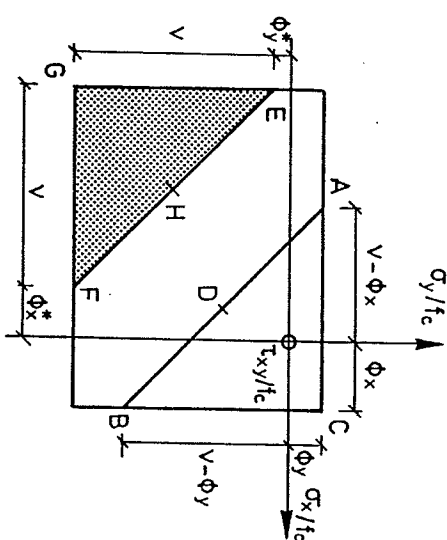
$$\sigma_c = -(v + \phi_x^* + \phi_y^*) f_c - (\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.17)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{(v + \phi_x^*) f_c + \sigma_x}{(v + \phi_y^*) f_c + \sigma_y} \quad (3.18)$$

Ovenstående udtryk (3.12)-(3.18) kan regnes at gælde sålænge  $\sigma_c \geq 0$ , eller idet (3.17) for  $\sigma_c$  anvendes

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{f_c} \leq -(\phi_x^* + \phi_y^* + v) \quad (3.19)$$

samt sålænge ingen af normalspændingerne er mindre end legemets trykstyrke, det vil sige  $\sigma_x \geq -(\phi_x^* + v) f_c$  og  $\sigma_y \geq -(\phi_y^* + v) f_c$ . I figur 3.12 er ovenstående område EFG vist i et  $\left( \frac{\sigma_x}{f_c}, \frac{\sigma_y}{f_c} \right)$ -koordinatsystem for  $\tau_{xy} = 0$ .



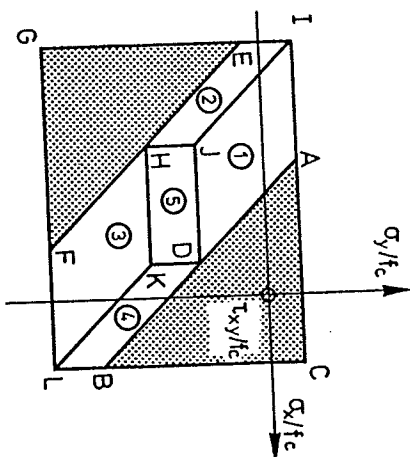
Figur 3.12: Gyldighedsområdet for trykflydebetingelsen.

Regnes lighedstegnet i udtrykket (3.19) at gælde, fås den rette linie EF i figur 3.12. Flydefladen ses, som i det normalarmerede tilfælde, også her at fremstille en kegleflade, idet tyngdepunktet dog her er G, og akse har retning GH, hvor H er midtpunktet mellem punkterne E og F. Flydefladen er i punkt H bestemt ved værdien  $\tau_{xy} = \frac{1}{2} v f_c$ .

### 3.3.3 Overgangsflydebetingelsen

For området, der ligger mellem linjerne AB og EF i figur 3.12, gælder overgangsflydebetingelsen.

Afhængig af hvorledes armeringen flyder, kan ovenstående område inddeles i fem delområder med hvert sit karakteristika, som vist i figur 3.13.



Figur 3.13: Gyldighedsområdet for overgangsbetingelsen.

Betragtes eksempelvis område 1, ses det, at hvis man befinder sig på linien AD, og bevæger sig parallelt med  $\sigma_x$ -aksen henimod linien IU, skal legemet optage et øget tryk efter x-aksen. Dette kan på simpel vis ske ved at lade spændingen i armeringen variere fra  $f_{yx}$  mod  $f_{yx}^*$ . En sikker flydeflade kan således konstrueres ved at lade flydefladen, der svarer til linien AD, dække hele feltet 1. For område 1 gælder det således, at armeringen efter y-retningen kan regnes at flyde på grund af træk, mens armeringen efter x-retningen ikke kan regnes at flyde, hvilket betyder, at  $\sigma_c = -\nu f_c$  og udtrykkene (3.6)-(3.7) gælder.

For områderne 2, 3 og 4 gælder samme princip som for område 1. For område 5 gælder det, at hverken armeringen efter x- eller y-retningen kan regnes at flyde.

Flydebetingelserne samt betingelserne for anvendelse af disse er angivet nedenfor.

område 1

$$\phi_y f_c \geq \sigma_y \geq (\phi_y - \frac{1}{2}\nu)$$

$$(\phi_x + \phi_y - \nu)f_c \geq \sigma_x + \sigma_y \geq (\phi_y - \phi_x^* - \nu)f_c$$

(3.20)

$$- \left[ (\nu - \phi_y)f_c + \sigma_y \right] \left[ \phi_y f_c - \sigma_y \right] + \tau_{xy}^2 = 0$$

område 2

$$-(\nu + \phi_x^*)f_c \geq \sigma_x \geq -(\frac{1}{2}\nu + \phi_x^*)f_c$$

$$(\phi_y - \phi_x^* - \nu)f_c \geq \sigma_x + \sigma_y \geq -(\phi_x^* + \phi_y^* + \nu)f_c \quad (3.21)$$

$$\left[ (\nu + \phi_x^*)f_c + \sigma_x \right] \left[ \phi_x^* f_c + \sigma_x \right] + \tau_{xy}^2 = 0$$

område 3

$$-(\nu + \phi_y^*)f_c \geq \sigma_y \geq -(\frac{1}{2}\nu + \phi_y^*)f_c$$

$$(\phi_x - \phi_y^* - \nu)f_c \geq \sigma_x + \sigma_y \geq -(\phi_x^* + \phi_y^* + \nu)f_c \quad (3.22)$$

$$\left[ (\nu + \phi_y^*)f_c + \sigma_y \right] \left[ \phi_y^* f_c + \sigma_y \right] + \tau_{xy}^2 = 0$$

område 4

$$\phi_x f_c \geq \sigma_x \geq (\phi_x - \frac{1}{2}\nu)f_c$$

$$(\phi_x + \phi_y - \nu)f_c \geq \sigma_x + \sigma_y \geq (\phi_x - \phi_y^* - \nu)f_c \quad (3.23)$$

$$- \left[ (\nu - \phi_x)f_c + \sigma_x \right] \left[ \phi_x f_c - \sigma_x \right] + \tau_{xy}^2 = 0$$

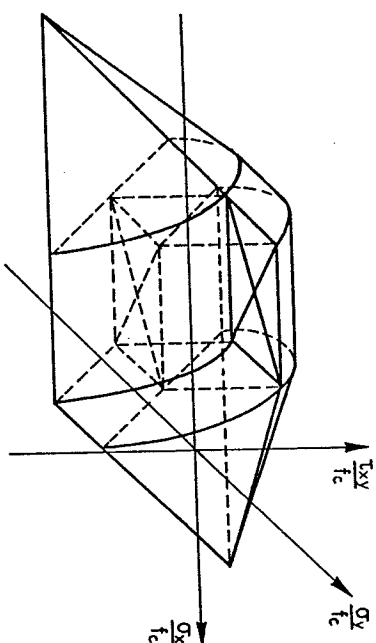
område 5

$$(\phi_x - \frac{1}{2}\nu)f_c \geq \sigma_x \geq -(\frac{1}{2}\nu + \phi_x^*)f_c$$

$$(\phi_y - \frac{1}{2}\nu)f_c \geq \sigma_y \geq -(\frac{1}{2}\nu + \phi_y^*)f_c \quad (3.24)$$

$$-\frac{1}{2}\nu f_c + \tau_{xy} = 0$$

I figur 3.14 er en fuldstændig flydeflade vist for  $\tau_{xy} \geq 0$ .



Figur 3.14: Flydefladen ved biaxial spændingspåvirkning.

Betonspændingerne  $\sigma_{c1}$  og  $\sigma_{c2}$  fås umiddelbart i hele overgangs-området, at være bestemt ved  $\sigma_{c1} = 0$  og  $\sigma_{c2} = -\nu f_c$ .

Vinklen mellem betonspændingen  $\sigma_{c2}$  og x-aksen kan bestemmes af følgende udtryk.

$$\text{område 1} \quad \tan \theta = \frac{\phi_y f_c - \sigma_y}{\tau_{xy}} \quad (3.25)$$

$$\text{område 2} \quad \tan \theta = - \frac{\tau_{xy}}{\phi_x f_c + \sigma_x} \quad (3.26)$$

$$\text{område 3} \quad \tan \theta = - \frac{\phi_x f_c + \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad (3.27)$$

$$\text{område 4} \quad \tan \theta = \frac{\tau_{xy}}{\phi_y f_c - \sigma_y} \quad (3.28)$$

$$\text{område 5} \quad \theta = 45^\circ \quad (3.29)$$

For små armeringsgrader, det vil sige  $\phi_x \ll \frac{1}{2} \nu$  og  $\phi_y \ll \frac{1}{2} \nu$ , vil det område, hvor overgangsflydebetingelsen gælder, være lille, og man kan som en tilnærmelse på den usikre side alene regne med

træk- og trykflydebetingelsen. Grænseovergangen mellem de to flydebetingelser vil i dette tilfælde være bestemt af den rette linje gennem punkterne I og L, jævnfør figur 3.13.

### 3.4 GEOMETRISK MULIG BRUDFIGUR

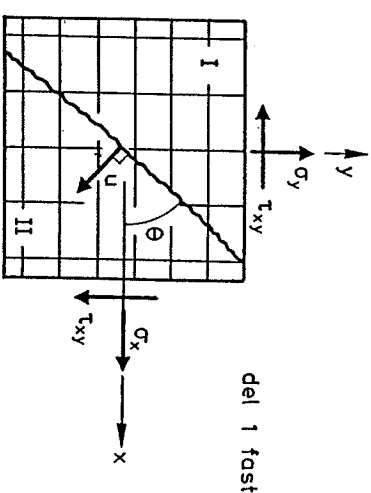
Ved hjælp af normalitetsbetingelsen, se afsnit 2.1.2, findes de plastiske tøjningsstilvækster for eksempelvis det normalarmerede område, jævnfør trækflydebetingelsen (3.8), at være bestemt ved

$$\dot{\epsilon}_x = \lambda (\phi_y f_c - \sigma_y) \quad (3.30)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \lambda (\phi_x f_c - \sigma_x) \quad (3.31)$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = 2\dot{\epsilon}_{xy} = 2\lambda \tau_{xy} \quad (3.32)$$

Herved kan hovedtøjningsstilvæksterne findes at være bestemt ved  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y$  og  $\dot{\epsilon}_2 = 0$ . En beregning af disses beliggenhed i forhold til (x, y)-systemet, vil vise, at  $\dot{\epsilon}_2$ -aksen netop er sammenfaldende med  $\eta$ -aksen, jævnfør figur 3.7. Da det umiddelbart kan vises, at der findes en geometrisk mulig brudfigur for det normalarmerede områdes randzone, se figur 3.9, kan det herved af ovenstående indses, at trækflydebetingelsen er en eksakt plastisk løsning. Brudmekanismen er vist i figur 3.15.



Figur 3.15: Brudmekanismen der svarer til trækflydebetingelsen.

Anvendes nu samme fremgangsmåde for den resterende del af flydefluden, kan det eftervises, at den i afsnit 3.3 angivne nedreværdiløsning er en eksakt plastisk løsning.

### 3.5 SPECIALTILFÆLDET $\sigma_c = 0$

For de spændingsfordelinger der hyppigst optræder i bjælker, gælder det at den ene normalspænding er nul, hvorfor de hertil knyttede beregningsudtryk vil blive anført. Da  $\sigma_{c1}$  i dette tilfælde altid antager værdien nul, vil betongspændingen  $\sigma_{c2}$  blive benævnt  $\sigma_c = -\sigma_c$ .

$$\frac{(\phi_y + \phi_x - \nu)f_c \leq \sigma_x \leq \phi_x f_c}{\phi_y f_c} \quad (3.33)$$

$$-(\phi_x f_c - \sigma_x)\phi_y f_c + \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.34)$$

$$\sigma_c = (\phi_x + \phi_y)f_c - \sigma_x \quad (3.35)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\phi_y f_c}{\phi_x f_c - \sigma_x} \quad (3.36)$$

$$\frac{(\phi_y - \phi_x^* - \nu)f_c \leq \sigma_x \leq (\phi_y + \phi_x - \nu)f_c}{\phi_y f_c} \quad (3.37)$$

$$-(\nu - \phi_y)\phi_y f_c^2 + \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.38)$$

$$\sigma_c = \nu f_c \quad (3.39)$$

$$\tan \theta = \frac{\phi_y f_c}{\tau_{xy}} \quad (3.40)$$

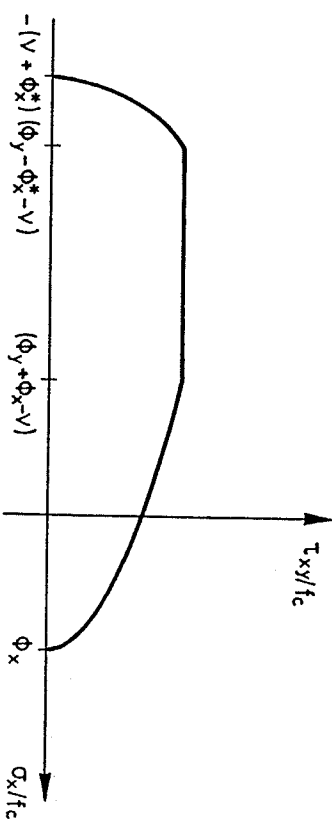
$$\frac{-(\nu + \phi_x^*)f_c \leq \sigma_x \leq (\phi_y - \phi_x^* - \nu)f_c}{\phi_x f_c} \quad (3.41)$$

$$\left[ (\nu + \phi_x^*)f_c + \sigma_x \right] \left[ \phi_x^* f_c + \sigma_x \right] + \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.42)$$

$$\sigma_c = \nu f_c \quad (3.43)$$

$$\tan \theta = -\frac{\tau_{xy}}{\phi_x^* f_c + \sigma_x} \quad (3.44)$$

Flydefluden, der hører til flydebetingelsen, er vist i figur 3.16.



Figur 3.16: Flydefluden for  $\sigma_y = 0$ .

### 3.6 SKÆVVINKLET ARMERING

For legemer med ikke ortogonale armeringsretninger, jævnfør figur 3.17, kan en fuldstændig flydeflade konstrueres ved, at benytte samme fremgangsmåde som i afsnit 3.3.

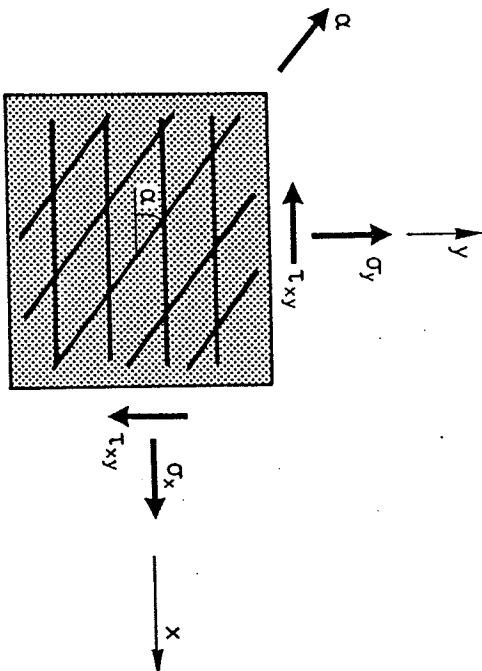
Flydebetingelsen for det i figur 3.17 viste legeme, vil ikke blive anført, blot skal de ligninger der svarer til ligningerne (3.5)-(3.7) angives. Disse er

$$\sigma_x = -\sigma_c \cos^2 \theta + (\phi_x + \phi_\alpha \cos^2 \alpha) f_c \quad (3.45)$$

$$\sigma_y = -\sigma_c \sin^2 \theta + \phi_\alpha f_c \sin^2 \alpha \quad (3.46)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_c \cos \theta \sin \theta + \phi_\alpha f_c \cos \alpha \sin \alpha \quad (3.47)$$

Armeringsbidraget i ligning (3.47) skyldes, at  $(x,y)$ -systemet nu ikke længere udgør armeringens hovedspændingssystem.



Figur 3.17: Skævvinklet armering.

Den mekaniske armeringsgrad  $\phi_\alpha$ , der gælder for armeringen efter  $\alpha$ -aksen, er defineret på samme måde som  $\phi_x$  og  $\phi_y$ , jævnfør formel (3.1).

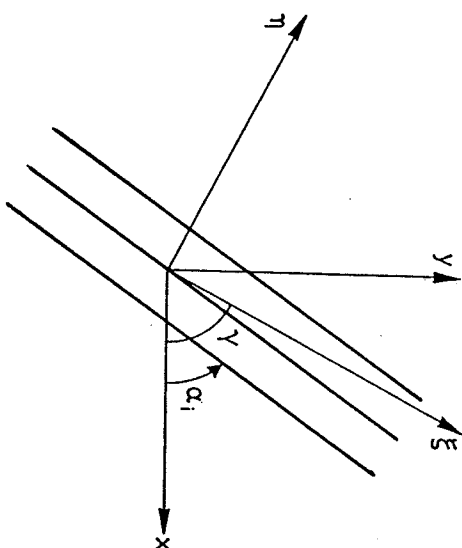
For et legeme, der er armeret i  $n$ -antal vilkårlige retninger  $\alpha_i$ , kan følgende fremgangsmåde anvendes til bestemmelse af bæreevnen, idet der forudsættes små armeringsgrader, jævnfør de afsluttende bemærkninger til afsnit 3.3.3.

Antages al armeringen at flyde, kan armeringens styrke i  $(\xi, \eta)$ -systemet, se figur 3.18, udtrykkes ved

$$\sigma_{s\xi} = f_c \sum_{i=1}^n \phi_i \cos^2(\gamma - \alpha_i) \quad (3.48)$$

$$\sigma_{s\eta} = f_c \sum_{i=1}^n \phi_i \sin^2(\gamma - \alpha_i) \quad (3.49)$$

$$\tau_{s\xi\eta} = -\frac{1}{2} f_c \sum_{i=1}^n \phi_i \sin(2\gamma - 2\alpha_i) \quad (3.50)$$



Figur 3.18: Armering efter flere retninger.

De mekaniske armeringsgrader  $\phi_i$ , der gælder for armeringsretningerne  $\alpha_i$ , er defineret analogt til  $\phi_\alpha$ .

Hovedspændingssystemet for armeringen, der ligger under vinklen  $\gamma_{sh}$  med  $x$ -aksen, kan nu bestemmes ved at sætte  $\tau_{s\xi\eta} = 0$ . Hermed fås følgende udtryk til bestemmelse af  $\gamma_{sh}$

$$\tan(2\gamma_{sh}) = \frac{\sum_{i=1}^n \phi_i \sin(2\alpha_i)}{\sum_{i=1}^n \phi_i \cos(2\alpha_i)} \quad (3.51)$$

Hvis  $\sum_{i=1}^n \phi_i \cos(2\alpha_i) = 0$ , er  $\gamma_{sh}$  bestemt ved  $\gamma_{sh} = \pm \frac{\pi}{4}$ , mens  $\gamma_{sh}$  kan antage en vilkårlig værdi, hvis det samtidigt gælder at  $\sum_{i=1}^n \phi_i \sin(2\alpha_i) = 0$ .

For  $(\xi, \eta)$ -systemet, der hører til vinklen  $\gamma_{sh}$ , fremtræder der en spændingstilstand, som er analog til den der er benyttet ved udløsningen af flydebetingelserne i afsnit 3.3.1 og 3.3.2. De mekaniske armeringsgrader  $\phi_\xi$  og  $\phi_\eta$  der hører til  $(\xi, \eta)$ -systemet under

vinklen  $\gamma_{sh}$  med x-aksen, er bestemt ved

$$\phi_{\xi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \phi_i \cos(2\alpha_i) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \phi_i \sin(2\alpha_i) \right)^2} \quad (3.52)$$

$$\phi_{\eta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \phi_i \cos(2\alpha_i) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \phi_i \sin(2\alpha_i) \right)^2} \quad (3.53)$$

hvor det øverste tegn gælder, hvis  $\sum_{i=1}^n \phi_i \cos(2\alpha_i) > 0$ , mens det nederste tegn gælder når  $\sum_{i=1}^n \phi_i \cos(2\alpha_i) < 0$ .

Løgemets bæreevne kan nu bestemmes ved at benytte flydebetingelserne i afsnit 3.3.1 og 3.3.2. Bemærk, at bæreevnen vil blive udtrykt ved  $\sigma_{\xi}$ ,  $\sigma_{\eta}$  og  $\tau_{\xi\eta}$ , som derefter kan transformeres til  $(x, y)$ -systemet.

### 3.7 ARMERINGSBESTEMMELSE

Ved en dimensionering er opgaven, for en given ydre belastning, at bestemme den nødvendige armering til optagelse af de eksisterende trækspændinger.

I det følgende vil interessen primært knytte sig til anvendelsen af ortogonal armering. Der vil blive set bort fra brugen af tryk-armering.

Elimineres  $\sigma_c$  af udtrykkene (3.5)-(3.6) ved hjælp af (3.7), og løses de fremkomne ligninger med hensyn til  $f_{tx} = \phi_x f_c$  og  $f_{ty} = \phi_y f_c$  fås

$$f_{tx} = \sigma_x + \tau_{xy} \cot \theta \quad (3.54)$$

$$f_{ty} = \sigma_y + \tau_{xy} \tan \theta \quad (3.55)$$

Den nødvendige armering ses at være en funktion af det enaksede betontryks hældning  $\theta$  med x-aksen.

En minimalarmering kan nu fastlægges ved at minimalisere den nødvendige armeringsmængde med hensyn til  $\theta$ . En sådan bestemmelse er foretaget af M.P. Nielsen [84.1]. Resultatet er angivet i tabel 3.1, hvor den anvendte parameter  $\lambda$  er bestemt ved

$$\lambda = \frac{f_{yx}}{f_{yy}} \quad (3.56)$$

Er enten den ene retnings armering fastlagt på forhånd, eller ønskes et bestemt forhold mellem armeringsmængderne efter de to retninger, kan ligningerne (3.54)-(3.55) anvendes direkte til bestemmelse af den nødvendige armering, blot betontrykkets hældning er valgt således, at betingelsen

$$\sigma_c = |\tau_{xy}| (\tan \theta + \cot \theta) \leq \nu f_c \quad (3.57)$$

er opfyldt. Principielt kan  $\theta$  vælges frit. Forsigtighed bør dog udvises, specielt i de tilfælde, hvor armeringen afviger væsentligt fra minimalarmeringen, idet en sådan armering kan lede til problemer i brugsstadiet, i form af tidlig flydning for den ene retnings armering og store revnevidder.

Kan armeringsretningerne vælges frit, vil ovenstående løsning ikke altid føre til en minimalarmering. Til eksempel kan hovedspændingsretningerne armeringsmæssigt vise sig fordelagtigere.

Ønskes der anvendt skævvinklet armering, kan, hvis der blot armeres i to retninger, udtrykkene (3.45)-(3.47) benyttes. M.P. Nielsen [84.1] har også for dette tilfælde angivet en minimalarmering. Interesserede henvises til referencen.

| tilfælde | betingelse                                                                                           | $f_{tx} = \frac{A_x l f_{yx}}{t}$                                      | $f_{ty} = \frac{A_y l f_{xy}}{t}$               | $\sigma_c (\leq v f_c)$                                                          |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 1        | $\sigma_x \geq -\sqrt{\lambda}  \tau_{xy} $<br>$\sigma_y \geq -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}  \tau_{xy} $ | $\sigma_x + \sqrt{\lambda}  \tau_{xy} $                                | $\sigma_y + \frac{ \tau_{xy} }{\sqrt{\lambda}}$ | $ \tau_{xy}  (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})$                        |
| 2        | $\sigma_x < \lambda \sigma_y$<br>$\sigma_x < -\sqrt{\lambda}  \tau_{xy} $                            | $\sigma_x \sigma_y < \tau_{xy}^2$<br>$\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ | $0$<br>$0$                                      | $ \sigma_x  \left[ 1 + \left( \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \right)^2 \right]$<br>* |
|          | $\sigma_x > \lambda \sigma_y$<br>$\sigma_y < -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}  \tau_{xy} $                  | $\sigma_x \sigma_y < \tau_{xy}^2$<br>$\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ | $0$<br>$0$                                      | $ \sigma_y  \left[ 1 + \left( \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y} \right)^2 \right]$<br>* |

\* Den største betonspænding  $\sigma_{c2}$  er bestemt ved  $\sigma_{c2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$

Tabel 3.1: Udtryk til bestemmelse af minimumsarmering.

## 4 REN BØJNING

Anvendelse af den ideal-plastiske model til beregning af rektangulære jernbetonbjælkers bøjningsbæreevne er behandlet i tidligere arbejder, hvorfor kun de væsentligste forhold vedrørende beregningsmodellen skal anføres.

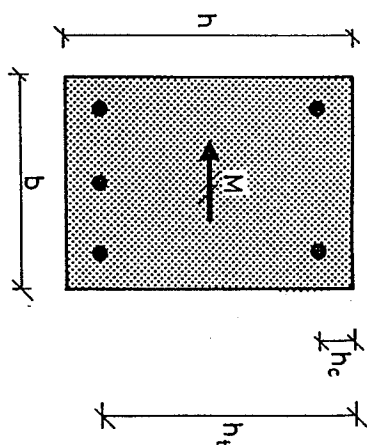
I et grundlæggende teoretisk arbejde har H. Exner [83.5] ved hjælp af en analytisk model bestemt effektivitetsfaktoren. For denne er i M.P. Nielsen et al. [83.2] fundet et tilnærmelsesudtryk, som anvendt i udtrykkene for den plastiske bøjningsbæreevne er blevet sammenlignet med talrige forsøgsresultater.

Som illustration af principperne for dels udledelsen af de plastiske bæreevneudtryk og dels fremgangsmåden ved bestemmelsen af effektivitetsfaktoren, vil specialtilfældet rektangulære bjælker uden trykarmering - se afsnit 4.2 - blive forholdsvis detaljeret behandlet.

### 4.1 BJÆLKEBESKRIVELSE

En vandret jernbetonbjælke med massivt, rektangulært tværsnit har de i figur 4.1 viste geometriske data.

Bjælkens længearmering forudsættes at ligge, dels i bjælketværsnittets over- og underside, og dels symmetrisk om den lodrette tyngdepunktslinje. Undersidearmeringen, der regnes koncentreret i en stringer beliggende i afstanden  $h_t$  fra tværsnittets overside, har arealet  $A_{\lambda t}$  og trækflydespændingen  $f_{yt}$ . Denne armering vil



Figur 4.1: Bjælketværsnit

i det følgende blive kaldt bjælkens *trækarmring*. Oversidearmeringen, der regnes koncentreret i en stringer beliggende i afstanden  $h_c$  fra tværsnittets overside, har arealet  $A_{lc}$  samt træk- og trykflydespændingerne  $f_{yc}$  og  $f_{yc}^*$ . Denne armering vil blive kaldt bjælkens *trykarmering*.

Betonens ideal-plastiske trykstyrke betegnes  $\psi_b f_c$ .

For forholdet mellem *trykarmeringshøjden*  $h_c$  og *trækarmringshøjden*  $h_t$  indføres størrelsen

$$\alpha = \frac{h_c}{h_t} \quad (4.1)$$

Bjælkens *mekaniske armeringsgrader* defineres ved

$$\phi_t = \frac{A_{lc} f_{yt}}{b h_t f_c} = \phi_t \frac{f_{yt}}{f_c} \quad (4.2)$$

$$\phi_c = \frac{A_{lc} f_{yc}}{b h_t f_c} = \phi_c \frac{f_{yc}}{f_c} \quad (4.3)$$

$$\phi_c^* = \frac{A_{lc} f_{yc}^*}{b h_t f_c} = \phi_c \frac{f_{yc}^*}{f_c} \quad (4.4)$$

hvor  $\phi_t$  og  $\phi_c$  er de *geometriske armeringsgrader*.

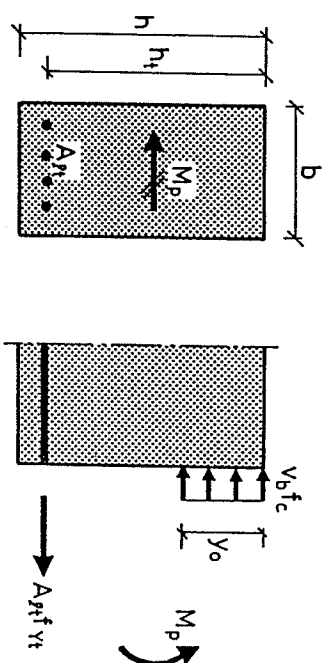
Som anført i afsnit 3.2 skal der, for at armeringen kan regnes aktiv ved optagelsen af trykspændinger, være sikkerhed for, at der ikke kan opstå stabilitetsvigt. En sådan sikkerhed kan for bjælkers vedkommende opnås ved at indlægge bøjler, se eventuelt nærmere herom i Den Danske Betonnorm DS 411 [84.2].

For bjælker med andre tværsnit og armeringsudformninger henvises til afsnit 4.4.

## 4.2 BJÆLKER UDEN TRYKARMERING

### 4.2.1 Bæreevneudtryk

Bjælkerne defineres at være *normalarmet* (NA), når trækarmeringen flyder ved brud. I dette tilfælde findes den statisk tilladelige spændingsfordeling vist i figur 4.2.



Figur 4.2: Normalarmet tværsnit.

Af betingelsen for tværnsnittets længdeligevægt fås

$$A_{xt} f_{yt} = v_b f_c b Y_o \quad (4.5)$$

Anvendes forskellige armeringstyper eksempelvis i form af både spændarmering og slap armering, ændres ledet  $A_{xt} f_{yt}$  i (4.5) til  $\sum_{i=1}^n A_{xt}^i f_{yt}^i$ , hvor i henviser til den enkelte armeringstypes areal samt flydespænding.

Indføres den mekaniske armeringsgrad  $\phi_t$  i (4.5), fås trykzonehøjden  $Y_o$  at være bestemt ved

$$Y_o = \frac{1}{v_b} h_t \phi_t \quad (4.6)$$

Momentligevægt giver

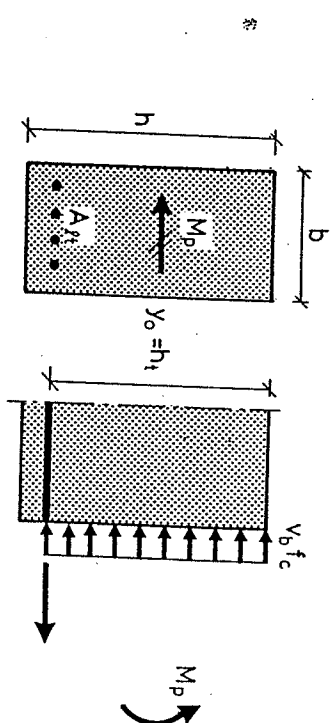
$$M_p = A_{xt} f_{yt} (h_t - \frac{1}{2} Y_o) \quad (4.7)$$

eller idet den mekaniske armeringsgrad indføres, fås følgende udtryk for bøjningsbæreevnen

$$M_p = (1 - \frac{1}{2 v_b} \phi_t) \phi_t b h_t^2 f_c \quad (4.8)$$

Bæreevneudtrykket (4.8) kan regnes at gælde sålænge  $Y_o \leq h_t$ , eller idet udtrykket (4.6) for  $Y_o$  anvendes,  $\phi_t \leq v_b$ .

For  $\phi_t > v_b$  kan trækarmeringen ikke regnes at have opnået flydning ved brud, og bjælkerne defineres at være *overarmet* (OA). Spændingsfordelingen i dette tilfælde er som vist i figur 4.3.



Figur 4.3: Overarmet tværnsnit.

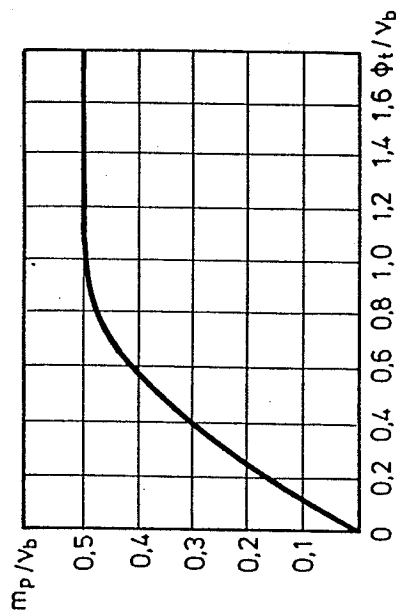
Bøjningsbæreevnen findes umiddelbart at være

$$M_p = \frac{1}{2} v_b f_c b h_t^2 \quad (4.9)$$

Indføres den dimensionsløse bøjningsbæreevne  $m_p$ , defineret ved  $m_p = \frac{M_p}{b h_t^2 f_c}$ , fås således den fuldstændige løsning for rektangulære bjælkers bøjningsbæreevne at være

$$m_p = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2 v_b} \phi_t) \phi_t & \text{for } \phi_t \leq v_b \\ \frac{1}{2} v_b & \text{for } \phi_t > v_b \end{cases} \quad (4.10)$$

Bæreevneudtrykket (4.10) er vist grafisk i figur 4.4.

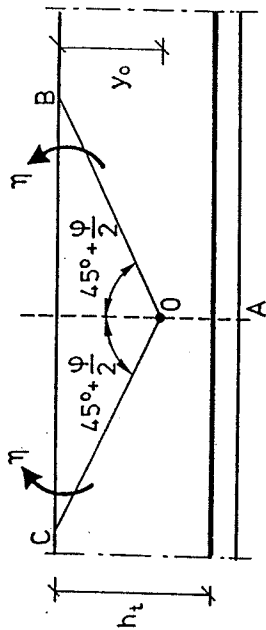


Figur 4.4: Den dimensionsløse bøjningsbæreevne som funktion af den mekaniske armeringsgrad.

Da parentesleddet i det øverste udtryk i (4.10) kun varierer lidt for små  $\phi_t$ , ses bøjningsbæreevnen i dette tilfælde foruden geometrien primært at være en funktion af armeringens flydekraft  $A_{st}f_{yt}$ . Derimod ses bøjningsbæreevnen i det overarmerede område foruden geometrien alene at være en funktion af betonens idealplastiske trykstyrke  $v_b^f$ .

#### 4.2.2 Geometrisk mulig brudfigur

For den i figur 4.5 viste brudmekanisme gælder det, at legemet udenfor AOB regnes at rotere som et stift legeme omkring O. Tilsvarende gælder for legemet udenfor AOC, idet rotationen dog er modsat rettet. I feltet OBC fås en deformationstilstand svarende til et Rankinefelt. For en nærmere beskrivelse af denne deformationstilstand henvises til speciallitteraturen. Her skal det kun bemærkes, at det indre arbejde pr. volumenenhed for feltet OBC er  $W_I = cn$ , hvor c er betonens kohæsion, jævnfør afsnit 2.2.1.



Figur 4.5: Brudmekanisme ved ren bøjning. ( $\phi$  er friktionsvinklen, se afsnit 2.2.1)

Anvendes arbejdslligningen på brudmekanismen vist i figur 4.5, og minimeres det fundne udtryk for M med hensyn til  $y_0$ , fås bæreevneudtrykket angivet i (4.10).

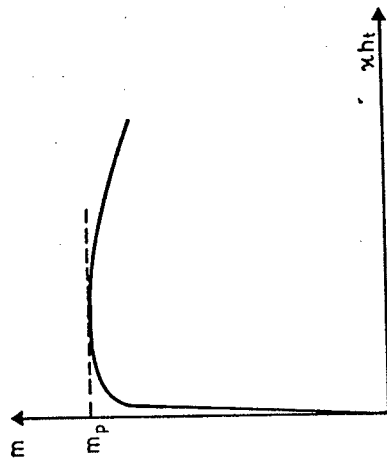
Den ved (4.10) bestemte bøjningsbæreevne er således en eksakt plastisk løsning.

#### 4.2.3 Effektivitetsfaktoren

Antages tøjningsfordelingen over tværsnittet lineær, samt regnes betonens arbejdskurve for enakset tryk at gælde for trykzonen, er tilfældet ren bøjning enestående derved, at det er muligt at bestemme  $v_b$  ved en teoretisk analyse. En sådan bestemmelse er udført af H. Exner [83.5].

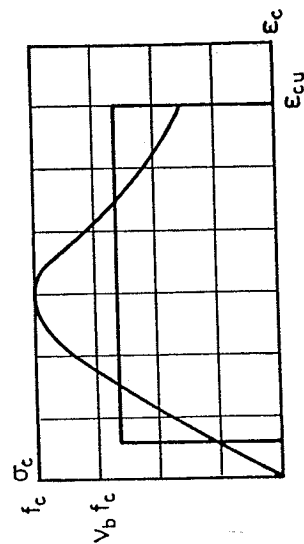
Med udtrykkene for betonens arbejdskurve angivet i afsnit 2.2.3, kan en bjælkes arbejdskurve fastlægges. En sådan er vist i figur 4.6. I afsnit 4.4.3 er beregningsproceduren mere uddybende beskrevet.

Idet bjælkens bøjningsbæreevne defineres at være toppunktet af krumnings-bøjningsmomentkurven, se figur 4.6, kan  $v_b$  bestemmes af ligningerne i (4.10). Resultatet af en sådan beregning er vist i figur 4.8.

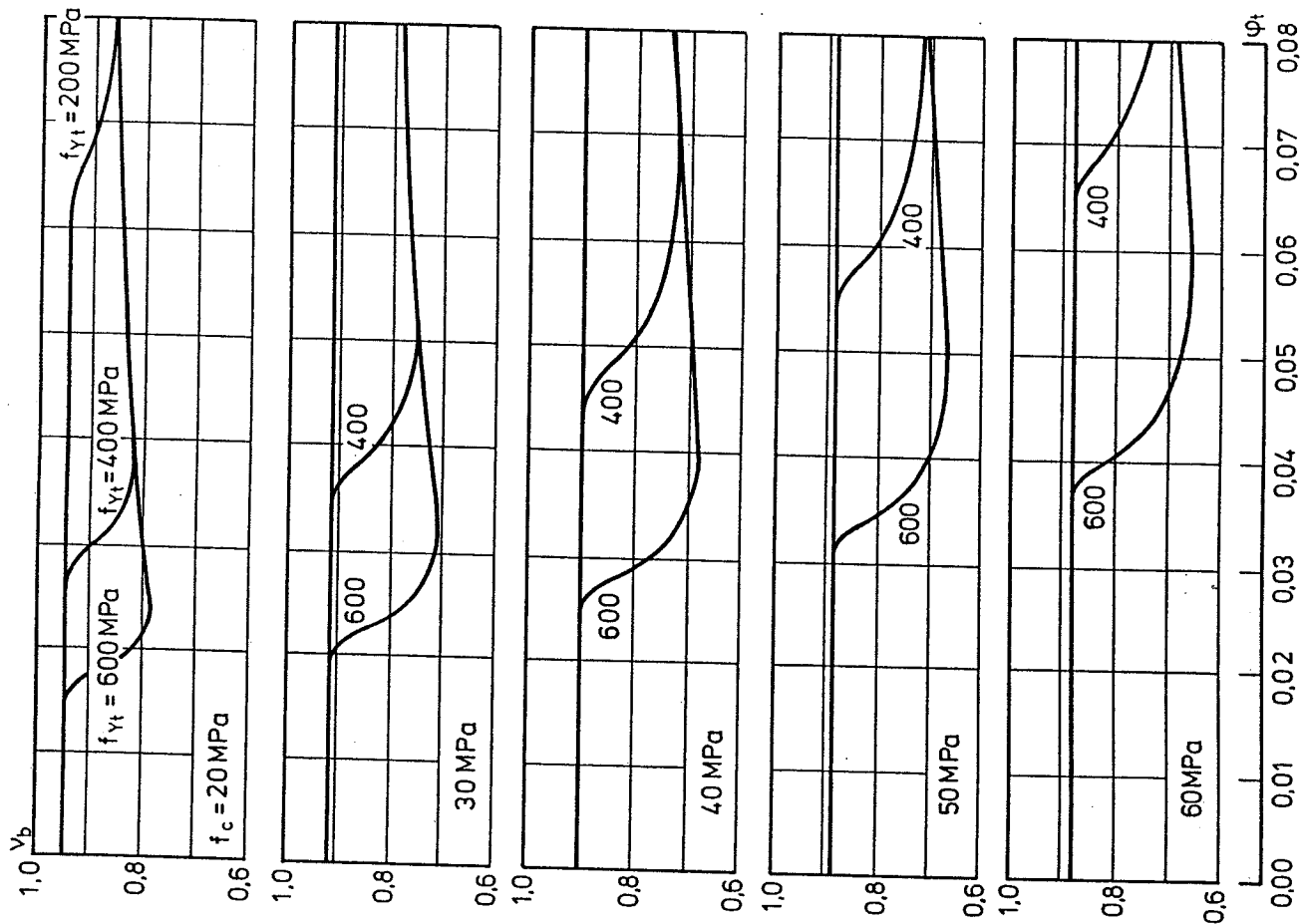


Figur 4.6: Sammenhæng mellem krumning og bøjningsmoment.

Statisk ækvivalens mellem betonens virkelige og stift-plastiske arbejdskurve, se figur 4.7, kræver at de to spændingsfordelinger har dels samme areal og dels samme tyngdepunkt - det sidste gælder dog ikke overarmerede bjælker. Ovenstående betyder, at effektivitetsfaktoren er en funktion af brudtøjningen  $\epsilon_{cu}$ , jævnfør figur 4.7.



Figur 4.7: Den korrekte og den tilsvarende stift-plastiske arbejdskurve for betonen.



Figur 4.8: Effektivitetsfaktoren ved bøjning.

For svagt armerede bjælker ses  $v_b$  at være uafhængig af  $\phi_t$  og  $f_{yt}$ , og falde i værdi for stigende værdier af  $f_c$ . Kurverne i figur 4.8 ses at have et minimum. Dette minimum optræder i intervallet, hvor bjælken ifølge den korrekte beregning er overarmeret og ifølge den plastiske beregning normalarmeret. For armeringsprocenter  $\phi_t$  der er højere end svarende til minimum, er bjælkerne overarmeret. I det overarmerede område ses  $v_b$  at stige i værdi for stigende værdier af  $\phi_t$ .

Anvendes kurverne i figur 4.8 til bestemmelse af  $v_b$ , er den ved (4.10) fundne bæreevne ikke alene en eksakt plastisk løsning, men en korrekt løsning. H. Exner [83.5] har ud fra kurverne i figur 4.8 opstillet udtryk til bestemmelse af  $v_b$ . Disse udtryk har imidlertid den svaghed, at de afhænger af både  $f_c$ ,  $f_{yt}$  og  $\phi_t$ , hvilket specielt er uheldigt i forbindelse med dimensionering. Som en tilnærmelse kan  $v_b$  bestemmes ved minimalværdierne i figur 4.8. Disse svarer omtrent til at bestemme  $v_b$  ved følgende simplificerede udtryk.

$$v_b = 0,97 - \frac{f_{yt}}{5000} - \frac{f_c}{300}, \quad f_{yt} < 900 \text{ MPa} \quad (4.11)$$

$$f_c < 60 \text{ MPa}$$

Da  $f_{yt}$  oftest er mindre end 600 MPa, kan på den sikre side regnes

$$v_b = 0,85 - \frac{f_c}{300}, \quad f_{yt} < 600 \text{ MPa} \quad (4.12)$$

$$f_c < 60 \text{ MPa}$$

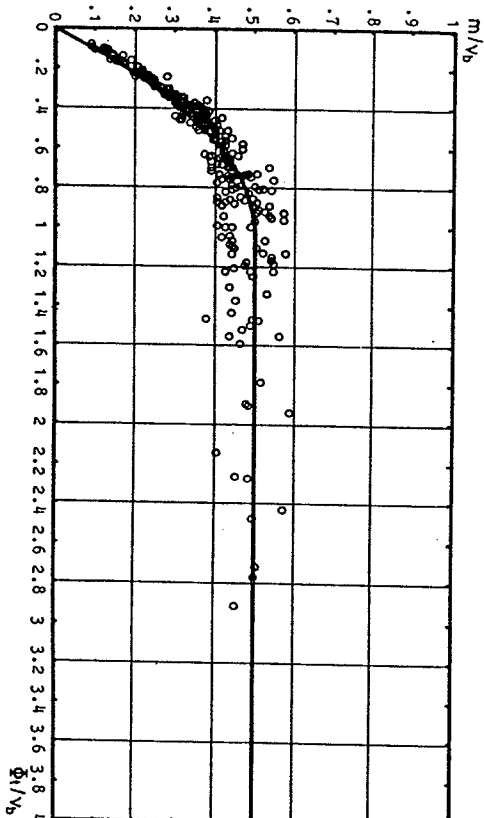
For normalarmerede bjælker kan  $v_b$ , hvis  $y_o < \mu h_t$ , bestemmes af

$$v_b = 0,98 - \frac{f_c}{500}, \quad f_c < 60 \text{ MPa} \quad (4.13)$$

Da den aftagende del af kurverne for  $v_b$  vist i figur 4.8 optræder i det normalarmerede område, må udtrykket (4.13) kun anvendes for  $y_o < \mu h_t$ . Da  $\mu$  er en funktion af  $\phi_t$  og  $v_b$ , kan  $\mu$  som en tilnærmelse på den sikre side sættes til  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Udtrykket (4.11) vil også kunne anvendes i det normalarmerede område. Dels gælder det her, at  $v_b$  på denne måde findes på den sikre side, og dels gælder det, at  $v_b$ 's indflydelse på bæreevnen er begrænset i dette område, specielt for små værdier af  $\phi_t$ . Anvendes forskellige typer armeringsjern kan den værdi af  $f_{yt}$ , som anvendes i (4.11), bestemmes som et vægtes gennemsnit mellem de enkelte armeringstypers flydespændinger. Som vægte anvendes de enkelte armeringstypers flydekraft. Ved anvendelse af spændarmering anvendes en flydespænding og flydekraft svarende til, at arbejdsliniens nulpunkt er forskudt til punktet svarende til forspændingen.

I figur 4.9 er bæreevnen efter (4.10) vist sammen med forsøgssultater. For  $v_b$  er udtrykket (4.11) anvendt.



Figur 4.9: Teoretisk bøjningbæreevne sammenlignet med forsøg.

Som det fremgår af figur 4.9 er der endog særdeles god overensstemmelse mellem teori og forsøg. Tilnærmelsesudtrykket (4.11) for  $v_b$  ses således at fungere tilfredsstillende. At  $v_b$  rent faktisk er en funktion af  $f_c$  og  $f_{yt}$ , blev iøvrigt fuldt ud verificeret af forsøgsresultaterne. For en mere detaljeret vurdering henvises til M.P. Nielsen et al. [83.2]. Endelig skal det bemærkes, at tværarmring, eventuelt i form af bjælker, kan have værdien af  $v$ , da betonens arbejdskurve efter passagen af topunktet vil aftage knap så kraftigt.

For armering i flere lag kan, hvis disse er tætliggende, ovenstående beregningsprocedure anvendes uden problemer. Er disse armeringslag ikke tætliggende henvises til beregningsanvisningerne i afsnit 4.3 og 4.4.1.

### 4.3 BJÆLKER MED TRYKARMERING

For bjælker med trykarmering anvendes ved udledelsen af bæreevneudtrykkene samme fremgangsmåde som i afsnit 4.2.1, hvorfor kun resultatet skal anføres, se tabel 4.1. Det bemærkes, at der for det normalarmerede område fremkommer tre tilfælde afhængig af spændingstilstanden i trykarmeringen.

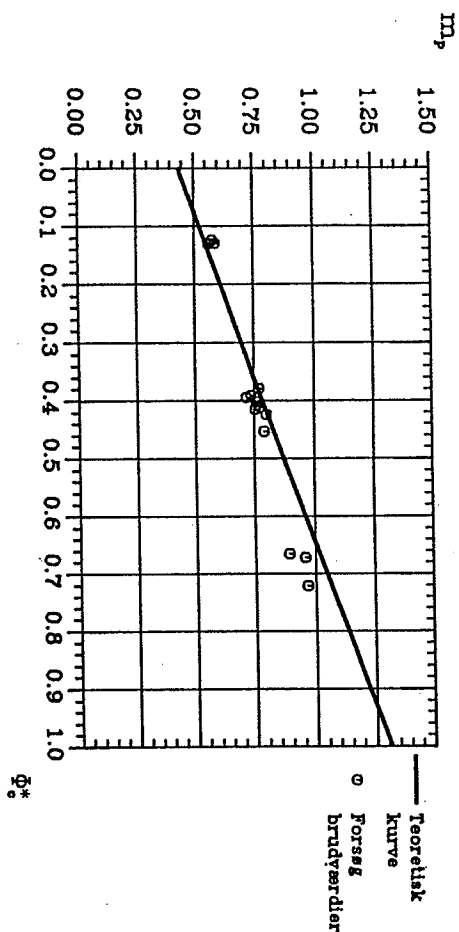
Indlægges trykarmering i den i figur 4.5 viste bjælke, og regnes den samme brudmekanisme at gælde, fører anvendelse af arbejdslovingen til det samme resultat som i tabel 4.1, således at der også her er tale om en eksakt plastisk løsning.

Kurverne for effektivitetsfaktoren, vist i figur 4.8, gælder også i dette tilfælde, idet dog  $\phi_t$  som en tilnærmelse erstattes af  $\phi^* = \phi_t - \phi_c f_{yc}^*/f_{yt}$ . For anvendelse i praksis har en sammenligning med forsøg, se M.P. Nielsen et al. [83.2], også her vist at tilnærmelsesudtrykket (4.11) for  $v_b$  fungerer endog særdeles tilfredsstillende. Et eksempel herpå er vist i figur 4.10.

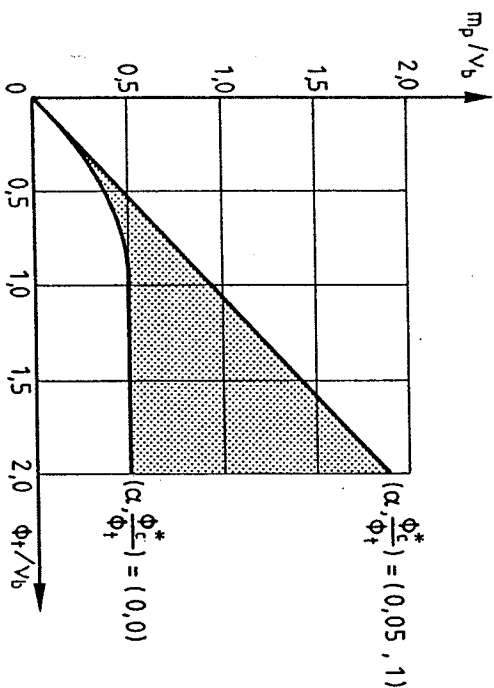
Trykarmeringens indflydelse på bøjningsbæreevnen er søgt illustreret i figur 4.11. Da  $\alpha$  og forholdet  $\phi_c^*/\phi_t$  i praksis sjældent vil være henholdsvis mindre end 0,05 og større end 1, udgør det skraverede felt i figur 4.11 den bæreevneforøgelse, der vil kunne opnås ved at indlægge en trykarmering.

| tilfælde           | 1                                                               | 2                                                                                                | 3                                                                                           | 4                                        |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| spændingsfordeling |                                                                 |                                                                                                  |                                                                                             |                                          |
| $y_0$              | $\frac{1}{v_b} (\phi_t + \phi_c) h_t$                           | $h_c$                                                                                            | $\frac{1}{v_b} (\phi_t - \phi_c^*) h_t$                                                     | $h_t$                                    |
| $m_p$              | $\phi_t + \alpha \phi_c - \frac{1}{2v_b} (\phi_t + \phi_c)^2$   | $\frac{1}{2} v_b \alpha^2 + (1-\alpha) \phi_t$                                                   | $\phi_t - \alpha \phi_c^* - \frac{1}{2v_b} (\phi_t - \phi_c^*)^2$                           | $\frac{1}{2} v_b + (1-\alpha) \phi_c^*$  |
| gyldighedsområde   | $y_0 \leq h_c$<br>$\frac{1}{\alpha} (\phi_t + \phi_c) \leq v_b$ | $y_0 = h_c$<br>$\frac{1}{\alpha} (\phi_t + \phi_c) > v_b > \frac{1}{\alpha} (\phi_t - \phi_c^*)$ | $h_c \leq y_0 \leq h_t$<br>$\frac{1}{\alpha} (\phi_t - \phi_c^*) > v_b > \phi_t - \phi_c^*$ | $y_0 = h_t$<br>$\phi_t - \phi_c^* > v_b$ |

Tabel 4.1: Beregningsudtryk til bestemmelse af bøjningsbæreevnen for en rektangulær bjælke med trykarmering.



Figur 4.10: Forsøg af C. Bach et al. [10.1] sammenlignet med den teoretiske løsning. Da  $f_{yc}^*$  ikke er oplyst, er som en tilnærmelse  $\phi_c^* = \psi_c$  anvendt.



Figur 4.11: Trykkammeringens indflydelse på bøjningsbæreevnen.

## 4.4 ANDRE TVÆRSNIT OG ARMERINGSUDFORMNINGER

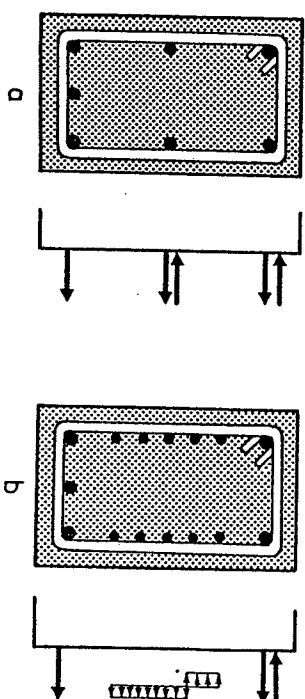
Den her anviste plastiske beregningsmodel kan anvendes for en vilkårlig bøjningspåvirket jernbetonbjælke. Vedrørende beregningsmetoden skal kun et par overordnede forhold berøres.

Da trykzonen i det generelle tilfælde ofte ikke er rektangulær, skal specielt forholdene vedrørende effektivitetsfaktoren vurderes nærmere.

### 4.4.1 Armeringen generelt

Af revneviddereducerende årsager kan det være hensigtsmæssigt, at indlægge en langsgående armering mellem over- og undersidearmeringen. Denne armering kan medregnes ved bøjningsoptagelsen. Er der tale om få jern, kan disse på simpel vis medregnes i beregningsmodellen ved indførelse af ekstra stringere, som vist i figur 4.12 a.

Er der tale om flere og tætliggende jern, se figur 4.12 b, kan disse inddrages i den plastiske model enten ved indførelse af en liniestringer, eller via en jævnt fordelt armeringsstyrke over hele tværsnittet, analog til beregningsmodellen i kapitel 3.



Figur 4.12: Generelt vedrørende armeringens indregning i de plastiske bæreevneudtryk.

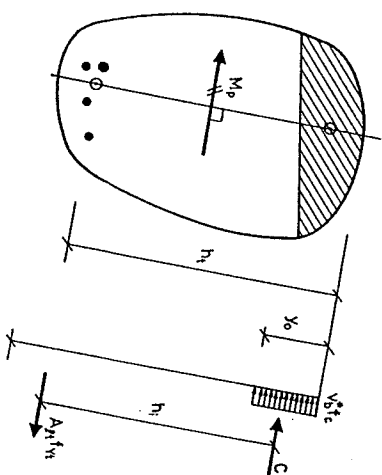
#### 4.4.2 Generel beregningsmodel

Ikke i alle tilfælde kan en jernbetonbjælkes bæreevne beregnes umiddelbart. Dette er tilfældet når følgende forhold optræder enten alene eller sammen:

- bjælketværsnittet er ikke rektangulært
- armeringen er asymmetrisk fordelt om den lodrette tyngdepunktslinje
- skæv bøjning

Regnes betonen at have den ideal-plastiske trykstyrke  $v_b^* f_c$ , kan bøjningsbæreevnen i ovenstående tilfælde generelt bestemmes efter følgende fremgangsmåde, jævnfør figur 4.13:

- arealet af trykzonen bestemmes ved hjælp af kravet om tværsnittets længdelige vægt
- trækarmringens tyngdepunkt fastlægges
- via kravet om at det statiske moment for trykzonen skal være nul omkring linjen, der er vinkelret på bøjningsvektoren og går gennem trækarmringens tyngdepunkt, kan udseendet af trykzonen og dermed dennes tyngdepunkt bestemmes
- af momentligevægtsligningen bestemmes bøjningsbæreevnen



Figur 4.13: Bæreevnebestemmelsen i det generelle tilfælde.

Regnes trykzonehøjden  $y_0$  og trækarmringshøjden  $h_t$  bestemt som vist i figur 4.13, kan bjælken regnes at være normalarmeret for  $y_0 \leq h_t$  og dermed overarmeret for  $y_0 > h_t$ .

Bemærk, at anvendes den her beskrevne fremgangsmåde, vil den fundne bæreevne altid være en eksakt plastisk løsning, idet den i figur 4.5 viste brudmekanisme vil føre til samme bæreevne.

#### 4.4.3 Ikke rektangulære trykzoner

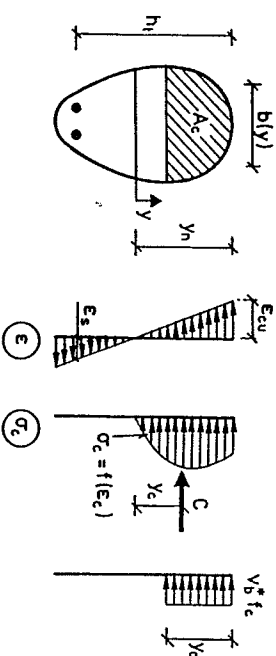
Beregningsproceduren anvist i figur 4.13 kræver kendskab til værdien af  $v_b^*$ . Denne kan bestemmes efter samme procedure som anført i afsnit 4.2.3.

Med betegnelserne i figur 4.14 og udtrykket  $\sigma_c = f(e_c)$  for betongens arbejdskurve, jævnfør funktionsudtrykket (2.28), fås resultanten af betonspændingerne at være

$$C(y_n) = \int_0^{y_n} b(y) f\left(\frac{e_{cu}}{y_n} y\right) dy \quad (4.14)$$

Resultantens afstand fra nullinjen er fastlagt ved

$$y_c(y_n) = \frac{1}{C(y_n)} \int_0^{y_n} b(y) f\left(\frac{e_{cu}}{y_n} y\right) y dy \quad (4.15)$$

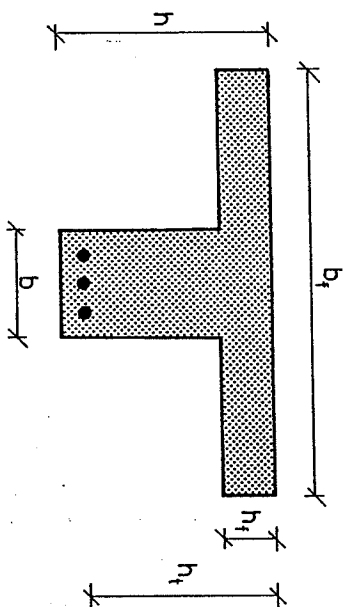


Figur 4.14: Forholdene ved vilkårligt tværsnit.

For et valgt  $\epsilon_{cu}$  kan funktionsudtrykkene  $C(y_n)$  og  $Y_C(y_n)$ , for en given  $b(y)$ -funktion, bestemmes. Regnes armeringen linearelastisk, ideal-plastisk med eksempelvis elasticitetskoeficienten  $E_s = 2,1 \cdot 10^5$  MPa, kan trækkræften i armeringen udtrykkes som en funktion af  $y_n$ . Af kravet om tværsnittets længdeligevægt kan  $y_n$  funktion af  $y_n$  bestemmes. Hermed kan også bøjningsmomentet for en given armering, bestemmes. Ved således at anvende ovenstående arbejdskurve er fastlagt. Ved således at anvende ovenstående bestemte bæreevneudtryk, at indsatte det maksimale af ovenstående bestemte bøjningsmomenter.

Ved at vælge  $b(y)$ -funktioner, som gengiver de i praksis hyppigst forekommende typer af trykzoner, kan der udarbejdes kurver efter hvilke  $v_b^*$  kan bestemmes. For at få rimelige simple udtryk til bestemmelse af  $v_b^*$  kan samme fremgangsmåde bruges, som for rektangulære bjælker, hvilket betyder at  $v_b^*$  udtrykkes ved minimumsværdierne.

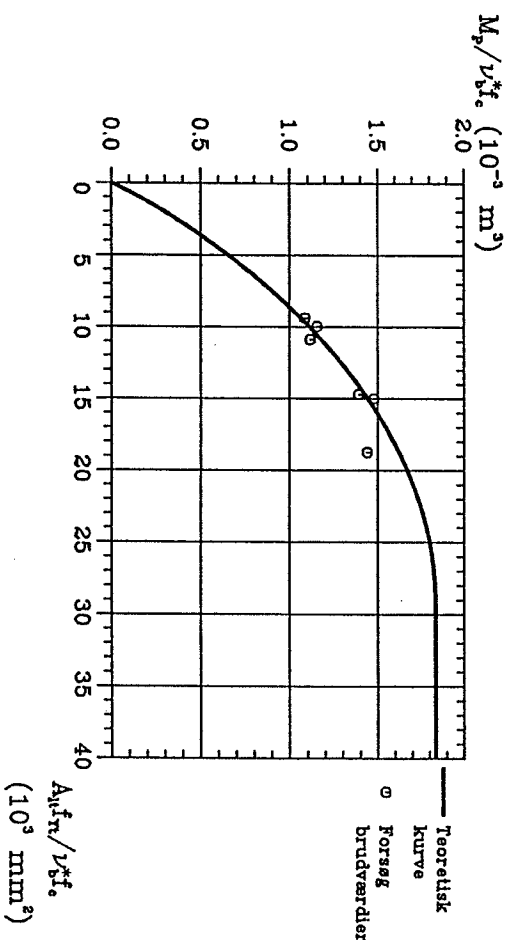
Det bemærkes, at indgår der flanger i tværsnittet, eksempelvis som for T-bjælken vist i figur 4.15, skal det eftervises, at disse kan regnes aktive ved optagelsen af trykspændinger. Normalt skal der således være en vis mængde tværarmering i flangen også kaldet flangermering. For dette emne henvises til M.P. Nielsen [74.2].



Figur 4.15: Eksempel på tværsnit med flange.

En bestemmelse af  $v_b^*$  som ovenfor anvist er ikke gennemført her. I mangel af bedre kan  $v_b$  anvendes. Forsigtighed bør dog udvises hvor trykzonen afviger væsentligt fra den rektangulære, specielt for  $y_0$  større end cirka  $\frac{1}{2}h_t$ .

I figur 4.16 er forsøg udført af A.H. Mattock et al. [61.1], hvor trykzonen havde form som en trekant, vist sammen med den ideelle plastiske løsning. For effektivitetsfaktoren er  $v_b$  bestemt ved (4.11) anvendt. Bjælkerens trykzonehøjde er  $y_0 \approx 127$  mm.



Figur 4.16: Bjælker med trekantformet trykzone vurderet ved  $v_b^* = v_b$ .

#### 4.5 ARMERINGSBESTEMMELSE

Af økonomiske årsager vil det være mest hensigtsmæssigt at bestemme den nødvendige armering svarende til normalarmeret tværsnit. For statistisk ubestemte konstruktioner skal tværsnittet være normalarmeret.

For rektangulære bjælker kan den nødvendige armering direkte bestemmes ved, at løse bæreevneligningerne anført tidligere i dette kapitel med hensyn til  $\phi_t$ , idet betingelserne for anvendelse af ligningerne checkes. Dette fører for en bjælke med rektangulær trykzone, idet der ses bort fra trykarmering, til formlerne

$$y_o = h_t - \sqrt{h_t^2 - \frac{2M}{b f_c}} \quad (4.16)$$

$$\lambda_{lt} = \frac{v_b f_c b y_o}{f_{yt}} \quad (4.17)$$

Idet trykzonens bredde er kaldt  $b$ . Indsættes  $y_o$  bestemt ved (4.16) i (4.17) fås direkte

$$\lambda_{lt} = \frac{v_b f_c b h_t}{f_{yt}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{b f_c b h_t^2}} \right) \quad (4.18)$$

Benyttes (4.18) direkte til bestemmelse af armeringen, kan værdien af  $y_o$  på simpel vis bestemmes af (4.17).

I det generelle tilfælde kan ovenstående procedure også benyttes, det vil sige trykzonen bestemmes via momentligningskravet om trækarmingen, hvorefter den nødvendige armering bestemmes af kravet om tværsnittets længdeligevægt.

Anvendes trykarmering benyttes ovennævnte fremgangsmåde også, blot indgår trykarmeringens flydekraft i udtrykkene.

Da der hersker nogen usikkerhed for hvor megen trykarmering der må medregnes, bør de i DS 411 [84.1] angivne regler overholdes, d.v.s. der højst regnes med en værdi for  $\lambda_{lc} f_c^*$ , der ikke over-

stiger  $\lambda_{lc} A_c$ , hvor  $\lambda = 1/2$  hvis der anvendes stød, og  $\lambda = 1$  hvis der ikke stødes.  $A_c$  er arealet af tværsnittet. Figur 4.10 synes iøvrigt at bekræfte det rimelige i ovennævnte regel. Det sikres, at der ikke kan ske stabilitetsvigt af trykarmeringen, eventuelt i form af fastholdelse med bøjler.

## 5 MED NORMALKRAFT

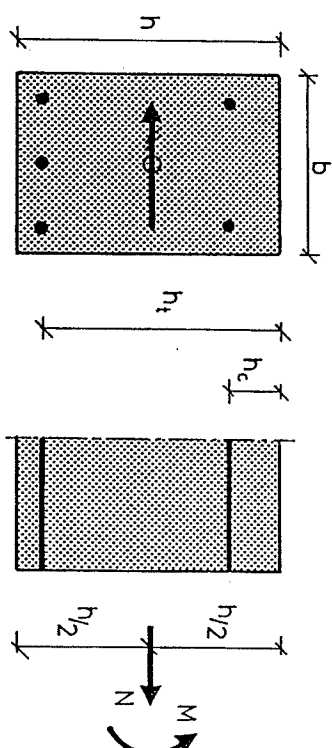
Som ved ren bøjning, se kapitel 4, er også tilfældet bøjning med normalkraft behandlet i H. Exner [83.5] og M.P. Nielsen et al. [83.2]. I forhold til ovenstående referencer, er der foretaget en ændring af snitkræfternes henføringsspunkt i tværsnittet, hvilket har vist sig hensigtsmæssigt i forbindelse med behandlingen af kombinerede belastninger. Endvidere er afsnittet omhandlende effektivitetstaktoren udvidet, således at de specielle forhold vedrørende flydefladen i omegnen af ren normalkraft er mere uddybende behandlet.

### 5.1 BJÆLKEBESKRIVELSE

De geometriske og materiallemæssige forhold anført i afsnit 4.1 regnes at gælde.

Bøjningsmomentet og normalkraften - positiv som træk - regnes henført til midtlinjen mellem tværsnittets over- og underside, se figur 5.1.

Bjælkerne forudsættes at være sikret mod stabilitetssvigt, således at bruddet alene skyldes en overskridelse af materialestyrkerne. Betonen regnes at have den ideal-plastiske trykstyrke  $\nu_{bn} f_c$ . For ren normalkraft vil effektivitetstaktoren blive benævnt  $\gamma_n$ .



Figur 5.1: Snitkræfternes angrebepunkt.

Idet trækarmringens trykflydespænding kaldes  $f_{yt}^*$ , indføres ud over (4.2)-(4.4) følgende mekaniske armeringsgrad

$$\phi_t^* = \frac{A_{ct} f_{yt}^*}{b h_t f_c} = \phi_t \frac{f_{yt}^*}{f_c} \quad (5.1)$$

I det følgende viser det sig endvidere hensigtsmæssigt at indføre størrelsen  $\gamma$  defineret ved

$$\gamma = \frac{h}{h_t} \quad (5.2)$$

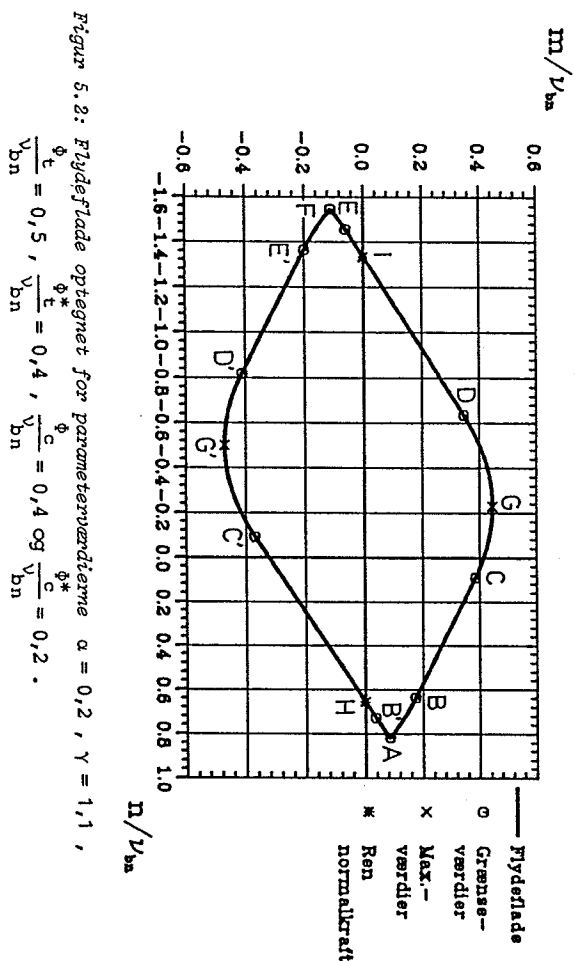
For bjælker med andre tværsnit og armeringsudformninger, henvises til afsnit 4.4, da de der anførte principper også gælder her.

### 5.2 BEREGNINGSUDTRYK

Da udledelsen af bæreevneudtrykkene foregår efter samme princip som anført i afsnit 4.2, er disse angivet direkte i tabel 5.1,

idet den dimensionsløse normalkraft, defineret ved  $n = \frac{N}{bh_f^c}$ , er indført. Det dimensionsløse bøjningsmoment  $m$  har samme værdi som i kapitel 4, det vil sige  $m = \frac{M}{bh_f^2 c}$ .

Formlerne i tabel 5.1 dækker det område af flydefladen, der ligger mellem punkterne svarende til at tværsnittet er fuldt udnyttet til flydning i henholdsvis træk og tryk. Bøjningsmomentet der svarer til dette område vil primært være positivt, det vil sige give tryk i oversiden. Den resterende del af flydefladen bestemmes ved hjælp af de samme formler, dog således at bjælkens overside nu defineres at være dens underside. Det bemærkes, at bøjningsmomenterne der hører til denne del af flydefladen, og bestemt efter ovenstående fremgangsmåde, af dimensionsmassige årsager skal multipliceres med  $-\left(\frac{h-h_c}{h_c}\right)^2$ . I figur 5.2 er en flydeflade vist.



Figur 5.2: Flydeflade optegnet for parameterværdierne  $\alpha = 0,2$ ,  $\gamma = 1,1$ ,  $\frac{\phi_t}{v_{bn}} = 0,5$ ,  $\frac{\phi_t^*}{v_{bn}} = 0,4$ ,  $\frac{\phi_c}{v_{bn}} = 0,4$  og  $\frac{\phi_c^*}{v_{bn}} = 0,2$ .

| tilfælde           | 1                                                                                                                            | 2                                                                                                                                    | 3                                                                                                                                           | 4                                                                                                                           | 5                                                                                                                                               |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| spændingsfordeling |                                                                                                                              |                                                                                                                                      |                                                                                                                                             |                                                                                                                             |                                                                                                                                                 |
| $y_o$              | $\frac{1}{v_{bn}} (\phi_t + \phi_c - \gamma n) h_c$                                                                          | $h_c$                                                                                                                                | $\frac{1}{v_{bn}} (\phi_t - \phi_c^* - \gamma n) h_t$                                                                                       | $h_t$                                                                                                                       | $-\frac{1}{v_{bn}} (\phi_t^* + \phi_c^* + \gamma n) h_t$                                                                                        |
| $m$                | $\phi_t + \alpha \phi_c - \frac{1}{2} \gamma^2 n$<br>$-\frac{1}{2v_{bn}} (\phi_t + \phi_c - \gamma n)^2$                     | $\frac{1}{2} \alpha^2 v_{bn} + (1-\alpha) \phi_t$<br>$-\gamma (\frac{1}{2} \gamma - \alpha) n$                                       | $\phi_t - \alpha \phi_c^* - \frac{1}{2} \gamma^2 n$<br>$-\frac{1}{2v_{bn}} (\phi_t - \phi_c^* - \gamma n)^2$                                | $\frac{1}{2} v_{bn} + (1-\alpha) \phi_c^*$<br>$+\gamma (1 - \frac{1}{2} \gamma) n$                                          | $-\phi_t^* - \alpha \phi_c^* - \frac{1}{2} \gamma^2 n$<br>$-\frac{1}{2v_{bn}} (\phi_t^* + \phi_c^* - \gamma n)^2$                               |
| gyldighedsområde   | $0 \leq y_o \leq h_c$<br>$\frac{1}{\gamma} (\phi_t + \phi_c - \alpha v_{bn}) \leq n \leq \frac{1}{\gamma} (\phi_t + \phi_c)$ | $y_o = h_c$<br>$\frac{1}{\gamma} (\phi_t - \phi_c^* - \alpha v_{bn}) \leq n \leq \frac{1}{\gamma} (\phi_t + \phi_c - \alpha v_{bn})$ | $h_c \leq y_o \leq h_t$<br>$\frac{1}{\gamma} (\phi_t - \phi_c^* - v_{bn}) \leq n \leq \frac{1}{\gamma} (\phi_t - \phi_c^* - \alpha v_{bn})$ | $y_o = h_t$<br>$-\frac{1}{\gamma} (\phi_t^* + \phi_c^* + v_{bn}) \leq n \leq \frac{1}{\gamma} (\phi_t - \phi_c^* - v_{bn})$ | $h_t \leq y_o \leq h$<br>$-\frac{1}{\gamma} (\phi_t^* + \phi_c^* + \gamma v_{bn}) \leq n \leq -\frac{1}{\gamma} (\phi_t^* + \phi_c^* + v_{bn})$ |

Tabel 5.1: Beregningsudtryk til bestemmelse af en rektangulær bjælkes bæreevne ved kombineret bøjning og normalkraft.

Punkterne A-F, indtegnet på flydefladen i figur 5.2, svarer til grænseværdierne for tilfældene angivet i tabel 5.1. Det største moment bjælken kan optage er bestemt ved punktet G, mens punkterne I og H angiver bjælkens bærevner for ren normalkraft. De med mærke angivne punkter har en analog betydning til de uden mærke anførte punkter. Ovenfor nævnte punkter, hvis værdier er givet i tabel 5.2, kan anvendes til en linearisering af flydefladen. Bestemmes bjælkens bæreevneudtryk via en brudmekanisme af samme type som den i figur 4.5 viste, fås en løsning identisk med den i tabel 5.1 anførte. Det bemærkes, at for ren normalkraft, det vil sige rotationspunktet O i figur 4.5 bevæger sig mod uendelig, svarer brudmekanismen til den i figur 2.7 viste. Den angivne løsning er således en eksakt plastisk løsning. Ovennævnte løsning forudsætter, at M og N ikke varierer med x. Varierer eksempelvis N med x, skal der i overensstemmelse med ligevægtsbetingelsen (2.5) tages hensyn til, at der optræder forskydningspændinger, hvilket betyder, at den aktuelle spændingsfordeling ikke er statisk tilladelig. Se nærmere herom i afsnit 10.1.

| pkt. nr. | n                                                                                                                             | m                                                                                                  |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A        | $\frac{1}{Y}(\phi_t + \phi_c)$                                                                                                | $(1 - \frac{1}{2}Y)\phi_t + (\alpha - \frac{1}{2}Y)\phi_c$                                         |
| B (B')   | $\frac{1}{Y}(\phi_t + \phi_c - \alpha v_{bn})$                                                                                | $(1 - \frac{1}{2}Y)\phi_t + (\alpha - \frac{1}{2}Y)\phi_c + \frac{1}{2}\alpha(Y - \alpha)v_{bn}$   |
| C (C')   | $\frac{1}{Y}(\phi_t - \phi_c^* - \alpha v_{bn})$                                                                              | $(1 - \frac{1}{2}Y)\phi_t - (\alpha - \frac{1}{2}Y)\phi_c^* + \frac{1}{2}\alpha(Y - \alpha)v_{bn}$ |
| D (D')   | $\frac{1}{Y}(\phi_t - \phi_c^* - v_{bn})$                                                                                     | $(1 - \frac{1}{2}Y)\phi_t - (\alpha - \frac{1}{2}Y)\phi_c^* + \frac{1}{2}(Y - 1)v_{bn}$            |
| E (E')   | $-\frac{1}{Y}(\phi_t^* + \phi_c^* + v_{bn})$                                                                                  | $-(1 - \frac{1}{2}Y)\phi_t^* - (\alpha - \frac{1}{2}Y)\phi_c^* + \frac{1}{2}(Y - 1)v_{bn}$         |
| F        | $-\frac{1}{Y}(\phi_t^* + \phi_c^* + Yv_{bn})$                                                                                 | $-(1 - \frac{1}{2}Y)\phi_t^* - (\alpha - \frac{1}{2}Y)\phi_c^*$                                    |
| G (G')   | $\frac{1}{Y}(\phi_t - \phi_c^* - \frac{1}{2}Yv_{bn})$                                                                         | $(1 - \frac{1}{2}Y)\phi_t - (\alpha - \frac{1}{2}Y)\phi_c^* + \frac{1}{8}Y^2 v_{bn}$               |
| H (*)    | $\frac{(1-\alpha)}{Y} \min \left( \frac{\phi_c}{(1-\frac{1}{2}Y)}, \frac{\phi_t}{(\frac{1}{2}Y-\alpha)} \right)$              | 0                                                                                                  |
| I (*)    | $v_{bn} + \frac{(1-\alpha)}{Y} \min \left( \frac{\phi_c^*}{(1-\frac{1}{2}Y)}, \frac{\phi_t^*}{(\frac{1}{2}Y-\alpha)} \right)$ | 0                                                                                                  |

\* forudsætter  $Y < 2$  og  $\alpha < \frac{1}{2}Y$ . Er eksempelvis  $Y = 2$  og/eller  $\alpha = \frac{1}{2}Y$ , er hele armeringen, eller dele heraf, placeret i tyngdepunktet. I dette tilfælde kan kun armeringen i tyngdepunktet regnes aktiv. For alle andre værdier af  $\alpha$  og  $Y$  giver armeringen ingen bidrag.

Tabel 5.2: Punkter til bestemmelse af en lineariseret n-m flydeflade.

### 5.3 EFFEKTIVITETSFAKTOREN

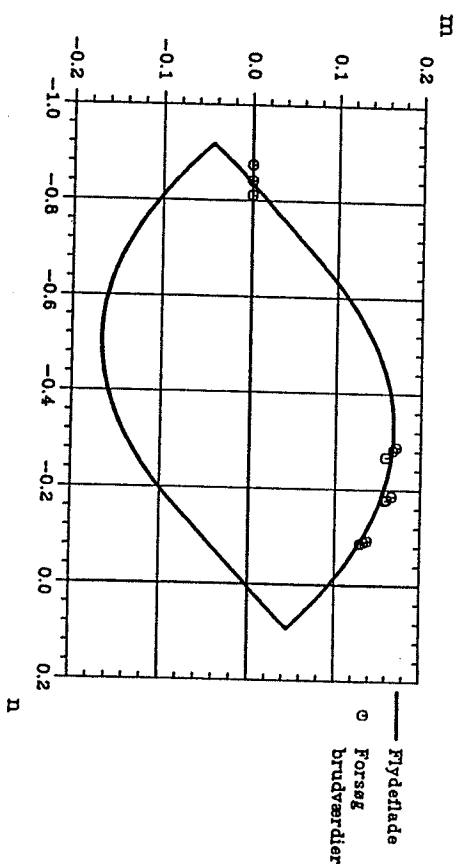
Betragtes alene den del af flydefladen for hvilken nullinien ligger indenfor tværsnittet og bøjningsmomentet er positiv, ses spændingstilstanden at svare til den der gælder for ren bøjning. Opfattes normalkraften som en fiktiv armeringsgrad, kan kurverne for effektivitetsfaktoren angivet i figur 4.8 også regnes at gælde i dette tilfælde, idet dog  $\varphi_t$  som en tilnærmelse erstattes af  $\varphi^* = \varphi_t \left(1 - \frac{\gamma n}{\varphi_t}\right) - \varphi_c \frac{f_{yc}^*}{f_{yt}}$ . Anvendes det simple tilnærmelsesudtryk (4.11) for  $\gamma n$ , har en sammenligning med forsøg vist, at overensstemmelsen er endog særdeles god, se figurerne 5.3-5.5 samt M.P. Nielsen et al. [83.2]. Det bemærkes, at de samme forhold naturligtvis gælder for den tilsvarende del af flydefladen hvor  $m_p$  er negativ, dog med den undtagelse, at der for  $f_{yt}$  i (4.11) anvendes  $f_{yc}$ .

Er bjælken påvirket alene af en tryknormalkraft, og ses der bort fra armeringen, er bjælakens bæreevne  $n = \gamma n$ . Værdien af  $\gamma n$  afhænger af bjælakens længde/breddeforhold, idet den såkaldte  $h/d$ -effekt gør sig gældende, se nærmere herom i afsnit 2.2.2. Til bestemmelse af  $\gamma n$  kan, som en tilnærmelse, kurven vist i figur 2.17 anvendes.

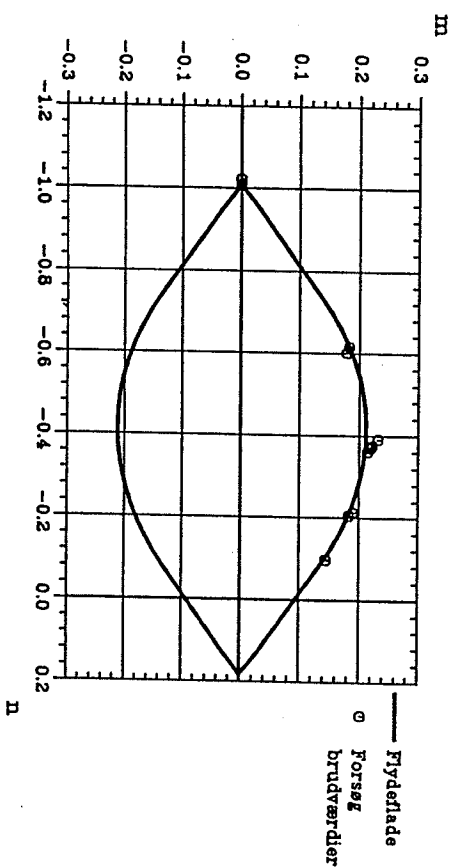
For at opnå en kontinuert flydeflade kræves en variation i  $\gamma n$  for de afsnit af flydefladen der forbinder ovenstående dele af flydefladen. For  $n$  gående mod punktet A, se figur 5.2, er der ingen problemer, da  $m$  i punkt A er uafhængig af  $\gamma n$ . Som en tilnærmelse kan der i området omkring punktet der svarer til ren tryknormalkraft, anvendes en værdi for  $\gamma n$  der er en lineær funktion af  $\gamma n$ ,  $\gamma n(f_{yt})$  og  $\gamma n(f_{yc})$ , således at  $\gamma n$  for punkterne D, I og E i figur 5.2 netop er  $\gamma n(f_{yt})$ ,  $\gamma n$  og  $\gamma n(f_{yc})$ . Det bemærkes, at ikke i alle tilfælde kan der regnes med punktfordelingen vist i figur 5.2. Som et generelt princip anvendes de to punkter over og under  $n$ -aksen, der ligger nærmest punkt A ved en linearisering af  $\gamma n$ .

I figurerne 5.3-5.5 er forsøg af C. Bach et al. [14.1] sammenlignet med den teoretiske bæreevne. Alle bjælkerne havde et længde/breddeforhold på cirka 6. For  $\gamma n$  er for hele flydefladen anvendt  $\gamma n = \gamma n$ , hvor  $\gamma n$  er bestemt ved (4.11), da  $\gamma n$  bestemt efter

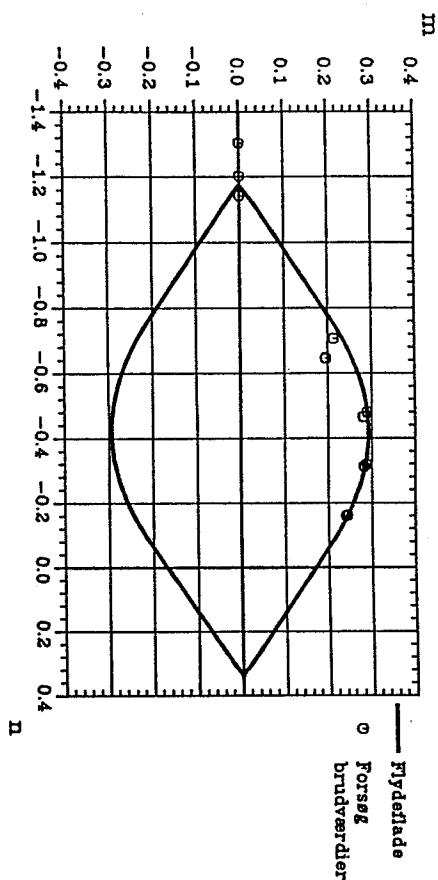
figur 2.17 er af samme størrelsesorden som  $\gamma n$ . Billeder af bjælkerne viser iøvrigt, at bruddene stemmer overens med de her angivne brudmekanismer.



Figur 5.3: Sammenligning for parameterværdierne  $\varphi_t = 0,0993$ ,  $\varphi_t^* = 0,0969$ ,  $\varphi_c = \varphi_c^* = 0$ ,  $\gamma n = 0,83$ ,  $\alpha = 0$  og  $\gamma = 1,09$ .



Figur 5.4: Sammenligning for parameterværdierne  $\varphi_t = \varphi_c = 0,0993$ ,  $\varphi_t^* = \varphi_c^* = 0,0969$ ,  $\gamma n = 0,83$ ,  $\alpha = 0,09$  og  $\gamma = 1,09$ .



Figur 5.5: Sammenligning for parameterverdierne  $\phi_t = \phi_c = 0,1843$ ,  $\phi_t^* = \phi_c^* = 0,1884$ ,  $\nu_{bn} = 0,83$ ,  $\alpha = 0,10$  og  $\gamma = 1,10$ .

## 5.4 ARMERINGSBESTEMMELSE

For bjælker påvirket til bøjning med normalkraft, kan den nødvendige armering bestemmes efter samme princip som anført i afsnit 4.5.

For bjælker med rektangulært tværsnit, uden trykarmering, er beregningsproceduren, idet bøjningsmomentet regnes positivt:

Trykzonehøjden  $Y_o$  bestemmes af, idet  $N$  regnes positiv som træk

$$Y_o = h_t - \sqrt{h_t^2 - \frac{2M - N(2h_t - h)}{\nu_{bn} f_c b}} \quad (5.3)$$

Giver dette udtryk en værdi for  $Y_o$  der opfylder betingelsen  $0 \leq Y_o \leq h_t$ , kan den nødvendige armering bestemmes af

$$A_{st} = \frac{\nu_{bn} f_c b Y_o + N}{f_{yt}} \quad (5.4)$$

Fås en negativ værdi under kvadratroden i (5.3), sættes  $Y_o = h_t$ , og armeringen bestemmes af (5.4). Hvis  $A_{st}$  bliver negativ for

$Y_o = h_t$ , er der ikke behov for nogen armering, og det skal checkes, at den aktuelle belastning ikke fører til trykbrud i betonen, det vil sige følgende krav skal være opfyldt

$$N \geq -\nu_{bn} f_c b h \quad (5.5)$$

$$M \leq -\frac{1}{2} b \nu_{bn} \frac{N}{f_c} (b h \nu_{bn} f_c + N) \quad (5.6)$$

Findes  $Y_o$  bestemt ved (5.3) at give en negativ værdi, skal der indlægges en armering både i bjælkens over- og underside. Denne er bestemt ved

$$A_{sc} = \frac{N(h_t - \frac{1}{2}h) - M}{f_{yc}(h_t - h_c)} \quad (5.7)$$

$$A_{st} = \frac{N(\frac{1}{2}h - h_c) + M}{f_{yt}(h_t - h_c)} \quad (5.8)$$

Ovenstående fremgangsmåde kan også benyttes for bjælker med vilkårligt tværsnit.

# 6

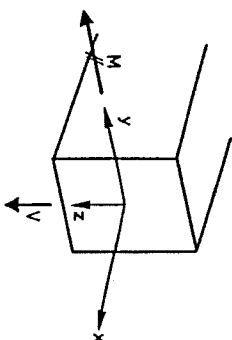
## FORSKYDNING.

Anvendelse af den ideal-plastiske model til beregning af forskydningspåvirkede jernbetonbjælkers bæreevne er behandlet i flere referencer. For en grundlæggende beskrivelse henvises til M.P. Nielsen et al. [78.1], mens der for en mere praktisk orienteret fremstilling henvises til M.P. Nielsen et al. [80.1].

Ovennævnte referencer beskæftiger sig primært med de i praksis hyppigst forekommende belastningsstilfælde. I dette kapitel vil den plasticitetsteoretiske model blive søgt givet en mere almen beskrivelse således, at den også dækker mere specielle problemstillinger.

### 6.1 BJÆLKEBESKRIVELSE

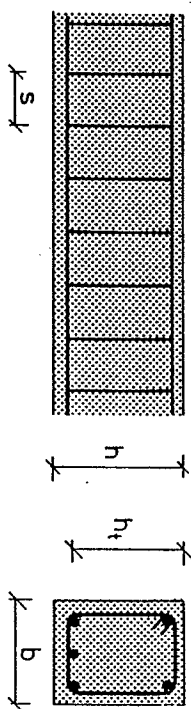
I en vandret jernbetonbjælke med massivt, rektangulært tværsnit indlægges et retvinklet (x,y,z)-koordinatsystem med x-aksen i bjælkens længderetning sammenfaldende med bjælkens tyngdepunktslinje, se figur 6.1.



Figur 6.1: Bjælkebeskrivelse.

I det følgende betragtes et bjælkestykke, som er påvirket af en konstant forskydningskraft  $V$ , og det hertil hørende bøjningsmoment  $M$ . Da bæreevneudtrykkene, som findes i afsnit 6.2, er invariante overfor fortegnet af  $V$ , vil kun positive værdier af  $V$  blive betragtet, se figur 6.1.

Bjælkestykkets geometriske data fremgår af figur 6.2.



Figur 6.2: Bjælkens geometriske data.

Armeringen regnes at bestå af lodrette 2-snitbøjler med den indbyrdes afstand  $s$ , samt langedarmering placeret i bjælketværssnittets over- og underside. Langedarmeringen antages uafkortet, det vil sige uafhængig af  $x$ .

Bøjlejernenes areal og flydespænding betegnes med henholdsvis  $A_b$  og  $f_{yb}$ . Langedjernenes data er i overensstemmelse med afsnit 4.1.

Betonens ideal-plastiske trykstyrke med hensyn til forskydning betegnes  $v_s f_c$ .

Bjælkens mekaniske bøjlearmeringsgrad  $\psi$  regnes bestemt ved

$$\psi = \frac{2A_b f_{yb}}{b s f_c} = \frac{2A_{bl} f_{yb}}{b f_c} \quad (6.1)$$

Det bemærkes, at er der tale om n-snitbøjler, erstattes 2-tallet blot med  $n$ . Bjælkens mekaniske langedarmeringsgrad har værdien

$$\phi_s = \frac{A_{sl} f_{yt}}{b h_l f_c} \quad (6.2)$$

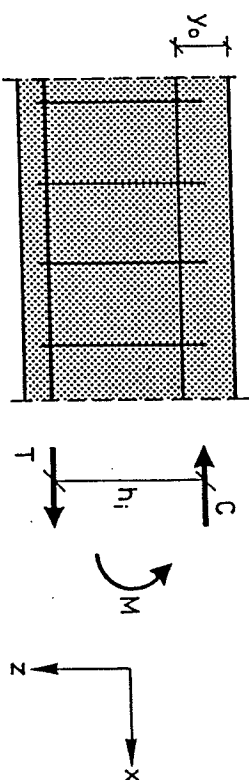
hvor  $h_1$  er bjælkens indre momentarm.

Bjælker med andre tværsnit og armeringsudformninger, herunder forskrydningskræfter der varierer med længdekoordinaten  $x$ , vil blive behandlet nærmere i afsnit 6.5.

## 6.2 STATISK TILLADELIG SPÆNDINGSFORDELING

### 6.2.1 Spændingsfordelingen i en stringerbjælke

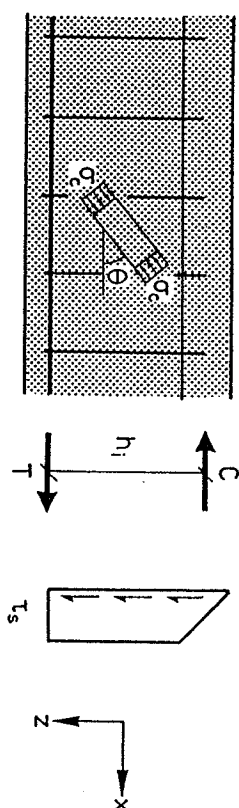
Bjælken antages at være en stringerbjælke, det vil sige normalspændingerne efter længdeaksen regnes koncentreret i stringere med den indbyrdes afstand  $h_1$ , som vist i figur 6.3.



Figur 6.3: Stringerbjælke.

En forudsætning for at bjælken kan opfattes som en stringerbjælke er, at  $Y_0 < \mu h_1$ , hvor  $\mu$  er en faktor, hvis værdi er  $\mu \ll 1$ . I afsnit 6.2.3 vil blive skitseret en løsningsmodel for det tilfælde, hvor betingelsen  $Y_0 < \mu h_1$  ikke er opfyldt. Hvilken numerisk værdi, der kan benyttes for  $\mu$ , vil blive vurderet i afsnit 6.4. Trykzonehøjden  $Y_0$ , og dermed  $h_1$ , regnes uafhængig af  $x$ . En sikker værdi for  $Y_0$  findes for det snit hvor  $C$  antager sin maksimale værdi.

Den statisk tilladelige spændingsfordeling vist i figur 6.4, jævnfør afsnit 3.3, regnes at gælde.



Figur 6.4: Statisk tilladelig spændingsfordeling.

Forskrydningsspændingen  $\tau_s$ , jævnfør figur 6.4, ses at være bestemt ved

$$\tau_s = \frac{V}{b h_1} \quad (6.3)$$

hvilket svarer til, at regne  $\tau_s$  konstant fordelt over arealet  $b h_1$ . Dette område vil blive benævnt bjælkens forskrydningszone. Det enaksede betontryk  $\sigma_c$ , som har hældningen  $\theta$  i forhold til længdeaksen, har følgende komponenter efter  $(x, z)$ -systemet.

$$\sigma_{cx} = -\sigma_c \cos^2 \theta \quad (6.4)$$

$$\sigma_{cz} = -\sigma_c \sin^2 \theta \quad (6.5)$$

$$\tau_{cxz} = \sigma_c \cos \theta \sin \theta \quad (6.6)$$

Intern forskrydningslignevægt i bjælken kræver

$$\tau_s = \tau_{cxz} = \sigma_c \cos \theta \sin \theta \quad (6.7)$$

Ved hjælp af ligningen (6.7) kan  $\sigma_c$  elimineres af ligningerne (6.4)-(6.5). Hermed fås

$$\sigma_{cx} = -\tau_s \cot \theta \quad (6.8)$$



$$\sigma_c = f_c \left[ \frac{1}{\psi} \left( \frac{t}{f_c} \right)^2 + \psi \right] \quad (6.17)$$

$$\tan \theta = \frac{\psi}{\left( \frac{t}{f_c} \right)} \quad (6.18)$$

Bjælkerne kan regnes normalarmerede så længe  $\sigma_c \leq \psi f_c$ , eller idet udtrykket (6.17) for  $\sigma_c$  anvendes

$$\left( \frac{t}{f_c} \right) \leq \sqrt{\psi (\psi - \psi)} \quad (6.19)$$

Er (6.19) ikke opfyldt er bjælken overarmet (OA), og  $\sigma_c = \psi f_c$ . Antages bøjlerne at flyde, men ikke trækstringeren, svarende til at bjælkerne er overarmet efter længderetningen (OAL), fås af (6.7) og (6.13) bæreevneudtrykket

$$\left( \frac{t}{f_c} \right) = \sqrt{\psi (\psi - \psi)} \quad (6.20)$$

Betontrykkets hældning med længdeaksen er i dette tilfælde

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{\psi}{\psi - \psi}} \quad (6.21)$$

Antages trækstringeren at flyde, men ikke bøjlerne, svarende til at bjælkerne er overarmet efter bøjleretningen (OAB), fås af (6.7) og (6.14) bæreevneudtrykket

$$\left( \frac{t}{f_c} \right)^2 = 2 (\phi_s - m_s) [\psi_s - 2 (\phi_s - m_s)] \quad (6.22)$$

Betontrykkets vinkel med længdeaksen er i dette tilfælde bestemt ved

$$\tan \theta = \frac{\left( \frac{t}{f_c} \right)}{2 (\phi_s - m_s)} \quad (6.23)$$

Har hverken bøjler eller trækstringer opnået flydning ved brud er bjælkerne totalt overarmet (OAT) og betontrykkets hældning med længdeaksen er  $\theta = 45^\circ$ . Af (6.7) fås bæreevnen således at være bestemt ved

$$\left( \frac{t}{f_c} \right) = \frac{1}{2} \psi_s \quad (6.24)$$

Ved hjælp af (6.7) og (6.13)-(6.14) ses det, at (6.24) kan regnes at gælde hvis (6.19) ikke er opfyldt og

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi > \frac{1}{2} \psi_s \\ m_s < \phi_s - \frac{1}{4} \psi_s \end{array} \right\} \quad (6.25)$$

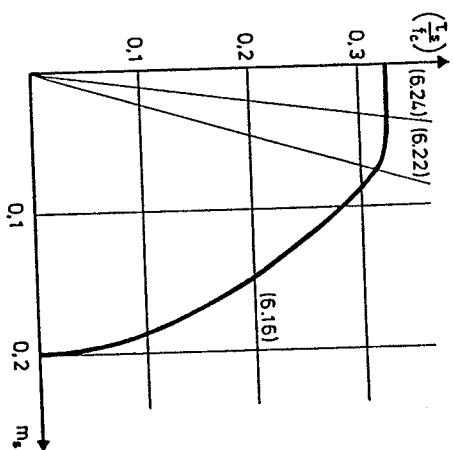
er opfyldt. Heraf følger det umiddelbart, at (6.20) gælder når (6.19) ikke er opfyldt og

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi < \frac{1}{2} \psi_s \\ m_s < \phi_s - \frac{1}{4} \psi_s \end{array} \right\} \quad (6.26)$$

mens (6.22) gælder hvis (6.19) ikke er opfyldt og

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi > \frac{1}{2} \psi_s \\ m_s \geq \phi_s - \frac{1}{4} \psi_s \end{array} \right\} \quad (6.27)$$

En flydeflade bestemt efter ovenstående beregningsudtryk er vist i figur 6.6.



Figur 6.6: Flydeflade optegnet for parameterverdierne  $\psi = 0,4$ ,  $\phi_s = 0,2$ ,  $v_s = 0,65$  og  $v_b = 0,80$ .

### 6.2.3 Generel spændingsfordeling

En forudsætning for anvendelse af bæreevneudtrykkene i afsnit 6.2.2 er som nævnt, at trykstringeren har den forordnede styrke.

Idet forskydningsspændingerne, der optræder i trykzonen, antages at have en neglignibel indflydelse på trykstringerens styrke, vil den maksimale trykkraft, stringeren kan optage, idet der ses bort fra trykarmeringen, være bestemt ved  $v_b f_c \mu h_t b$ . Af (6.11) fås det således, at hvis de efter afsnit 6.2.2 bestemte værdier af  $m_s$ ,  $(\frac{T_s}{f_c})$  og  $\theta$  opfylder betingelsen

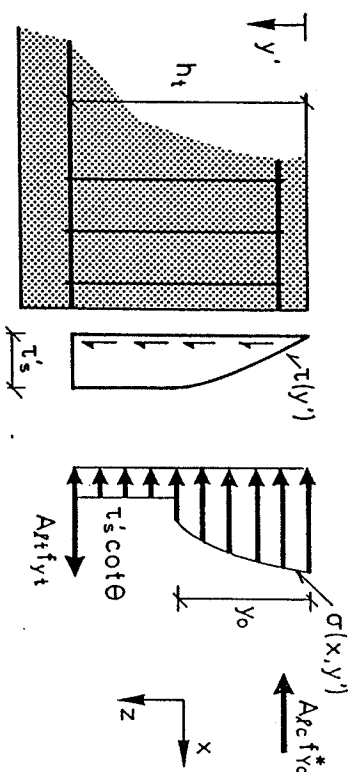
$$\frac{A_{sc} f_{yc}}{b h_t f_c} > \frac{1}{2} \left( \frac{T_s}{f_c} \right) \cot \theta - m_s > - \left( \frac{\mu}{(1 - \frac{1}{2} \mu)} v_b + \frac{A_{sc} f_{yc}^*}{b h_t f_c} \right) \quad (6.28)$$

er løsningen statisk tilladelig og sikker.

Er uligheden til venstre i (6.28) ikke opfyldt, hvilket betyder, at trykstringeren ikke har den forordnede styrke med hensyn til træk, vil bjælkens bæreevne være styret af trykstringerens trækflydekraft. En nedreværdi kan i dette tilfælde på simpel vis findes ved i de styrende ligninger i afsnit 6.2.2, at erstatte betingelsen om flydning i trækstringeren med en betingelse om flydning i trykstringeren. Udtrykkene, der hører til specialtilfældet ren forskydning, er angivet i afsnit 9.2.2.

Er uligheden til højre i (6.28) ikke opfyldt, kan bjælken ikke forudsættes at være en stringerbjælke, og en anden beregningsmodel må tages i anvendelse. Her skal ikke foretages en detaljeret beskrivelse af en sådan beregningsmodel, kun vil de overordnede forhold vedrørende en sådan blive berørt.

Den statisk tilladelige spændingstilstand vist i figur 6.7 betragtes.



Figur 6.7: Tilladelig spændingsfordeling.

På grund af trykzonens relative store højde, kan forskydnings-spændingerne indflydelse på normalspændingskapaciteten ikke regnes neglignibel. Betonen i trykzonen kan således ikke fuldt ud regnes at optage en normalspænding på  $v_b f_c$ .

Hvor stor en normalspænding, der kan optages i et område, hvori der optræder forskydningsspændinger, er detaljeret beskrevet i

afsnit 3.3.4. For en i trykzonen given  $\tau(y')$ -fordeling kan normalspændingskapaciteten udtrykkes ved

$$\sigma_x(y') = \rho(y') v_b f_c = \frac{1}{2} (v_b f_c + \sqrt{(v_b f_c)^2 - 4\tau(y')^2}) \quad (6.29)$$

Idet  $v_b$  er effektivitetsfaktoren, der hører til trykzonen.

I overensstemmelse med formel (6.12) kan trykzonens normalspændingsfordeling skrives på formen  $\sigma(x, y')$ . Trykzonehøjden  $y_0$ , som regnes uafhængig af  $x$ , bestemmes for tværsnittet med det maksimale bøjningsmoment. Regnes dette maksimale moment at optræde for  $x = a$ , gælder det således at  $\sigma(a, y') = \sigma_x(y')$ .

Tilladelige fordelinger af  $\sigma(x, y')$  og  $\tau(y')$ , der opfylder ovenstående, samtidigt med at ligevægtsbetingelsen, jævnfør (2.5),

$$\frac{\partial \sigma(x, y')}{\partial x} + \frac{\partial [\tau(y')]}{\partial y} = 0 \quad (6.30)$$

er opfyldt, vil kunne føre til en optimal spændingsfordeling.

Desværre leder ovennævnte metode til forholdsvis komplicerede spændingsfordelinger, som for praktisk anvendelse er uensigtsmæssige. Der er ikke indenfor rammerne af dette projekt gjort forsøg på at finde en simpel beregningsmodel, som samtidig er rimelig optimal.

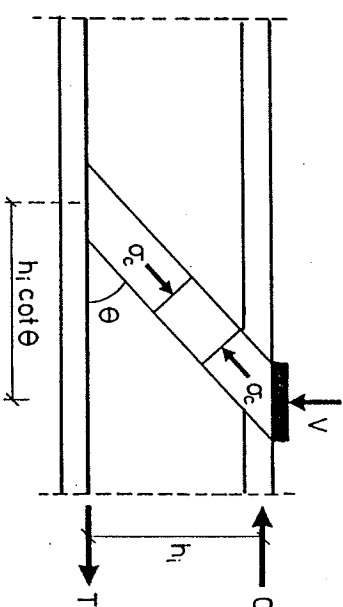
Ønskes til eksempel anvendt en forskydningspændingsfordeling, der er analog til den der optræder i stringerbjælkerne, kan dette på simpel vis gøres ved at sætte normalspændingskapaciteten til  $\rho_0 v_b f_c$ , hvor  $\rho_0$  er den reduktion, der fremkommer på grund af forskydningspændingerne, jævnfør formel (6.29). For en sikker spændingsfordeling, kan  $\rho_0$  bestemmes på basis af den maksimale forskydningspænding, det vil sige  $\tau_s$ . Den bæreevne, der herved opnås, vil dog være en forholdsvis konservativ løsning. Som en mere realistisk værdi for  $\rho_0$ , kan  $1/2 \tau_s$  formodentlig anvendes i formel (6.29).

## 6.2.4 Simplificering af bæreevneudtryk

Visnes forskydningskraften direkte ind i bjælkerne, som en jævnt fordelt forskydningspænding, hvilket til eksempel er tilfældet, hvor en bjælke er understøttet via en tværgående bjælkes endeflade,

skal bjælkerens bæreevne bestemmes for den farligste kombination af snitkræfterne, idet alle værdier af snitkræftkurverne betragtes. Fremkommer derimod forskydningskraften *indirekte*, hvilket er tilfældet, hvor belastningen optræder på bjælkerens overside, kan beregningsudtrykkene i afsnit 6.2.2 simplificeres.

Betragtes eksempelvis en bjælke påvirket af en enkeltkraft, som vist i figur 6.8, vil det enaksede betontryks vandrette komponent ikke fuldt ud være  $V \cot \theta$  i nærheden af enkeltkraften, hvilket reducerer krævene til langedarmeringen.



Figur 6.8: Forholdene ved en enkeltkraft.

En detaljeret analyse af spændingsforholdene i nærheden af enkeltkraften er foretaget i J.F. Jensen [81.2] og [78.5].

Til trods for at nedenfor angivne simplificerede bæreevnebestemmelser, ud fra en teoretisk analyse, viser sig at være på den usikre side, har en stor mængde af forsøgsresultater vist, at der i trækstringeren kan regnes med en maksimal påvirkning på  $\frac{M_{max}}{n_1}$ . Hermed fås kraften i trækstringeren at variere med  $x$ , som vist i figur 6.9. Principet vist i figur 6.9 kan udtrækkes til at gælde vilkårlige belastninger på bjælken overside.

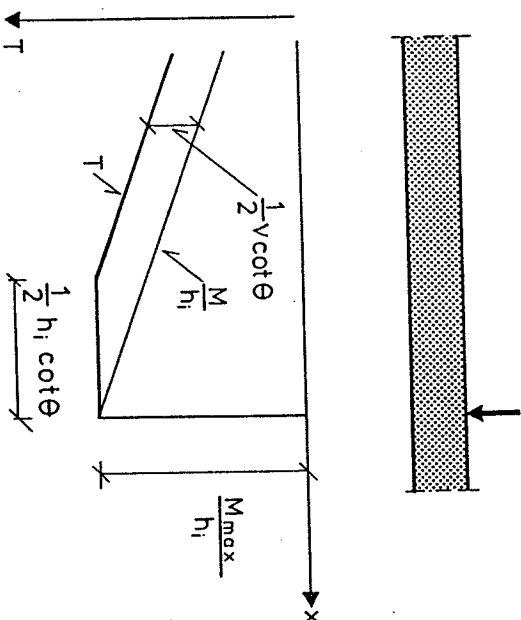
Bjælkerens bæreevne kan således, hvor belastningerne forekommer på bjælken overside, bestemmes som den mindste værdi af

$$\left(\frac{T}{F_c}\right) = \begin{cases} \sqrt{\psi(\psi_s - \psi)} & \text{for } \psi \leq \frac{1}{2}\psi_s \\ \frac{1}{2}\psi_s & \text{for } \psi > \frac{1}{2}\psi_s \end{cases} \quad (6.31)$$

og

$$m_s = \phi_s \quad (6.32)$$

For  $h_i$  benyttes den værdi, der hører til udtryk (6.32), det vil sige værdien der svarer til den rene bøjningsberegning. Er bærevnen bestemt af (6.31) kan  $h_i$  hæves ved benyttelse af det  $m_{\max}$ , der er knyttet til den aktuelle værdi af  $(T_s/F_c)$ , jævnfør formel (6.12). Speciel opmærksomhed henledes på, at optagelse af forskydningskraften kræver, at både træk- og trykstringeren har den fornødne styrke. Bemærk, at trykstringeren kan være trækpåvirket.



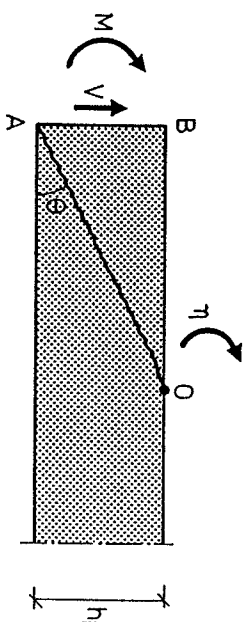
Figur 6.9: Regningsmæssig trækstringerkraft.

Bærevneudtrykket (6.31) er vist grafisk i figur 6.13 og 6.14. Under visse forhold kan det direkte tilfælde behandles analogt til det indirekte tilfælde, se nærmere herom i M.P. Nielsen et al. [80.1

### 6.3 GEOMETRISK MULIG BRUDFIGUR

I dette afsnit vil interessen kun knytte sig til stringerbjælkerne.

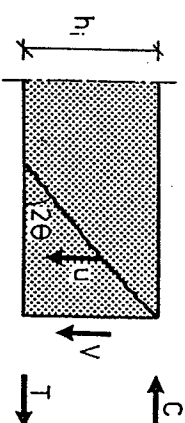
For den i figur 6.10 viste brudmekanisme gælder det, at legemet OAB regnes at rotere som et stift legeme omkring punktet O. Den resterende del af bjælken regnes at ligge fast. I snittet A-B er bjælken påvirket af snitkræfterne V og M.



Figur 6.10: Brudmekanisme for det normalarmerede tilfælde.

Anvendes arbejdsligningen på brudmekanismen vist i figur 6.10, og indsættes i den herved fremkomne ligning  $\theta$  bestemt ved (6.18), fås bærevneudtrykket (6.16).

I figur 6.11 er den brudmekanisme, der hører til bærevneudtrykket (6.20), vist. De to legemer adskilt af brudlinjen flytter sig ved en lodret translation i forhold til hinanden. For bærevneudtrykket (6.24), gælder samme brudmekanisme, blot er brudlinjen lodret.



Figur 6.11: Brudmekanismen for det tilfælde hvor længdearmeringen ikke regnes at flyde.

Desværre har det ikke indenfor rammerne af dette projekt været muligt at finde en brudmekanisme, der fører til bæreevneudtrykket (6.22).

Det kan hermed konkluderes, at er bjælkerne belastet ved deres overside, er den anførte løsning (6.31)-(6.32) en eksakt plastisk løsning.

Ovennævnte brudmekanisme forudsætter, at brudlinjerne kan dannes frit. Denne betingelse er ikke altid opfyldt, da bjælkerens randforhold kan influere på brudlinjeforløbet, og dermed føre til øvre-værdiløsninger der afviger fra nedreværdiløsningerne i afsnit 6.2. De i afsnit 6.2 angivne udtryk kan dog stadig anvendes, blot vil de føre til en bærevne, der er på den sikre side. Ønskes i disse tilfælde en mere præcis beregning, kan øvre- og nedreværdimetoden naturligvis anvendes for en mere detaljeret beskrivelse af de aktuelle forhold. Vedrørende dette emne henvises til M.P. Nielsen et al. [78.1], J.F. Jensen et al. [78.5] og Bent Feddersen [89.1].

#### 6.4 EFFEKTIVITETSFAKTOREN

Desværre er det ved forskydning ikke muligt at finde effektivitetsfaktorens værdi ad analytisk vej, som det var tilfældet ved ren bøjning, hvorfor  $v_s$  og  $v_{bs}$  kun kan fastlægges på basis af forsøg.

Der er udført en mængde forsøg med forskydningspåvirkede bjælker, hvoraf nogle er beskrevet i M.P. Nielsen et al. [78.1]. Disse forsøg omfatter dog kun bjælker, hvor trykzonehøjden var lille, hvorfor de udelukkende kan anvendes til at belyse forholdene vedrørende  $v_s$ . Alle forsøgsbjælkerne blev belastet ved deres overside.

Som det fremgår af afsnit 2.4.3 er effektivitetsfaktoren en funktion af spændingsfeltets randforhold. I overensstemmelse hermed fås det umiddelbart, for en armeringsudformning som den i figur 2.41 viste, at  $v_s$  er en funktion af bjælkenes effektive bredde  $b_e$ , jævnfør afsnit 7.1, længdejernenes antal og diameter, samt tykkelsen af dæklaget  $c$ . Udover ovenstående parametre er værdien af  $v_s$  naturligvis også afhængig af betonsens trykstyrke  $f_c$ , jævnfør af-

snit 2.2.3.

I tabel 6.1 er resultatet af de i ovennævnte reference anførte forsøg vist. Alle bjælkerne var T-bjælker, med en flangebredde på 800 mm og en flangehøjde på 90 mm. Bjælkerens totalhøjde var 400 mm. Ved den forsøgsmæssige bestemmelse af  $v_s$  er der for  $h_1$  benyttet den værdi, der hører til  $M_{max}$ , jævnfør figur 6.9.

| Se-<br>rle<br>ud-<br>form. | Arm.<br>form.                                                                        | $f_c$<br>MPa | $d_x$<br>mm | $b$<br>mm | $c$<br>mm | antal<br>forsøg | Effektivitetsfaktoren |                  |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------|-----------|-----------|-----------------|-----------------------|------------------|
|                            |                                                                                      |              |             |           |           |                 | $v_s$<br>gennemsnit   | variationskoeff. |
| T                          |  | 11,1         | 16          | 200       | 24        | 36              | 0,74                  | 7,4              |
| Tm                         |  | 11,2         | 16          | 200       | 12        | 4               | 0,79                  | 5,4              |
| Td                         |  | 10,4         | 16          | 200       | 24        | 4               | 0,69                  | 10,6             |
| V                          |  | 36,0         | 25          | 200       | 24        | 4               | 0,63                  | 1,2              |
| U                          |  | 18,7         | 25          | 200       | 24        | 10              | 0,70                  | 3,6              |
| Uc                         |  | 17,2         | 25          | 200       | 50        | 13              | 0,58                  | 7,0              |
| Uh                         |  | 17,9         | 25          | 200       | 50        | 5               | 0,59                  | 9,6              |
| Um                         |  | 15,8         | 35          | 200       | 12        | 8               | 0,69                  | 6,2              |
| X                          |  | 8,4          | 12          | 200       | 24        | 4               | 0,80                  | 10,0             |
| Xd                         |  | 8,4          | 12          | 200       | 24        | 4               | 0,78                  | 6,2              |
| B                          |  | 10,4         | 16          | 380       | 24        | 4               | 0,72                  | 6,4              |
| Bd                         |  | 10,4         | 16          | 380       | 24        | 3               | 0,86                  | 5,0              |
| S                          |  | 9,2          | 12          | 380       | 24        | 3               | 0,72                  |                  |

Tabel 6.1: Forsøgsresultater til belysning af værdien af  $v_s$ . ( $f_c$  er middelværdien for bjælkerne i den enkelte forsøgsserie).

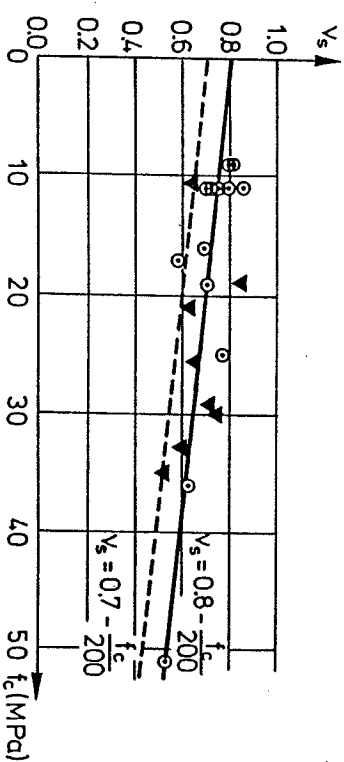
M.P. Nielsen et al. [78.1] har, ud fra forsøgene i tabel 6.1, fundet følgende empiriske udtryk for  $v_s$

$$v_s = 1,11(0,8 - \frac{f_c}{200})(1,0 - 1,2 \frac{c}{b}) \quad (6.33)$$

Længdejernenes diameter samt antal viste sig ikke at have nogen signifikant indflydelse på  $v_s$ , hvorfor de er udeladt.

Ved suppleret med forsøg udført af andre, viste det sig, at  $c$  og  $b$ 's indflydelse på  $v_s$  var negligerbar, således at  $v_s$  kan regnes bestemt ved følgende simple udtryk, jævnfør figur 6.12

$$v_s = 0,8 - \frac{f_c}{200} \quad , \quad f_c < 60 \text{ MPa} \quad (6.34)$$



Figur 6.12: Effektivitetsfaktoren som funktion af betonstyrken  $f_c$ .

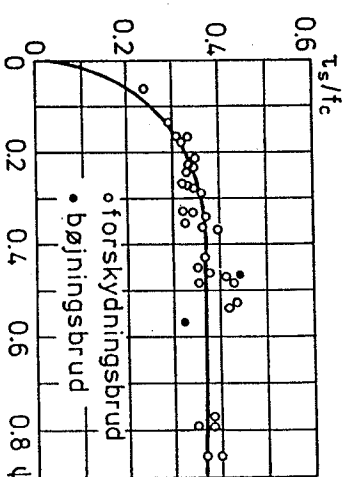
For bjælker med 2-snitbøjler og et stort  $b/h$ -forhold, samt for bjælker med store dæklag, skal formel (6.34) bruges med forsigtighed, hvis de normale beregningsudtryk benyttes.

Et enkelt forsøg med en bjælke, hvor der ikke var placeret længdejern i tværsnittets hjørner, men alene i bjælkebreddens midte, gav ikke nogen reducerende effekt på  $v_s$ .

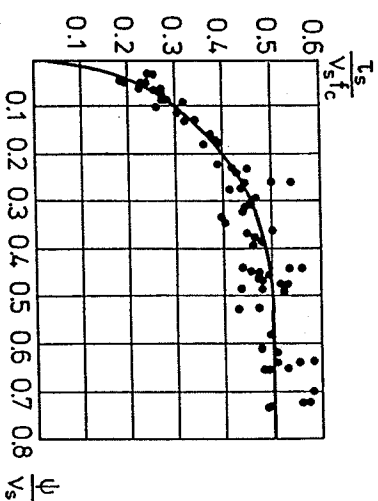
Generelt kan det dog konkluderes, at desto finere fordelt bøjle- og længdearmeringen er over henholdsvis bjælakens længde og bredde, desto mere homogen vil spændingstilstanden være, og dermed virke til gunst for  $v_s$ .

Trykzonehøjden  $y_o$  ved  $M_{max}$ , for de i tabel 6.1 viste forsøgsbjælker, svarede stort set til højden af flangerne. Dette betyder, at stringemetoden indtil videre, kun bør benyttes for bjælker, der opfylder kravet  $y_o \leq h/4$ , hvor  $h$  kan sættes til 0,3.

I figur 6.13 og 6.14 er den plasticitetsteoretiske løsning, i form af udtrykket (6.31), vist sammen med forsøgsresultater.



Figur 6.13: Forsøg med overarmerede bjælker ( $v_s = 0,74$  er anvendt).



Figur 6.14: Teori sammenlignet med forsøg. ( $v_s$  bestemt ved (6.34) er benyttet).

Da der ikke er fundet nogen spændingsfordeling for det generelle spændingstilfælde, jævnfør afsnit 6.2.3, har det i sigens natur ikke været muligt at vurdere størrelsesordenen af  $v_{bs}$ . Som det fremgår af formel (6.29), vil  $\sigma_x + v_{bs} f_c$  for  $\tau + 0$ . Da  $\sigma_x = v_b f_c$  for ren bøjning, vil det således gælde, at  $v_{bs} + v_b$  for  $\tau + 0$ . Da betontrykkets hældning i trykzonen vil være mindre, end det der optræder i det tilsvarende rene forskydningstilfælde, vil  $v_s$  formentlig udgøre en nedre grænse for  $v_{bs}$ . Bemærk, i overensstemmelse med bemærkningerne i afsnit 2.4.3, at randforholdene har en afgørende indflydelse på effektivitetsfaktoren, og dermed naturligvis også størrelsen af det enaksede betontryks komponent vinkelret på randen.

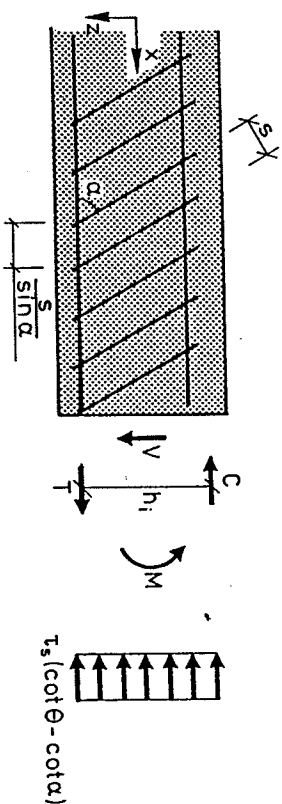
## 6.5 ANDRE TVÆRSNIT OG ARMERINGSUDFORMNINGER

I dette afsnit vil der blive givet en summarisk oversigt over de specielle forhold, der skal tages i betragtning når beregningsmodellen, beskrevet i de tidligere afsnit, udstrækkes til bjælker med en anden armeringsudformning, belastning og tværsnit.

### 6.5.1 Armeringen generelt

For de forskellige armeringsudformninger, der vil blive gennemgået i dette afsnit, gælder det, med mindre andet er anført, at  $v_s$  kan regnes bestemt ved enten (6.33) eller (6.34).

Hypptigt anvendes som tværarmering skrå bøjler, som vist i figur 6.15.



Figur 6.15: Anvendelse af skrå bøjler som tværarmering.

Med betegnelserne i figur 6.15, jævnfør afsnit 3.6, fås af kravet om ligevægt efter z-aksen, idet bøjlerne regnes at flyde

$$\sigma_c \sin^2 \theta = \psi f_c \sin^2 \alpha \quad (6.35)$$

Forskydningsligevægt fører til ligningen

$$\tau_s = \sigma_c \cos \theta \sin \theta + \psi f_c \cos \alpha \sin \alpha \quad (6.36)$$

mens stringerkræfterne er bestemt ved

$$\tau = \frac{M}{h_1} + \frac{1}{2} V (\cot \theta - \cot \alpha) \quad (6.37)$$

$$C = \frac{M}{h_1} - \frac{1}{2} V (\cot \theta - \cot \alpha) \quad (6.38)$$

Regnes længdearmeringen at flyde, fås følgende ligevægtsligning

$$\phi_s = m_s + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau_s}{f_c} \right) (\cot \theta - \cot \alpha) \quad (6.39)$$

Ved nu at benytte samme fremgangsmåde som i afsnit 6.2.2 kan en fuldstændig løsning opstilles. Dette vil ikke blive gjort her, kun skal de barerevneudtryk, der hører til det indirekte tilfælde, jævnfør formel (6.31), anføres. Barerevnen er i dette tilfælde bestemt ved

$$\left( \frac{\tau_s}{f_c} \right) = \begin{cases} \sqrt{\psi \sin^2 \alpha (v_s - \psi \sin^2 \alpha) + \psi \cos \alpha \sin \alpha} & \text{for } \psi \leq \frac{\frac{1}{2} v_s (1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} \\ \frac{1}{2} v_s \cot \alpha & \text{for } \psi > \frac{\frac{1}{2} v_s (1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} \end{cases} \quad (6.40)$$

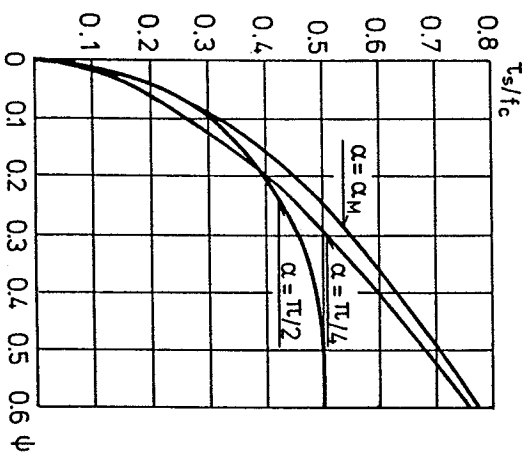
Idet (6.32) naturligvis stadig gælder. Betontrykkets hældning er for ovenstående to tilfælde

$$\tan \theta = \frac{\psi \sin^2 \alpha}{v_s - \psi \sin^2 \alpha} \quad (6.41)$$

$$\tan \theta = \cot \frac{\alpha}{2} \quad (6.42)$$

Det understreges, at ovenstående udtryk kun gælder for positive værdier af forskydningskraften.

I figur 6.16 er bæreevnekurver, der hører til udtrykket (6.40), indtegnet for forskellige værdier af  $\alpha$ . Kurven der hører til  $\alpha_M$ , er den der for en given  $\psi$ -værdi, fører til den optimale bæreevne. Værdien af  $\alpha_M$  er bestemt ved  $\cot \alpha_M = \sqrt{\psi}$ .



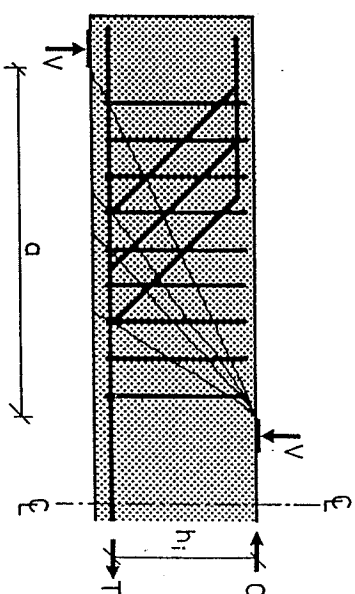
Figur 6.16: Forskydningsbæreevnen som funktion af  $\psi$  og bøjlearmringens hældning  $\alpha$ .

Bæreevneudtrykket (6.40) kan eftervises at være en eksakt løsning. Brudmekanismen svarer for det øverste udtryk vedkommende til den i figur 6.11 viste.

For bjælker hvori der optræder opbøjet spændarmering, kan denne regnes at optage en forskydningskraft, der svarer til den lodrette

komponent af flydekraften, det vil sige  $A_{\text{sp}} f_{\text{yp}} \sin \gamma$ , hvor  $\gamma$  betegner spændarmeringens hældning med længdeaksen. Bemærk, at på grund af spændarmeringens opbøjning, varierer længdearmringens flydekraft med længdekoordinaten  $x$ , således at teorien i afsnit 6.2.2 skal benyttes, selv om forskydningskraften er fremkaldt indirekte. En nærmere undersøgelse af dette emne er foretaget i B. Pedersen et al. [85.1].

Desværre eksisterer der endnu ikke en analog metode for bjælker, hvori der optræder opbøjet slap armering. Ønskes denne armerings indflydelse på forskydningsbæreevnen medtaget, er man henviset til at benytte øvrearmmetoden. Da det kan være vanskeligt at forudsige hvilken brudmekanisme, der vil være den farligste, kan det være nødvendigt at gennemregne flere forskellige brudlinjeforløb, som vist i figur 6.17.



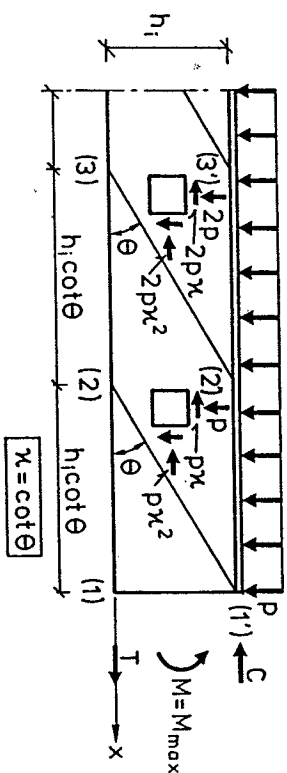
Figur 6.17: Mulige brudlinjeforløb for en bjælke med opbøjet længdearmring.

Generelt kan  $v_s$  bestemt ved (6.34) benyttes ved øvrearmberegningen. For bjælker, hvor der anvendes asymmetrisk opbøjning - i forhold til z-aksen - af længdearmring, eller hvor der udelukkende anvendes opbøjet armering som forskydningsarmering, bør der for effektivitetsfaktoren dog ikke anvendes en værdi større end  $0,8 v_s$ . For en mere detaljeret beskrivelse henvises der til C. Pedersen et al. [78.4].

Anvendes der afkortet længdearmring, kan bæreevnen stadig regnes bestemt ved (6.31) og (6.32), hvis det kan eftervises at trækkræften  $T$  overalt er mindre end den aktuelle flydekraft. Er dette krav ikke opfyldt, må en mere detaljeret beregning foretages, til eksempel ved benyttelse af formlerne i afsnit 6.2.2.

Af revnevidereducerende årsager kan det, for relativt høje bjælker, være hensigtsmæssigt at indlægge en ekstra længdearmring, som vist i figur 4.12. Denne armering kan medregnes til bæreevnen, hvilket blandt andet på simpel vis kan ske ved at reducere bidraget  $T_s \cot \theta$ , jævnfør figur 6.5, svarende til den flydekraft denne ekstra armering kan optage.

For bjælker, som er belastet af en forskydningskraft, der varierer med længdekoordinaten  $x$ , kan en statisk tilladelig bæreevne findes ved, at inddele bjælken i delfelder med en homogen spændingstilstand, og udregne bæreevnen for hvert af disse, jævnfør eksempel vist i figur 6.18. Længden af hvert delfelt sættes til  $h_1 \cot \theta$ , hvor  $\theta$  vælges således, at løsningen overalt er statisk tilladelig. Alternativt kan øvrevaldimetoden anvendes til bestemmelse af bjælken bæreevne, se nærmere herom i M.P. Nielsen et al. [78.1].



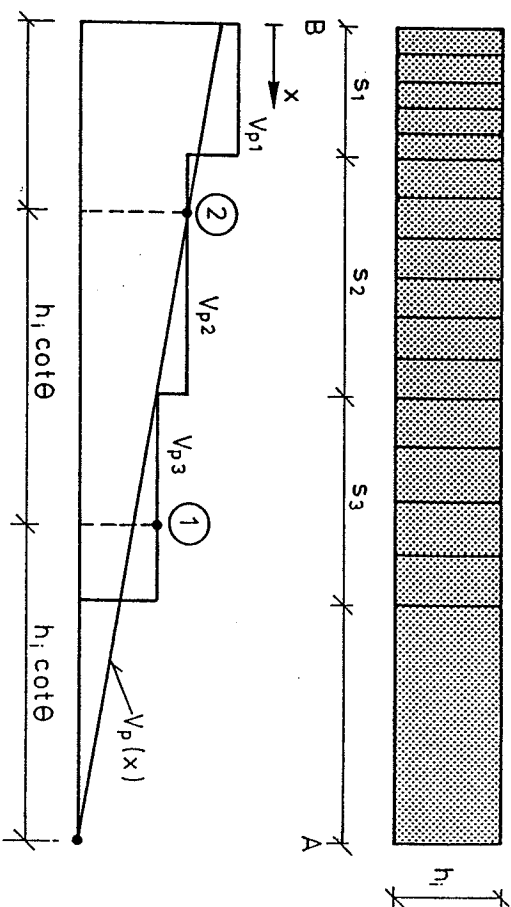
Figur 6.18: Statisk tilladeligt spændingsfelt for bjælke med en jævnt fordelt belastning på bjælkeoversiden.

Som det fremgår af figur 6.18 vil der, for det aktuelle eksempel, være et spændingsfrit felt, i overensstemmelse med afsnit 6.2.4, af længden  $h_1 \cot \theta$ .

Selvom liggvægtsbetingelsen (2.5) ikke fuldt ud er opfyldt, kan for

en bjælke med en given variation af forskydningskraften  $V(x)$ , forskydningsbæreevnefunktionen  $V_p(x)$  som en tilnærmelse bestemmes via formlerne i afsnit 6.2.

Betragtes til eksempel bjælken vist i figur 6.19, kan forskydningsbæreevnen  $V_{pi}$ , for de felter af bjælken hvor armeringen ikke varierer med  $x$ , bestemmes ved hjælp af formlerne i afsnit 6.2.



Figur 6.19: Generel metode til bestemmelse af  $V_p(x)$ .

Antages  $V(x)$ , for bjælken vist i figur 6.19, dels at variere lineært med  $x$  og dels at have værdien  $V = 0$  i punktet A, kan  $V_p(x)$ , hvis denne er fremkaldt indirekte, jævnfør afsnit 6.2.4, bestemmes ved at inddele bjælkestykket AB i delintervaller af længden  $h_1 \cot \theta$ , og for hvert af disse kræve, at  $V_p(x)$  overalt er mindre end den værdi af  $V_{pi}$ , der hører til venstre delpunkt, jævnfør punkt 1 og 2 i figur 6.19. Bemærk dog, at hvis  $\sigma_c = V_{sc}^f$  er det højre endepunkt afgørende for bæreevnen. Værdien af  $\theta$  vælges således, at løsningen overalt er statisk tilladelig. For bjælker, hvor  $V(x)$  fremkommer direkte, jævnfør afsnit 6.2.4, skal  $V_p(x)$  overalt opfylde betingelsen  $V_p(x) \leq V_{pi}$ .

Anvendes der som forskydningsarmering skrånede bjælker, kan ovenstående princip stadig benyttes. Bjælken inddeles nu blot i interval-

ler af længden  $h_1(\cot\theta + \cot\alpha)$ , dog således at første interval stadig kun har længden  $h_1\cot\theta$ , hvilket for bjælken vist i figur 6.19 er intervallet nærmest punkt A.

Beregningsmetoderne, angivet i afsnit 6.2 og i dette afsnit, kan også benyttes for bjælker, hvor belastningen angriber ved undersiden, blot der er indlagt en ekstra bøjlearmering, der kan føre lasten op til bjælkens overside.

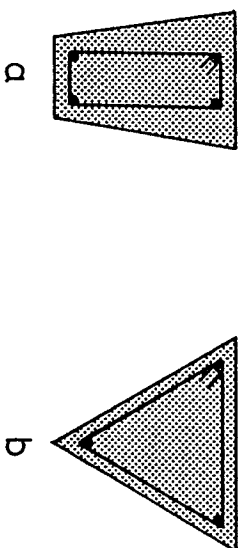
For bjælker hvor tværsnitshøjden  $h$  varierer med  $x$ , henvises der til M.P. Nielsen et al. [80.1].

Selvom det ikke fuldt ud er statistisk tilladeligt, har en detaljeret øvrerundersøgelse vist, se J. Rasmussen et al. [84.5], at en variation af  $\theta$  i de enkelte delfelter kun har en neglignibel indflydelse på berevnen. Variationen mellem to nabofelter bør dog ikke være for stor.

### 6.5.2 Ikke rektangulære tværsnit

Bjælker med ikke rektangulære tværsnit kan opdeles i tre hovedtyper, nemlig de analog rektangulære, dem hvor bøjlearmeringen er lodret, se figur 6.20 a, og dem hvor bøjlearmeringen følger randen, som vist i figur 6.20 b.

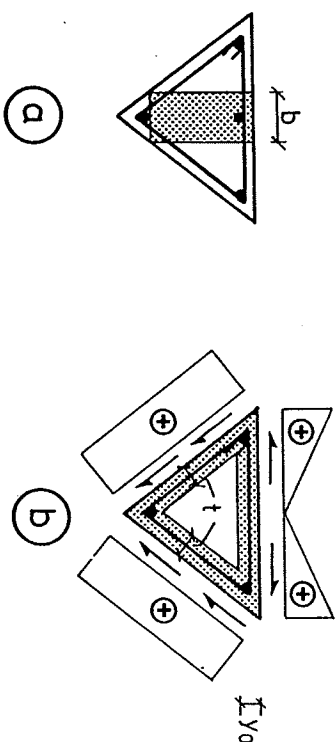
Ved en analog rektangulær bjælke forstås en bjælke som beregningsmæssigt følger principperne i afsnit 6.2, men som ikke er rektangulær. Et eksempel på en sådan bjælke er T-bjælken, se figur 4.15, idet flangen her som en tilnærmelse kan regnes at være en stringer, hvis  $h_f \ll h_t$ . Bemærk, at en detaljeret analyse af spændingsforholdene i trykzonen, hvis denne ikke regnes at være en stringer, vil føre til at ligevægtsbetingelsen (2.5) ikke fuldt ud er opfyldt.



Figur 6.20: Ikke rektangulære tværsnit.

For den i figur 6.20 a viste type tværsnit, foregår beregningen analog til de rektangulære tværsnit, blot er problemet, hvilke værdier for  $b$  og  $v_s^*$  der kan benyttes. På den sikre side kan  $b$  sættes til  $\min[b(z)]$ , og dermed  $v_s^* = v_s$ . Denne løsning er dog konservativ, hvilket til eksempel kan indses ud fra den betragtning, at et trykbrud indebærer en brudflade, der passerer igennem hele tværsnittet. For små variationer i  $b(z)$  kan således middelbredden  $b_m$  benyttes. For større bjælkebreddesvariationer bør den bredde, der benyttes, nok skønnes lidt mere konservativt, specielt hvis der er tale om store dæklag, jævnfør bemærkningerne vedrørende formel (6.34) i afsnit 6.4. For T-tværsnit, se figur 4.15, hvor  $b_f < b$ , skal der føres en forskydningsarmering op i flangen svarende til  $\tau = V/b_f h_t A_f/A_c$ , idet  $A_f$  betegner arealet af flangen og  $A_c$  det totale areal af trykhovedet.

For bjælker af typen vist i figur 6.20 b, stiller situationen sig desværre noget vanskeligere. I figur 6.21 er to typer statistisk tilladelige spændingsfordelinger vist.



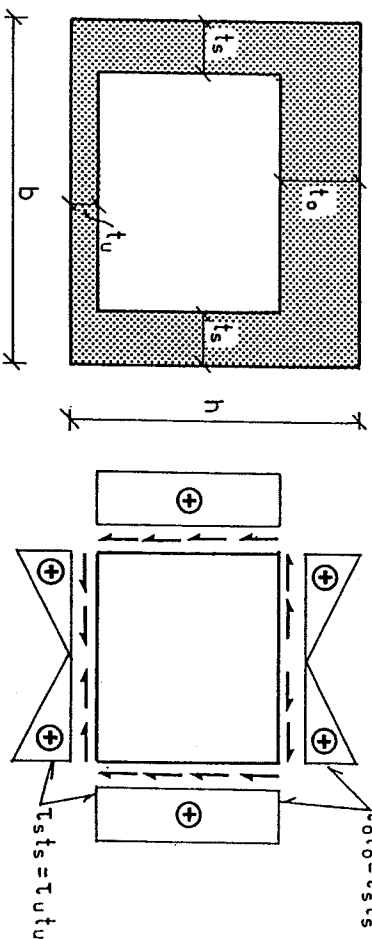
Figur 6.21: Statistisk tilladelige løsninger for et trekantformet tværsnit.

Den i figur 6.21 a viste spændingsfordeling svarer til den, der optræder i rektangulære bjælker, blot skal bøjleernes flydekræft reduceres for deres hældning i forhold til lodret.

Den i figur 6.21 b viste spændingsfordeling lader forskydnings-spændingerne have samme hældning som bøjlerne, i forhold til lodret, hvilket der naturligvis skal tages hensyn til ved fastlæggelsen af  $\tau$ . Bemærk, at der i overflangen, hvis tykkelse svarer til trykzonehøjden  $y_0$ , også optræder forskydningspændinger, samt at forskydningspændingerne og tykkelsen  $t$  skal vælges således, at der er forskydningsligevægt i overgangsområderne mellem de spændingsaktive felter.

Desværre eksisterer der ikke nogen forsøg, som kan give et indtryk af, hvor store værdier der kan benyttes for  $v_s^*$ . Denne bør derfor indtil videre sættes til en forholdsvis konservativ værdi.

For rektangulære bjælker med hult tværsnit, eventuelt kassedragere, se figur 6.22, benyttes samme fremgangsmetode som for eksemplet vist i figur 6.21 b, det vil sige, at der skal tages hensyn til de forskydningspændinger, der optræder i de vandrette flanger.



Figur 6.22: Forskydningspændingsfordeling i en kassedrager.

Regnes bøjningsmomentet alene optaget af over- og underflangen, kan  $\tau_s$  regnes bestemt ved

$$\tau_s = \frac{V}{2t_s(h - \frac{1}{2}(t_o + t_u))} \quad (6.43)$$

For kassedragere kan flydebetingelserne i afsnit 3.3 med fordel benyttes.

Ovennævnte princip kan naturligvis anvendes for vilkårlige tværsnit, eksempelvis cirkulære tværsnit.

## 6.6 ARMERINGSBESTEMMELSE

For en bjælke der er belastet af en konstant indirekte forskydningskraft kan, hvis der benyttes lodrette bøjler, den nødvendige tværarmring bestemmes af, idet der regnes med n-snitbøjler

$$A_{bL} = \frac{A_b}{s} = \frac{\tau_s b}{n f_{yb} \cot \theta} \quad (6.44)$$

For  $h_1$  anvendes værdien, der hører til  $M_{max}$ , dog således at  $h_1 \leq h_c - h_o$  og  $y_o \leq 0,3 h_u$ . Betonrykkets hældning  $\theta$  med længdeaksen kan vælges frit, blot det opfylder kravet

$$\sigma_c = \tau_s (\cot \theta + \tan \theta) \leq v_s f_c \quad (6.45)$$

Den værdi af  $\theta$ , der giver den optimale udnyttelse af betonspændingerne, fås ved at løse ligningen  $\sigma_c = v_s f_c$ , jævnfør (6.45), med hensyn til  $\theta$ . Hermed fås

$$\cot \theta = \frac{1}{2} \frac{v_s f_c}{\tau_s} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} v_s f_c} \right)^2} \right] \quad (6.46)$$

På grund af revneviddeproblemer, samt fare for flydning i bøjlerne i brugstadiet, bør indtil videre  $\cot \theta$  aldrig vælges større end 2,5. For afkortet længdearmring er grænsen  $\cot \theta = 2$ , jævnfør M.P. Nielsen et al. [80.1]. Anvendes der spandarmering som længdearmring, kan  $\theta$  bestemt ved (6.46) benyttes, hvis brugstadiet er revnefrit. For  $v_s$  benyttes det konservative udtryk  $v_s = 0,7 \frac{f_c}{200}$ , se figur 6.12.

Den nødvendige længdearmring ved  $M_{max}$  kan bestemmes af  $\phi_s = m_s \cdot$

For bjælker, hvor forskydningskraften fremkommer direkte, kan ovenstående fremgangsmåde også benyttes, blot skal længdearmeringen nu bestemmes af  $\phi_s = m_s + \frac{1}{2} \left( \frac{r_s}{f_c} \right) \cot \theta$ . Iøvrigt kan det bemærkes, at minimumsarmeringen fremtræder for  $\tan \theta = \frac{\sqrt{f_{yb}}}{2f_c}$ , hvis der anvendes uafkortet længdearmering.

For trykstringeren skal det sikres, at denne kan optage de trækspændinger, der måtte forekomme.

Ønskes der, som tværrammering, anvendt skrå bøjler, kan ovenstående procedure også anvendes, blot ændres formlerne (6.44), (6.45) og (6.46) nu til, jævnfør figur 6.15

$$A_{b1} = \frac{A_b}{s} = \frac{r_s b (1 + \cot^2 \alpha)}{n f_{yb} (\cot \theta + \cot \alpha)} \quad (6.47)$$

$$\sigma_c = \frac{r_s (1 + \cot^2 \theta)}{\cot \theta + \cot \alpha} \leq \sqrt{s} f_c \quad (6.48)$$

$$\cot \theta = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{s} f_c}{r_s} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{\sqrt{s} f_c \cot \alpha}{r_s} \right) \left( \frac{r_s}{2 \sqrt{s} f_c} \right)^2} \right] \quad (6.49)$$

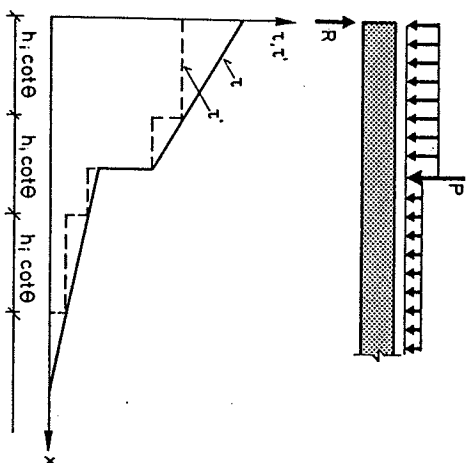
Af hensyn til størrelsen af revnevidderne, samt faren for flydning i brugsstadiet bør  $\cot \theta$  ikke regnes mindre end  $\tan \frac{\alpha}{2}$ .

For bjælker hvor forskydningskraften varierer med  $x$ , kan ovenstående formler også benyttes. For en given forskydningsspændingskurve  $\tau$  kan den dimensionsgivende forskydningsspændingskurve  $\tau'$  konstrueres ved, at inddеле bjælken i intervaller af længden  $h_i \cot \theta$ , og benytte værdien, der hører til højre endepunkt, jævnfør figur 6.23. For hvert delinterval kan nu formlerne (6.44)–(6.45) benyttes. Det bemærkes, at diskontinuitetspunkter på forskydningsnitkraftkurven altid skal udgøre et endepunkt for et valgt interval, se figur 6.23. Ved kontrol af betonspændingerne skal det største  $\tau$  i hvert delinterval benyttes.

I figur 6.23 er der anvendt samme  $\theta$ -værdi for alle delintervaller. Selv om det ikke er statistisk tilladeligt, har en detaljeret

øvrerundersøgelse vist, at længden af de enkelte delintervaller kan fastlægges på basis af den optimale værdi af  $\theta$ , jævnfør formel (6.46), idet den maksimale værdi for  $\tau$  i det aktuelle delinterval benyttes ved bestemmelsen af  $\theta$ .

Benyttes der skrå bøjler, sættes delintervallernes længde til  $h_i (\cot \theta + \cot \alpha)$ . For det delinterval, der ligger nærmest understøtningen, bør længden af intervallet kun sættes til  $h_i \cot \theta$ . Også her kan  $\theta$  optimeres ved fastlæggelse af delintervallernes længde, idet udtrykket (6.49) benyttes.



Figur 6.23: Den dimensionsgivende forskydningsspændingskurve  $\tau'$ , der hører til specialtilfældet lodrette bøjler.

For spændebetonbjælker, kan  $\cot \theta$  vælges frit, hvis brugsstadiet kan regnes at være revnefrit.

For mere specielle armeringsudformninger og tværsnit henvises der til bemærkningerne i afsnit 6.5. Det understreges dog, at indtill bedre undersøgelser foreligger, bør der i spændingsfordelinger af typen vist i figur 6.21a benyttes lodrette eller tilmælsesvis lodrette bøjler til at optage forskydningskraften. For  $h/b \leq 1$  bør der altid anvendes flersnitsbøjler, det vil sige  $n > 2$ .

Forholdene ved understøtningerne skal være af en sådan karakter, at spændingerne kan overføres. Vedrørende dette emne henvises til M.P. Nielsen et al. [80.1] og B. Peddersen [89.1].

For last angribende ved bjælkens underside indlægges en speciel op-hængningsarmering, der fører lasten til oversiden. For større bjælker, eller hvor lasten overvejende består af egenvægt, bør eventuelt en del af egenvægten tilsvarende hæves ved hjælp af en op-hængningsarmering.

Det understreges, at ovennævnte model kræver at trækstringeren alene medvirker ved optagelsen af momentet. En jævnt fordelt længdearmering over bjælkehøjden må således ikke udnyttes ved optagelsen af bøjningsmomentet. Endvidere bør trykstringeren ikke regnes større end cirka  $0,3 h_t$ , svarende til forudsætningen om anvendelse af stringermodellen.

## 7 REN VRIDNING

I B. Peddersen et al. [83.1] og [84.3] er anført en nedreværdiløsning til bestemmelse af jernbetonbjælkers vridningsbæreevne.

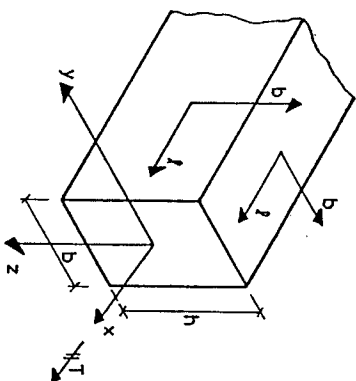
Som fremhævet i ovennævnte referencer er den angivne løsning, på grund af den manglende monotone sammenhæng mellem den mekaniske længdearmeringsgrad og vridningsbæreevnen, ikke tilfredsstillende. I dette kapitel vil dette forhold blive søgt løst således, at en mere konsistent og optimal nedreværdiløsning findes. Denne nedreværdiløsning stemmer overens med den i ovennævnte referencer anførte, med den undtagelse, at der vil blive stillet visse krav til værdien af det effektive tværsnits tykkelse.

Endvidere vil det, i forhold til ovennævnte referencer, her blive forsøgt at udvikle en  $v$ -funktion, der er i bedre overensstemmelse med forsøg.

Som det vil fremgå af det følgende, fører den valgte løsningsmodel til store og komplicerede beregningsudtryk. I afsnit 7.5, vil derfor nogle tilnærmelsesudtryk blive anført og vurderet.

### 7.1 BJÆLKEBESKRIVELSE

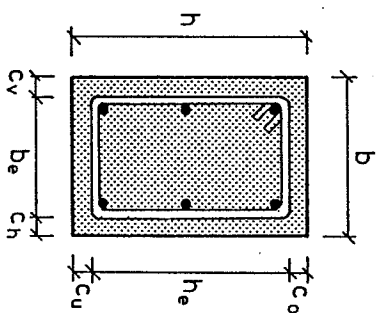
Jernbetonbjælken med massivt, rektangulært tværsnit indlægges i et retvinklet  $(x,y,z)$ -koordinatsystem med  $x$ -aksen i bjælkens længderetning sammenfaldende med bjælkens tyngdepunktslinje. Et lokalt ortogonalt  $(l,b)$ -koordinatsystem indlægges på bjælkens rande, således at  $l$ -aksen er parallel med  $x$ -aksen og  $(l,b)$ -systemet beskriver en omløbsretning mod uret, som vist i figur 7.1.



Figur 7.1: Bjælkebeskrivelse.

I det følgende betragtes et bjælkestykke, som alene er belastet af et konstant vridningsmoment  $T$  - det vil sige  $T$  regnes uafhængig af længdekoordinaten  $x$ . Idet fortegnsgenregningen er som vist i figur 7.1, vil behandlingen her alene omfatte positive vridningsmomenter, da de angivne bæreevneudtryk er invariante med hensyn til fortegnet af vridningsmomentet.

Bjælkens tværsnitsdata fremgår af figur 7.2.



Figur 7.2: Bjælketværsnit.

Betegnes dæklaget  $c$ , se figur 7.2, er bjælakens effektive bredde og effektive højde defineret ved

$$b_e = b - c_v - c_h, \quad h_e = h - c_o - c_u \quad (7.1)$$

For at gøre behandlingen i det følgende uafhængig af hvorledes  $b$  og  $h$  vælges, indføres endvidere parametrene  $b_m$  og  $h_m$  bestemt ved

$$b_m = \min(b_e, h_e) \quad (7.2)$$

$$h_m = \max(b_e, h_e)$$

Bjælakens effektive højde-breddeforhold  $k$  defineres at være

$$k = \frac{h_m}{b_m} \quad (7.3)$$

Armeringen regnes at bestå af lodrette bøjler med den indbyrdes afstand  $s$ , samt længdearmering symmetrisk fordelt omkring bjælketværsnittets geometriske tyngdepunkt. Armeringsretningerne antages således sammenfaldende med  $(y, z)$ -retningerne.

Bøjlearmeringens areal pr. længdeenhed betegnes  $A_{b\lambda}$ . Benævnes arealet af de jern der benyttes som bøjler  $A_b$ , gælder det således at  $A_{b\lambda} = A_b/s$ . Længdearmeringens samlede areal betegnes  $A_\lambda$ .

Armeringens trækflydespænding er for henholdsvis bøjler og længdearmering  $f_{yb}$  og  $f_{y\lambda}$ , mens betonen regnes at have den ideelle plastiske trykstyrke  $v_t f_c$ .

Bjælakens mekaniske længdearmeringsgrad  $\phi_\lambda$  er defineret ved

$$\phi_\lambda = \frac{A_\lambda f_{y\lambda}}{b_e h_e f_c} \quad (7.4)$$

mens bjælakens mekaniske bøjlearmeringsgrad  $\phi_b$  defineres ved

$$\phi_b = \frac{2A_{b\lambda} f_{yb}}{b_m f_c} = \frac{2A_b f_{yb}}{s b_m f_c} \quad (7.5)$$

Forholdet mellem de to armeringsgrader, kaldet det mekaniske bøjle-længdearmeringsgraderforhold, betegnes

$$\lambda = \frac{\phi_b}{\phi_t} \quad (7.6)$$

For de effektive mekaniske armeringsgrader indføres størrelserne

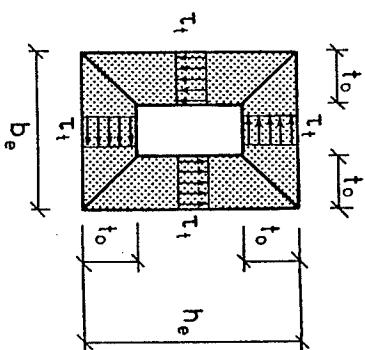
$$\eta_t = \frac{\phi_t}{v_t} \quad , \quad \eta_b = \frac{\phi_b}{v_t} \quad (7.7)$$

Bjælker med andre tværsnitsudformninger samt armeringsarrangementer, herunder vridningsmomenter der varierer med  $x$ , vil blive behandlet nærmere i afsnit 7.6.

## 7.2 STATISK TILADELIG SPÆNDINGSFORDELING

### 7.2.1 Ige vægtsbetingelser

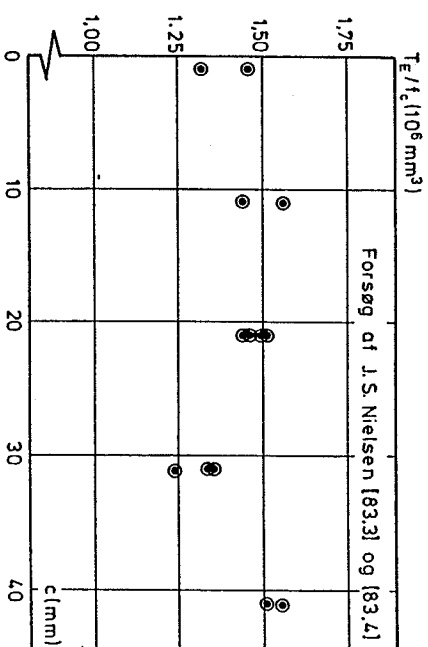
De til vridningsmomentet hørende forskydningspændinger  $\tau_t$  regnes i brudstadiet jævnt fordelt langs tværsnittets omkreds, over tykkelsen  $t_o$ , som vist i figur 7.3. Dette område vil blive kaldt det effektive tværnit.



Figur 7.3: Bjælakens effektive tværnit.

Som det fremgår af figur 7.3, regnes det effektive tværnit højest til bjælernes yderside, hvilket skyldes at dæklaget, når brudstadiet nås, ikke i alle tilfælde kan regnes aktiv ved spændingsoptagelsen, på grund af den såkaldte afskalkningsændens ved vridning.

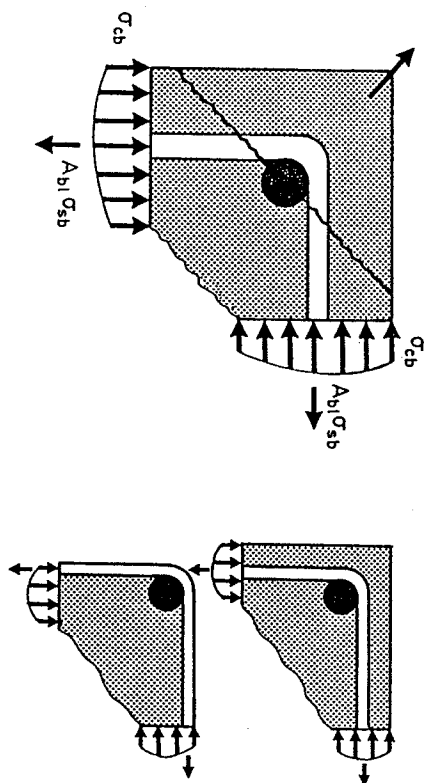
Forsøg af J.S. Nielsen [83.3] og [83.4], med overarmerede bjælker hvor tværnittet var kvadratisk, bekræfter som vist i figur 7.4, at dæklaget under visse omstændigheder ingen indflydelse har på vridningsbæreevnen. Yderligere bekræftelse i form af forsøg kan hentes i D. Mitchell et al. [74.1].



Figur 7.4: Forsøgsmæssigt bestemte vridningsbæreevner som funktion af dæklaget.

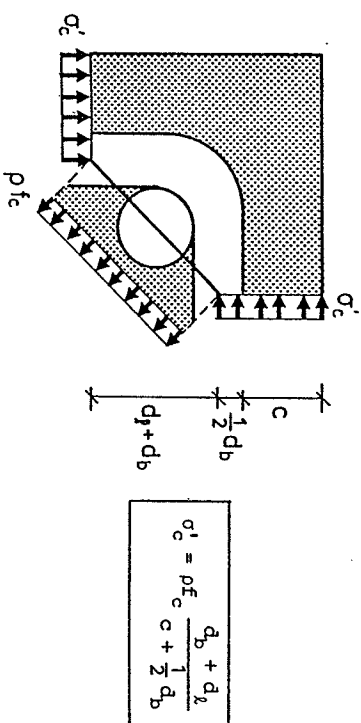
Afskalkningen kan opdeles i to typer, som vist i figur 7.5, nemlig den hvor kun hjørnedæklaget springer af, og den hvor hele dæklaget, eller store dele heraf, skaller af.

Opstilling af egentlige beregningsudtryk, til bestemmelse af hvorvidt afskalkning finder sted, er ikke foretaget her, hvilket primært skyldes, at sådanne udtryk skal verificeres ved hjælp af forsøg, hvilket desværre ikke har været muligt, da forsøgsrapporterne kun i begrænset omfang indeholder oplysninger om hvorvidt afskalkning fandt sted, herunder hvilken type afskalkning det var, og for hvilken belastning det skete.



Figur 7.5: De kvalitative forhold vedrørende afskalkningen af dæklaget.

I figur 7.6 er en simpel statisk tilladelig spændingsfordeling anvendt, for en overslagsmæssig vurdering af det betontryk  $\sigma'_c$  der fører til hjørnedæklagets afskalkning, idet  $d_b$  og  $d_\lambda$  betegner diameteren af henholdsvis bøjle- og længdejernene, mens  $\rho f_c$  er betonens plastiske trækstyrke. Erfaringsmæssigt kan  $\rho$  på den sikre side sættes til  $\rho = 0,03$ , hvilket her formodentlig er konservativt.



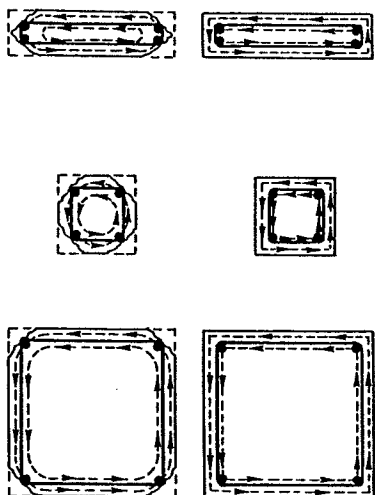
Figur 7.6: Statisk tilladelig spændingsfordeling til vurdering af hjørnedæklagets afskalkningsstendens.

Undertiden vil det kunne observeres, at hele dæklaget, eller store dele heraf, skaller af. Desværre har det ikke indenfor rammerne af dette projekt været muligt, at give nogen fyldestgørende forklaring på dette fænomen. Forsøg synes dog at pege i retning af, at bjælken deformationer, det vil sige drejning, og størrelsen af dæklaget, har en afgørende indflydelse på, hvorvidt yderligere afskalkning finder sted. Førstnævnte forhold bekræftes løbende af forsøg, idet afskalkningsstendensen er mindre, når der anvendes spændarmering. Endelig bør det fremhæves, at de længdejern der ligger i tværsnittets hjørner, på grund af bjælkenes træk, yder et koncentreret tryk på betonen, hvilket kan forårsage det såkaldte spal-tebrud.

Som en statisk tilladelig beregningsmodel kan teorien for koncentreret tryk på beton benyttes til en overslagsmæssig vurdering af ovenstående problem. Regnes Bredts formel at gælde, se afsnit 7.5, for et tyndt tværsnit med en tykkelse, der svarer til diameteren af længdejernene, kan vridningspåvirkningen, der fører til spaltning, idet der regnes med totalt overarmet tværsnit, bestemmes af  $T_{sp} = A_\lambda P$ , hvor  $P$  er lnhelasten, der fører til spaltning, se nærmere herom i M.P. Nielsen [84.1]. Til bestemmelse af  $P$ , synes værdierne  $\nu = 0,6$  og  $f_t/f_c = 0,03$ , ved sammenligning med enkelte forsøg, at give rimelige værdier for  $T_{sp}$ .

Som følge af ovennævnte vil det være på den sikre side højst at regne det effektive tværsnit til bjælkenes yderside. Desværre vil denne fremgangsmåde i visse situationer føre til endog særdeles konservative vridningsbæreevner. Betrages således figur 7.7, fremgår det, at selv om hjørnedæklaget springer af, kan det resterende dæklag medvirke ved vridningsoptagelsen. Betrages til eksempel en bjælke, for hvilken  $k$  antager en værdi noget større end 1, se figur 7.7, vil dæklaget langs tværsnittets lange sider, i et vist omfang kunne være aktiv ved vridningsoptagelsen. Desto større  $c/b_m$ -forholdet er, desto større indflydelse har dæklaget på bæreevnen. For bjælker med  $k$ -værdier nær 1, se figur 7.7, hvor  $c/b_m$ -forholdet antager små værdier, ses analoge betragtninger at gælde.

Kan det således eftervises at dæklaget, herfra eventuelt undtaget hjørnedæklaget, ikke skaller af, kan  $b_e$  og  $h_e$  vælges således, at de indeholder en del af dæklaget. Bemærk, at selv om dæklaget ikke skaller af, vil hele dæklaget ikke i alle tilfælde kunne medregnes, hvilket bekræftes af forsøg, jævnfør afsnit 8.7.



Figur 7.7: Dæklagers indflydelse på vridningsbænevenen.

Når bjælken er revnet, kan den anførte spændingsfordeling vist i figur 7.3 ikke fuldt ud regnes at være statisk tilladelig. Dette skyldes, at overgangsbetingelserne mellem områderne med tykkelsen  $t_o$  ikke er eksakt tilfredsstillende med de sædvanlige udformninger af armeringen, som den i figur 7.2 viste. I det følgende vil spændingsfordelingen, vist i figur 7.3 dog blive opfattet som værende statisk tilladelig. En mere detaljeret vurdering af denne antagelse, vil blive foretaget i afsnit 7.3.

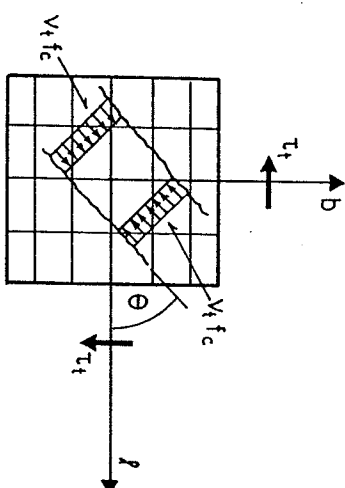
Vridningsligevægt i brudstadiet medfører, jævnfør figur 7.3

$$T_p = 2 \tau_t t_o \left[ \frac{4}{3} t_o^2 - (h_e + b_e) t_o + h_e b_e \right] \quad (7.8)$$

Indføres i (7.8), det effektive højde-breddeforhold  $k$  og den dimensionsløse tykkelse af det effektive tværsnit  $\beta$ , defineret ved  $\beta = \frac{t_o}{b_m}$ , ændres denne til

$$T_p = 2 \tau_t b_m^3 \beta \left[ \frac{4}{3} \beta^2 - (1+k) \beta + k \right] \quad (7.9)$$

Betragtes et snit vinkelret på enten y- eller z-retningen, vil spændingsfordelingen som en tilnærmelse blive antaget at være iden-tisk med den i kapitel 3 anførte, således at de der anførte fly-debetingelser regnes at gælde. Hermed fås den statisk tilladelige spændingsfordeling vist i figur 7.8.



Figur 7.8: Spændingsfordeling i det effektive tværsnit.

Vedrørende spændingsfordelingen i figur 7.8 bemærkes det, at tykkelsen af det effektive tværsnit  $t_o$  netop vil antage en sådan værdi, at det enaksede betontryk har værdien  $v_t f_c$ .

Idet  $\sigma_{cl}$  og  $\sigma_{cb}$  betegner betonspændingerne efter henholdsvis  $x$ - og  $y$ -aksen, samt  $\theta$  er den vinkel det enaksede betontryk dannes med  $x$ -aksen ved brud, fås følgende betonspændinger i  $(x, y)$ -koordinatsystemet

$$\sigma_{cl} = -v_t f_c \cos^2 \theta \quad (7.10)$$

$$\sigma_{cb} = -v_t f_c \sin^2 \theta \quad (7.11)$$

$$|\tau_{clb}| = v_t f_c \sin \theta \cos \theta \quad (7.12)$$

Intern forskydningsligevægt i bjælken kræver

$$\tau_t = |\tau_{clb}| = v_t f_c \cos \theta \sin \theta \quad (7.13)$$

Indsættes dette udtryk for  $\tau_t$  i udtrykket (7.9) andres dette til

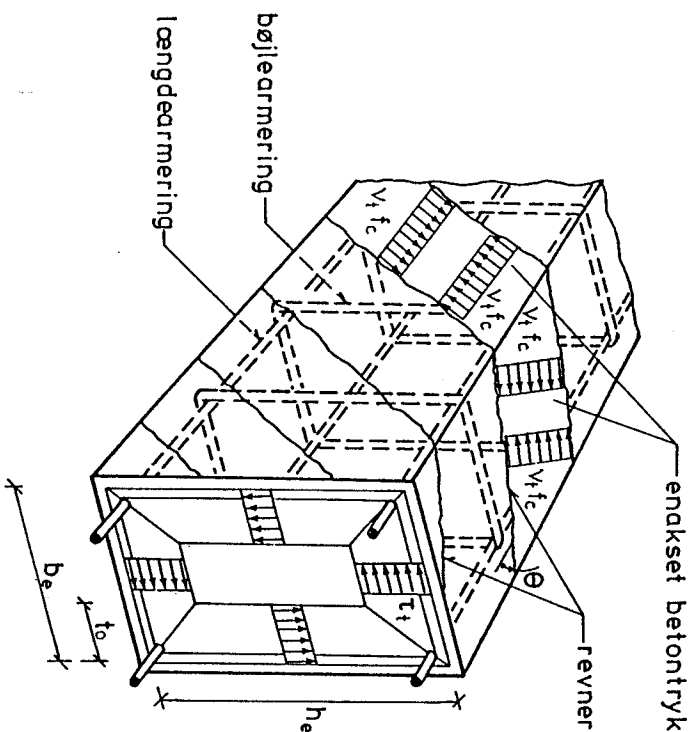
$$T_p = 2 v_t f_c b_m^3 \beta \left[ \frac{4}{3} \beta^2 - (1+k) \beta + k \right] \cos \theta \sin \theta \quad (7.14)$$

eller idet den dimensionsløse vridningsbæreevne, defineret ved

$$t_p = \frac{T_p}{b_j f_c} , \text{ introduceres}$$

$$t_p = 2 v_c \beta \left[ \frac{4}{3} \beta^2 - (1+k) \beta + k \right] \cos \theta \sin \theta \quad (7.15)$$

Spændingsforholdene i bjælken som helhed er illustreret i figur 7.9.



Figur 7.9: Spændingsforholdene i en bjælke påvirket til en vridning.

## 7.2.2 Normalarmerede bjælker

Bjælkerne defineres at være *normalarmerede (NA)*, når al armeringen flyder ved brud.

Betragtes et snit vinkelret på x-aksen, fås for dette ligevægts-ligningen

$$A_s f_{yk} = 2(b_e + h_e - 2t_o) v_c v_t f_c \cos^2 \theta \quad (7.16)$$

Hvis længdearmeringen er asymmetrisk fordelt om tværsnittets geometriske tyngdepunkt, må kun den symmetriske del indregnes i  $A_s$ . Endvidere forlanges en vis del af længdearmeringen placeret i tværsnittets hjørner, idet denne armering fungerer som forankring for bøjlerne. Anvendes forskellige længdearmeringstyper, eksempelvis i form af både slap- og spændarmering, erstattes  $A_s f_{yk}$  i (7.16) med  $\sum_{i=1}^n A_{s,i} f_{yk,i}$  hvor i henviser til den enkelte armeringstype karakteriseret ved areal samt flydespænding. Det bemærkes, at der i udtrykket  $\sum_{i=1}^n A_{s,i} f_{yk,i}$  højst må medregnes led, der svarer til at  $\sum_{i=1}^n A_{s,i} f_{yk,i}$  kan regnes symmetrisk fordelt om tværsnittets geometriske tyngdepunkt. Indføres i (7.16) den mekaniske længdearmeringsgrad  $\phi_s$  samt  $k$  og  $\beta$  ændres denne til

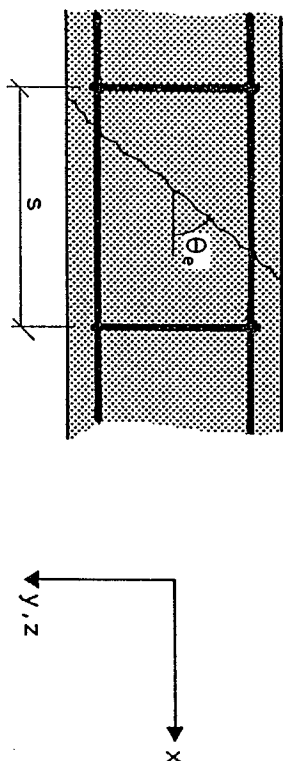
$$\phi_s k = 2 v_c \beta (1+k-2\beta) \cos^2 \theta \quad (7.17)$$

Betragtes et snit vinkelret på enten y- eller z-aksen og udtrykkes ligevægten vinkelret på snitretningen fås

$$A_{b,i} f_{yb} = v_t f_c t_o \sin^2 \theta \quad (7.18)$$

For at udtrykket (7.18) kan regnes at gælde, må der stilles krav om, at bøjleafstanden  $s$  har en sådan værdi, at overførslen af trækkræfter efter b-retningen er sikret. Begrundelsen for et sådant krav fremgår af figur 7.10, idet bøjleafstanden her er så stor

at en revne kan dannes tværs over hele bjælkens højde eller bredde uden at krydse en bøjle, hvilket medfører, at der ikke kan overføres trækspændinger efter b-retningen i det revnede stadium.



Figur 7.10: Revne ved bjælkens overflade.

J.F. Jensen et al. [78.2] har angivet udtryk til bestemmelse af revnehældningen  $\theta_e$  i det såkaldte *revnede elastiske stadium*, hvor armering og beton endnu kan regnes elastiske. Udtrykkene i ovenstående reference, til bestemmelse af  $\theta_e$ , er beregningsmæssig komplicerede. Som en tilnærmelse kan vinklen ved brud  $\theta$  dog anvendes. Hermed fås umiddelbart følgende krav til bøjleafstanden  $s$ , idet  $\theta$  på grund af de initiale revner, jævnfør afsnit 2.4.3, aldrig bør overstige  $\theta = 45^\circ$

$$s < \gamma b_m \cot \theta \leq \gamma b_m \quad (7.19)$$

hvor  $\gamma$  er en faktor med en numerisk værdi mindre end 1, der tager højde for en vis usikkerhed i brudliniens forløb. DS 411 [84.1] anvender for  $\gamma$  værdien 0,7. Forsøgsmæssig bekræftelse på af  $\gamma$  skal vælges noget mindre end  $\gamma = 1$ , fremgår af forsøg udført af F. Leonhardt et al. [74.3] og J.S. Nielsen [84.4].

Indføres den mekaniske bøjlearmeringsgrad  $\phi$  samt  $\beta$  i (7.18) ændres denne til

$$\phi_b = 2 \nu_t \beta \sin^2 \theta \quad (7.20)$$

Elimineres  $\theta$  af (7.17) og (7.20) fremkommer følgende ligning til bestemmelse af  $\beta$

$$\phi_b k = 2 \nu_t \beta (1 + k - 2\beta) \left(1 - \frac{\phi_b}{2 \nu_t \beta}\right) \quad (7.21)$$

Løses (7.21) med hensyn til  $\beta$  fås

$$\beta = \frac{1}{4 \nu_t} \left( (1 + k) \nu_t + \phi_b - \sqrt{[(1 + k) \nu_t - \phi_b]^2 - 4 \nu_t \phi_b k} \right) \quad (7.22)$$

Ved en division af (7.17) op i (7.20) findes  $\theta$  at være bestemt ved

$$\tan^2 \theta = \frac{k}{K} (1 + k - 2\beta) \quad (7.23)$$

Idet det mekaniske bøjle-længdearmeringsgradsforhold  $k$  er indført.

Ved nogle trigonometriske omformninger, samt anvendelse af (7.20), kan vridningsbæreevneudtrykket ændres til alene at afhænge af parameteren  $\beta$ .

$$t_p = \left[ \frac{4}{3} \beta^2 - (1 + k) \beta + k \right] \sqrt{\phi_b (2 \nu_t \beta - \phi_b)} \quad (7.24)$$

hvor  $\beta$  er bestemt ved (7.22).

Ved nogle få omskrivninger ses udtrykket (7.24) at stemme overens med den angivne flydebetingelse i afsnit 3.3.1. Sættes således bjælkens trækstyrke i de to retninger  $k$  og  $b$  til

$$f_{tb} = \frac{A_{bL} f_{yb}}{t_o} \quad (7.25)$$

$$f_{tL} = \frac{A_L f_{yL}}{2 t_o (b_e + b_e - 2 t_o)} \quad (7.26)$$

fås det, at forskydningsbæreevnen er bestemt ved

$$t_t = \sqrt{f_{tL} f_{tb}} \quad (7.27)$$

og dermed kan vridningsbæreevnen bestemmes af (7.9). Bemærk, at den optimale værdi af  $t_0$  er bestemt ved hjælp af ligningen (3.9), idet  $\sigma_c = f_{t\lambda} + f_{tb} = v_t f_c$ .

### 7.2.3 Overarmerede bjælker

Hvis ikke al bjælkens armering flyder ved brud, er bjælken *overarmeret* (OA). Der kan fremkomme tre former for overarmering. Flyder længdearmeringen, men ikke bøjlerner, er bjælken *overarmeret efter bøjlere* (OAB). Flyder bøjlerner, men ikke længdearmeringen, er bjælken *overarmeret efter længderetningen* (OAL). Disse to armeringsstilfælde benævnes under et *partielt overarmering* (OAP). Flyder hverken bøjlerner eller længdearmering, er bjælken *totalt overarmeret* (OAT).

Det vil her blive antaget, at bjælkerne er overarmeret når  $\beta$  har nået grænseværdien  $\beta_\lambda$ . For den dimensionsløse vridningsbæreevne fås således i det overarmerede tilfælde.

$$t_p = 2v_t \beta_\lambda \left[ \frac{4}{3} \beta_\lambda^2 - (1+k) \beta_\lambda + k \right] \cos \theta \quad (7.28)$$

Er bjælkerne overarmeret efter bøjlere, fås af (7.17) følgende ligning til bestemmelse af  $\theta$

$$\phi_\lambda k = 2(1+k-2\beta_\lambda) v_t \beta_\lambda \cos^2 \theta \quad (7.29)$$

Elimineres  $\theta$  af (7.28) ved hjælp af (7.29) fås, til bestemmelse af den dimensionsløse vridningsbæreevne, udtrykket

$$t_p = \frac{\left[ \frac{4}{3} \beta_\lambda^2 - (1+k) \beta_\lambda + k \right]}{1+k-2\beta_\lambda} \sqrt{\phi_\lambda k [2(1+k-2\beta_\lambda) v_t \beta_\lambda - \phi_\lambda k]} \quad (7.30)$$

Er bjælkerne overarmeret efter længderetningen fås af (7.20) følgende udtryk til bestemmelse af  $\theta$

$$\phi_b = 2v_t \beta_\lambda \sin^2 \theta \quad (7.31)$$

Eliminering af  $\theta$  i (7.28) ved hjælp af (7.31) fører til, at den dimensionsløse vridningsbæreevne er bestemt ved

$$t_p = \left[ \frac{4}{3} \beta_\lambda^2 - (1+k) \beta_\lambda + k \right] \sqrt{\phi_b (2v_t \beta_\lambda - \phi_b)} \quad (7.32)$$

Er bjælkerne totalt overarmerede, udgør  $\theta$  en fri parameter, som kan bestemmes ved maksimering af  $t_p$  med hensyn til  $\theta$ . For den dimensionsløse vridningsbæreevne fås således, idet  $\theta$  er  $45^\circ$

$$t_p = v_t \beta_\lambda \left[ \frac{4}{3} \beta_\lambda^2 - (1+k) \beta_\lambda + k \right] \quad (7.33)$$

Ovenstående bæreevneudtryk kan opskrives på samme form som (7.27), hvilket dog ikke vil blive gjort her.

### 7.2.4 Gyldighedsområderne for de enkelte armeringsstilfælde

Det ses umiddelbart, at bjælkerne kan regnes at være normalarmerede, sålænge  $\beta$  bestemt ved (7.22) opfylder kravet

$$\beta < \beta_\lambda \quad (7.34)$$

Indsættes  $\beta$  bestemt ved (7.22) i udtrykket (7.34) kan betingelsen for normalarmerede bjælker omskrives til, idet de effektive mekaniske armeringsgrader anvendes

$$\eta_\lambda k \leq (1+k-2\beta_\lambda) (2\beta_\lambda - \eta_b) \quad (7.35)$$

eller ved anvendelse af  $\lambda = \frac{\eta_b}{\eta_\lambda}$

$$\eta_\lambda \leq \frac{2\beta_\lambda (1+k-2\beta_\lambda)}{(1+k-2\beta_\lambda) \lambda + k} \quad (7.36)$$

Er (7.35) eller (7.36) ikke opfyldt er bjælkerne overarmerede, det vil sige  $\beta = \beta_\lambda$ .

Er bjælkerne totalt overarmerede, findes vinklen  $\theta$  at være  $45^\circ$ . Hermed fås af udtrykkene (7.29) og (7.31) følgende krav at skulle være opfyldt, for at bjælkerne kan regnes totalt overarmerede, idet (7.35) forudsættes ikke at være opfyldt.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_\lambda > \frac{(1+k-2\beta_\lambda)v_t\beta_\lambda}{k} \\ \phi_b > v_t\beta_\lambda \end{array} \right\} \quad (7.37)$$

Det følger nu umiddelbart af (7.37), at bjælkerne er overarmerede efter længderetningen når, og (7.35) ikke er opfyldt

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_\lambda > \frac{(1+k-2\beta_\lambda)v_t\beta_\lambda}{k} \\ \phi_b \leq v_t\beta_\lambda \end{array} \right\} \quad (7.38)$$

mens de er overarmerede efter højleretningen når, og (7.35) ikke er opfyldt

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_\lambda \leq \frac{(1+k-2\beta_\lambda)v_t\beta_\lambda}{k} \\ \phi_b > v_t\beta_\lambda \end{array} \right\} \quad (7.39)$$

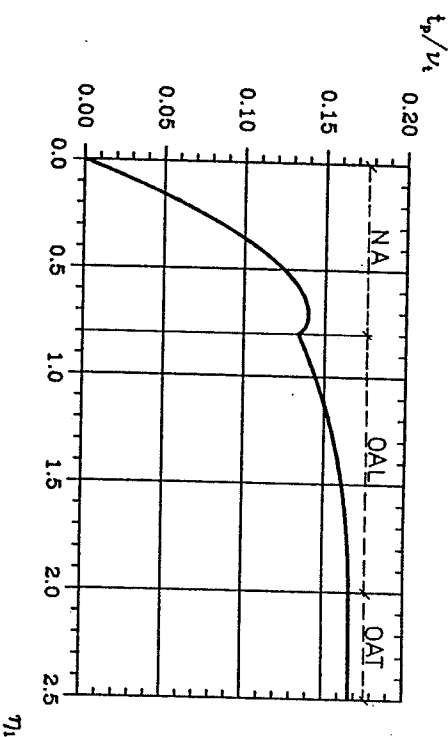
## 7.2.5 Bestemmelse af $\beta_1$

Det indses umiddelbart, at  $\beta_\lambda$  altid vil antage en numerisk værdi i intervallet

$$0 \leq \beta_\lambda \leq \frac{1}{2} \quad (7.40)$$

I figur 7.11 er en bæreevnekurve optegnet, der svarer til værdien

$\beta_\lambda = \frac{1}{2}$ . Bæreevnen der er optegnet som en funktion af den effektive mekaniske længdearmningsgrad  $\eta_\lambda$ , gælder for bjælker med parameterværdierne  $k = 1$  og  $\lambda = \frac{1}{4}$ .



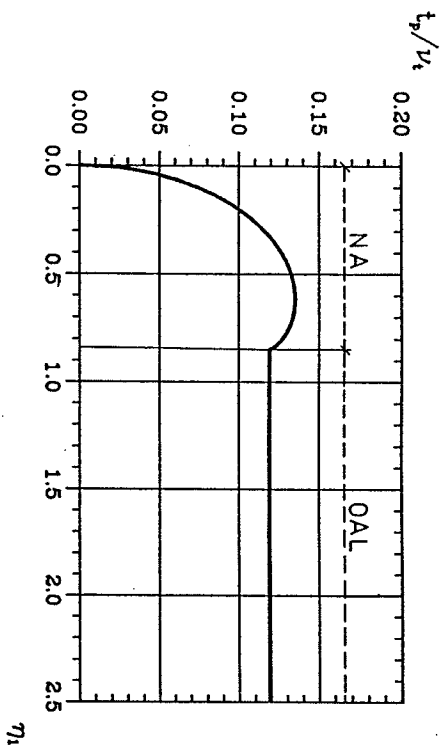
Figur 7.11: Bæreevnekurve for bjælke med parameterværdierne  $k = 1$ ,  $\lambda = \frac{1}{4}$  og  $\beta_\lambda = \frac{1}{2}$ .

Som det fremgår af figur 7.11, ses bæreevnekurven at have et lokalt maksimum i det normalarmerede område, hvilket betyder, at der ikke er en monoton sammenhæng mellem  $\eta_\lambda$  og  $t_p/v_t$ . Dette er naturligvis fysisk uacceptabelt, da det må gælde, at bæreevnen aldrig kan blive formindsket ved en forøgelse af armeringsmængden.

For at undgå den manglende monotone - matematisk mere korrekt svagt monotone - sammenhæng mellem  $\phi_\lambda$  og  $t_p$ , indføres som tidligere anført en øvre grænse for  $\beta$ , nemlig  $\beta_\lambda$ . Værdien af denne vil blive søgt bestemt ved den værdi for  $\beta$ , der netop svarer til det lokale maksimumspunkt.

Ovenfor nævnte lokale maksimumspunkt kan bestemmes som en løsning af  $\frac{d t_p}{d \phi_\lambda} = 0$ , idet  $\phi_b$  erstattes af  $\lambda \phi_\lambda$  i udtrykkene (7.22) og (7.24). Desværre fører en sådan beregning til komplicerede udtryk, hvorfor en alternativ metode til bestemmelse af  $\beta_\lambda$  vil blive benyttet.

I figur 7.12 er en bæreevnekurve, hvor  $\eta_b$  er fastholdt, optegnet som funktion af  $\eta_\lambda$ .



Figur 7.12: Bæreevnekurve for bjælke med parameterverdierne  $k = 1$ ,  $\eta_b = 0,15$  og  $\beta_\lambda = \frac{1}{2}$ .

Af (7.22) ses det umiddelbart, at  $\beta$  er en entydig funktion af  $\phi_\lambda$  for  $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ . Da bæreevneudtrykket (7.24) alene er en funktion af  $\phi_\lambda$  via  $\beta$ , kan det lokale maksimumspunkt for bæreevnekurven findes som en løsning til  $\frac{d\beta}{d\phi_\lambda} = 0$ . Hermed fås følgende ligning til bestemmelse af  $\beta_\lambda$ .

$$20\beta_\lambda^2 - [9(1+k) + 8\eta_b]\beta_\lambda + 3(\eta_b + k + k\eta_b) = 0 \quad (7.41)$$

Løses (7.41) med hensyn til  $\beta_\lambda$  fås

$$\beta_\lambda = \frac{1}{40} \left( x - \sqrt{x^2 - 240(\eta_b + k + k\eta_b)} \right) \quad (7.42)$$

hvor

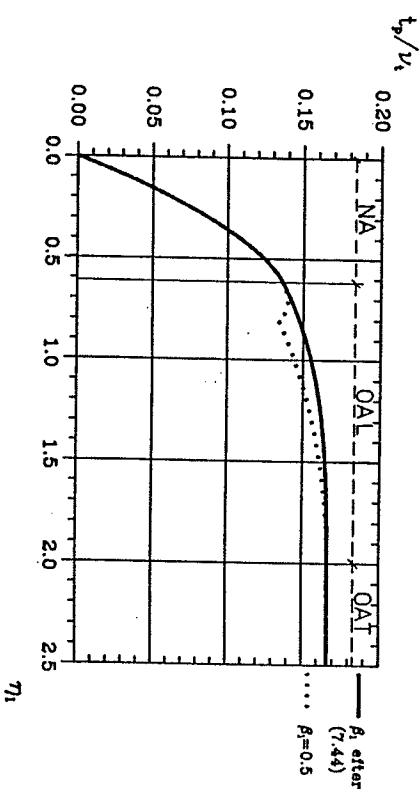
$$x = 9(1+k) + 8\eta_b \quad (7.43)$$

En undersøgelse af hvornår  $\beta_\lambda$  vil være mindre end  $\frac{1}{2}$ , eller sagt på en anden måde, hvornår et lokalt maksimum vil optræde på bæreevnekurven, viser at dette altid vil være tilfældet når  $\eta_b < \frac{1}{2}$ . Hermed fås følgende udtryk til bestemmelse af  $\beta_\lambda$

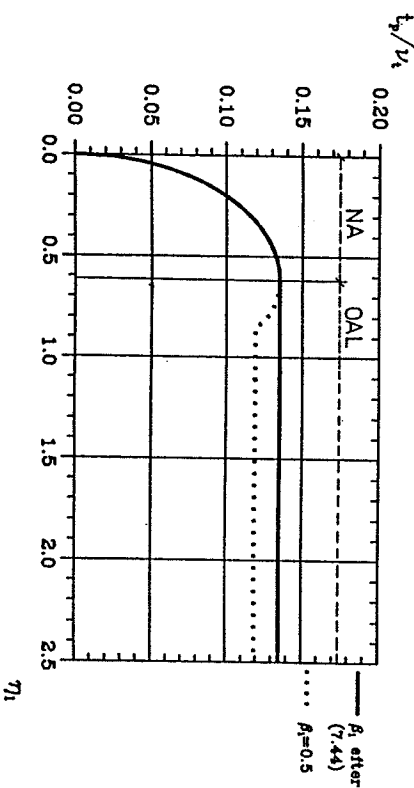
$$\beta_\lambda = \begin{cases} \frac{1}{40} \left( x - \sqrt{x^2 - 240(\eta_b + k + k\eta_b)} \right) & \text{for } \eta_b < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{for } \eta_b \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (7.44)$$

Idet  $x$  er bestemt ved (7.43).

Anvendes nu  $\beta_\lambda$  bestemt ved (7.44) til at optegne bæreevnekurverne vist i henholdsvis figur 7.11 og 7.12 ændres disse til de i henholdsvis figur 7.13 og 7.14 viste.



Figur 7.13: Bæreevnekurve for bjælke med parameterverdierne  $k = 1$ ,  $\eta_b = \frac{1}{4}$ .



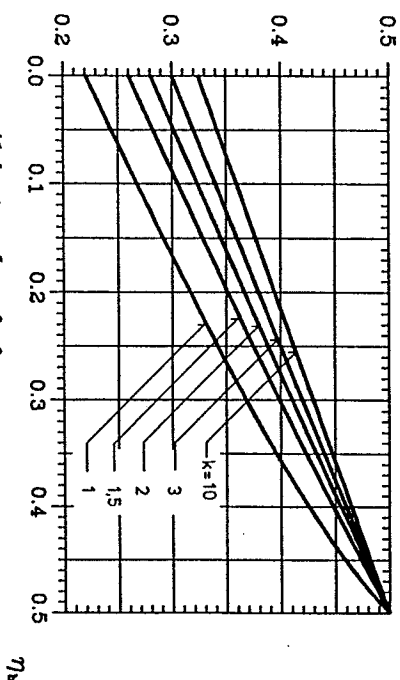
Figur 7.14: Bæreevnekurve for bjælke med parameterverdierne  $k = 1$ ,  $\eta_b = 0,15$ .

Som det fremgår af figur 7.13 og 7.14, ses bæreevnekurverne nu at opfylde det stillede krav om monotoni.

Af udtrykket (7.44) fremgår det, at  $\beta_k$  altid vil være mindre end  $\frac{1}{2}$  når  $\eta_b < \frac{1}{2}$ , eller idet  $k$  introduceres  $\eta_k \leq \frac{1}{2k}$ . Antages  $\beta_k = \frac{1}{2}$  fås af (7.36) følgende krav  $\eta_k \leq \frac{1}{1+k}$ , at skulle være opfyldt for at bjælkerne kan regnes at være normalarmerede. Ved sammenligning af disse to betingelser fås det umiddelbart, at for  $k > 1$  vil  $\beta_k$  altid antage værdien  $\frac{1}{2}$ , hvilket betyder at er bjælkerne OAB kan hele tværsnittet  $b_e \times h_e$  regnes med til det effektive tværsnit. Ved hjælp af lignende ræsonnementer kan det vises, at for bjælker der er OAT vil  $\beta_k$  også altid antage værdien  $\frac{1}{2}$ .

I figur 7.15 er funktionsudtrykket (7.44) vist grafisk.

$\beta_k$



Figur 7.15: Kurver til bestemmelse af  $\beta_k$ .

## 7.2.6 Beregningsudtryk

Med udgangspunkt i det foregående kan nu den fuldstændige løsning, for en massiv, rektangulær bjælke med en armeringsudformning som den i figur 7.2 viste, opstilles.

Til bestemmelse af grænseværdien for den dimensionsløse tykkelse af det effektive tværsnit have

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{1}{40} \left( x - \sqrt{x^2 - 240 \left( \frac{\phi}{v_t} b + k + k \frac{\phi}{v_t} b \right)} \right) & \text{for } \phi_b < \frac{1}{2} v_t \\ \frac{1}{2} & \text{for } \phi_b \geq \frac{1}{2} v_t \end{cases} \quad (7.45)$$

hvor

$$x = 9(1+k) + 8 \frac{\phi_b}{v_t} \quad (7.46)$$

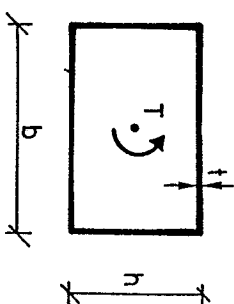
Ved hjælp af tabel 7.1 kan værdierne for  $\theta$ ,  $\beta$  og  $t_p$  fastlægges, og vridningsbæreevnen kan dermed bestemmes af

$$T_p = b^3 f_c t_p \quad (7.47)$$

## 7.3 GEOMETRISK MULIG BRUDFIGUR

Nedreværdiløsningen anført i afsnit 7.2.6 er som tidligere nævnt ikke fuldt ud statisk tilladelig. Dette betyder, at der til den angivne løsning ikke eksisterer en geometrisk mulig brudfigur.

For små værdier af  $\beta$ , det vil sige for  $\phi_b \ll \frac{1}{2} v_t$  og  $\phi_b \ll \frac{1}{2} v_t$ , er nedreværdiløsningen dog statisk tilladelig. Bjælken kan i dette tilfælde opfattes at være statisk ækvivalente til en bjælke med tyndfilaget tværsnit, som vist i figur 7.16.



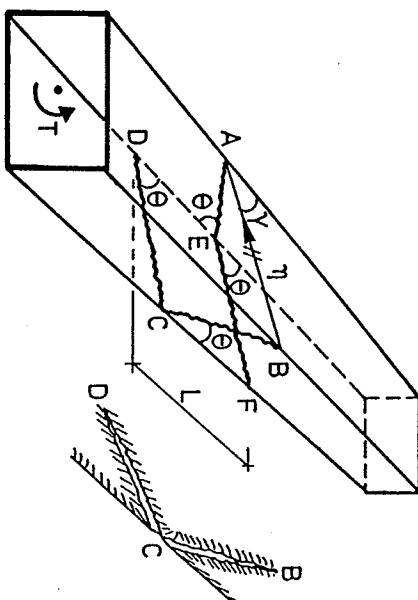
Figur 7.16: Bjælke med tyndfilaget tværsnit.

| tilfælde | betingelse                                                                                                                              | $\theta$                                                    | $\beta$                                                                                         | $t_p$                                                                                        |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA       | $\phi_k \leq \frac{1}{k}(1+k-2\beta_k)(2v_t\beta_k - \phi_b)$                                                                           | $\text{Arctan } \sqrt{\frac{k}{k}(1+k-2\beta)}$             | $\frac{1}{4v_t} \left( (1+k)v_t + \phi_b - \sqrt{[(1+k)v_t - \phi_b]^2 - 4v_t\phi_k k} \right)$ | $\frac{4}{3}\beta^2 - (1+k)\beta + k \sqrt{\phi_b(2v_t\beta - \phi_b)}$                      |
| OAL      | $\phi_k > \frac{1}{k}(1+k-2\beta_k)(2v_t\beta_k - \phi_b)$<br>$\phi_k > \frac{(1+k-2\beta_k)v_t\beta_k}{k}$<br>$\phi_b \leq v_t\beta_k$ | $\text{Arctan } \sqrt{\frac{\phi_b}{2v_t\beta_k - \phi_b}}$ | $\beta_k$                                                                                       | $\left[ \frac{4}{3}\beta_k^2 - (1+k)\beta_k + k \right] \sqrt{\phi_b(2v_t\beta_k - \phi_b)}$ |
| OAB      | $\phi_k > v_t - \phi_b$<br>$\phi_k \leq \frac{1}{2}v_t$<br>$\phi_b > \frac{1}{2}v_t$                                                    | $\text{Arctan } \sqrt{\frac{v_t - \phi_k}{\phi_k}}$         | $\frac{1}{2}$                                                                                   | $\frac{1}{2}(k - \frac{1}{3})\sqrt{\phi_k(v_t - \phi_k)}$                                    |
| OAT      | $\phi_k > \frac{1}{2}v_t$<br>$\phi_b > \frac{1}{2}v_t$                                                                                  | $45^\circ$                                                  | $\frac{1}{2}$                                                                                   | $\frac{1}{4}v_t(k - \frac{1}{3})$                                                            |

Tabel 7.1: Udtryk til bestemmelse af armeringstilfælde,  $\theta$ ,  $\beta$  og  $t_p$  for en massiv rektangulær bjælke med en armeringsudformning som vist i figur 7.2.

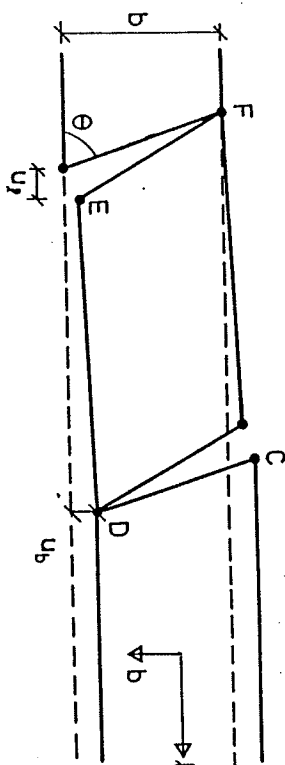
De enkelte flige antages at være ens armeret og at følge den geometriske beskrivelse samt beregningsmodel i kapitel 3. Idet forskydningsspenningerne regnes homogent fordelt over tykkelsen  $t$ , har P. Müller [76.2] for  $\phi_{x\lambda} + \phi_{y\lambda} < v_t$ , hvor  $\phi_{x\lambda}$  og  $\phi_{y\lambda}$  er bestemt ved (3.1), angivet en brudmekanisme, der fører til resultatet (7.25)-(7.27).

Bjælkedelene antages ved brud at rotere om en i overflangen beliggende linje AB, der danner vinklen  $\gamma$  med bjælkens længdeakse, se figur 7.17.



Figur 7.17: Brudmekanisme.

Fra rotationslinjen AB regnes der at udgå to ens brudlinier, nemlig fra henholdsvis punkt A og B. Brudlinjen der hører til punkt B betragtes. Fra punkt B løber brudlinjen via højre flange til punkt C og derfra videre over underflangen til punkt D. Brudlinjen danner i begge flanger vinklen  $\theta$  med længdeaksen. De to legemer, der adskilles af brudlinjen, flytter sig i forhold til hinanden som vist i figur 7.17, hvoraf det fremgår, at der ingen gensidig flytning er i punkt B og D. Betragtes underflangen, fås den i figur 7.18 viste deformations-tilstand.



Figur 7.18: Deformationstilstand i underflangen.

Regnes punkt D at få flytningerne  $u_x$  og  $u_y$ , se figur 7.18, ved rotationen  $\eta$ , fås følgende sammenhæng mellem  $\eta$  og flytningerne af punkt D.

$$u_x = \eta h \sin \eta$$

(7.48)

$$u_y = \eta h \cos \eta$$

Af figur 7.18 fås de to flytninger  $u_x$  og  $u_y$  at være knyttet sammen af betingelsen  $u_b = \frac{L}{h} u_x$ , hvor betydningen af L fremgår af figur 7.17. Længden L fås umiddelbart at være bestemt ved

$$L = 2(b+h) \cot \theta - b \cot \eta$$

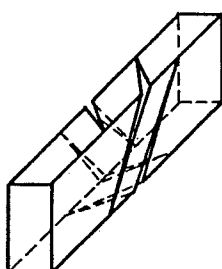
(7.49)

Af ovenstående betingelser fås følgende sammenhæng mellem  $\eta$  og  $\theta$

$$\cot \eta = (1 + \frac{h}{b}) \cot \theta$$

(7.50)

Ved nu at kombinere ovenstående brudmekanisme, med en tilsvarende brudmekanisme hvor rotationsaksen ligger i underflangen, se figur 7.19, kan et udtryk for vridningsbæreevnen findes ved hjælp af arbejdsberegningen. Minimeres dette bæreevneudtryk med hensyn til  $\theta$  vil løsningen (7.25)-(7.27) fremkomme.



Figur 7.19: Brudmekanisme ved ren vridning.

En forudsætning for brudmekanismen i figur 7.19 er, at brudlinieførsløbet ikke forstyrrer af randforhold, idet disse kan ændre brudlinieførsløbet. Se iøvrigt bemærkningerne herom i afsnit 6.3.

Ovenstående brudmekanisme er fundet under forudsætning af tyndfilget tværnsnit. P. Müller [76.2] har dog for bjælker med massivt tværnsnit, idet der stadig regnes med et spændingsaktivt tyndfilget tværnsnit, fundet en brudmekanisme af samme type, der også fører til løsningen (7.25)-(7.27).

Den i afsnit 7.2.6 angivne nedrevaridløsning er således en eksakt plastisk løsning for små værdier af  $t_0$ . For  $k \rightarrow \infty$  er den angivne løsning for et vilkårligt  $t_0$  en eksakt plastisk løsning. Som tidligere nævnt er nedrevaridløsningen anført i afsnit 7.2.6 ikke fuldt ud statisk tilladelig for store værdier af  $t_0$ , da overgangsbetingelserne mellem områderne med tykkelsen  $t_0$  ikke er tilfredsstillende. Ved at stille et krav om at  $t_0$  aldrig må overstige en vis grænseværdi  $t_0$ , kunne nedrevaridløsningen gøres statisk tilladelig. Bemærk iøvrigt, at bæreevneudtrykkene i afsnit 7.2.2-7.2.4 netop er opskrevet under forudsætning af en sådan betingelse. Indførelse af en sådan grænseværdi  $t_0$  er ikke uden problemer, dels vil  $t_0$  være en funktion af  $k$ , idet det gælder at  $t_0 \propto \frac{1}{k}$  for  $k \rightarrow \infty$ , og dels synes forsøgsresultater ikke klart at pege i retning af en sådan grænseværdi.

Optegnes til eksempel en bæreevnekurve baseret på udtrykkene i afsnit 7.2.6, således at de eneste variable parametre er  $\phi_0$  og  $\phi_b$ , idet forholdet mellem dem dog regnes konstant, jævnfør figur 7.13, og sammenlignes for en given  $v_0$ -værdi kurvens form med for-

søgsresultater, viser det sig at overensstemmelsen er endog særdeles god. Forsøgsresultaterne bekræfter således, at  $t_{\lambda}$  kan vælges i overensstemmelse med afsnit 7.2.5, det vil sige  $t_{\lambda} = \frac{1}{2} b_m$ .

#### 7.4 EFFEKTIVITETSFAKTOREN

Effektivitetsfaktoren for vridning kan, som ved forskydning, kun bestemmes ved hjælp af forsøg.

Analog til ren bøjning kan der regnes med en lineær tøjningsfordeling over det effektive tværsnits tykkelse. Dette fører umiddelbart til, jævnfør afsnit 4.2.3, at  $v_t$  er en funktion af  $f_c$ ,  $f_{y\lambda}$ ,  $f_{y\beta}$  og de geometriske armeringsgrader. Som ved bøjning vil de geometriske armeringsgraders indflydelse på  $v_t$  dog blive negligeret.

De specielle spændingsforhold i overgangsområderne mellem felterne med tykkelsen  $t_0$  gør, at  $v_t$  endvidere er en funktion af  $k$  og  $d_{\lambda}^h$ , hvor  $d_{\lambda}^h$  betegner diameteren af de langsgående jern der ligger i tværsnittets hjørner. At  $v_t$  afhænger af  $k$  skyldes, at jo større  $k$  er, jo mindre indflydelse har spændingsforholdene i overgangsområderne på vridningsbæreevnen, eller sagt på en anden måde, jo større  $k$  er, jo mere homogen vil spændingstilstanden være. Hjørnerne indflydelse på  $v_t$  fremgår direkte af figur 7.5. Det bemærkes, at for  $k \rightarrow \infty$  vil  $v_t$  være uafhængig af  $k$  og  $d_{\lambda}^h$ . Endelig spiller forholdet mellem armeringsmængderne efter de to retninger ind på  $v_t$ , idet dette forhold til dels afgør beliggenheden af det enskede betonryks hældning i forhold til længdeaksen.

Sammenfattende fås  $v_t$  at kunne udtrykkes som en funktion af følgende parametre

$$v_t = f(f_c, f_{y\lambda}, f_{y\beta}, k, d_{\lambda}^h, \lambda) \quad (7.51)$$

Til bestemmelse af  $v_t$  kræves forsøg med totalt overarmerede bjælker, idet vridningsbæreevnen i dette tilfælde primært styres af betons trykstyrke. Ved ren bøjning fandtes  $v_b$  at antage sin minimalværdi i overgangsområdet mellem det normalarmerede område og det

overarmerede område. Forsøgsresultater i dette område skal således også tages i betragtning ved bestemmelsen af  $v_t$ .

Til fastsættelse af  $v_t$  er der anvendt forsøg fra 9 forsøgsserier. Disse er alle med undtagelse af en enkelt anført i B. Feddersen et al. [83.1]. Desværre indeholder disse forsøgsserier kun et begrænset antal overarmerede bjælker, og slet ingen bjælker der er stærkt overarmet.

I B. Feddersen et al. [83.1] er effektivitetsfaktoren bestemt ved hjælp af de overarmerede bjælker, idet bæreevneligningen (7.33) er anvendt. Bemærk at  $\beta_{\lambda} = \frac{1}{2}$  for totalt overarmerede bjælker. De herved fundne  $v_t$ -værdier bekræfter iøvrigt, at  $v_t$  afhænger af parametrene i (7.51). For at opnå en mere nuanceret  $v_t$ -funktion er her anvendt en anden fremgangsmåde til bestemmelse af  $v_t$ . For en valgt  $v_t$ -funktion, er forholdet mellem den experimentelle og den teoretiske bæreevne  $T_E/T_P$  bestemt for alle bjælkerne. Ved nu at vælge forskellige  $v_t$ -funktioner, og sammenligne middelværdi og variationskoefficient for  $T_E/T_P$  for hver enkelt forsøgsserie, kan den bedste  $v_t$ -funktion findes. Ovenstående undersøgelse blev suppleret med en vurdering af  $T_E/T_P$ -forholdets variation for de enkelte bjælker. Endvidere skal det fremhæves, at det ved bestemmelsen af  $v_t$  kun i en vis udstrækning har været muligt, at tage hensyn til hvorvidt afspalning fandt sted, på grund af de manglende oplysninger i forsøgsrapporterne.

Den her angivne metode bekræftede, at  $v_t$  er en funktion af parametrene i udtrykket (7.51). Den bedste  $v_t$ -funktion fandtes at være bestemt ved

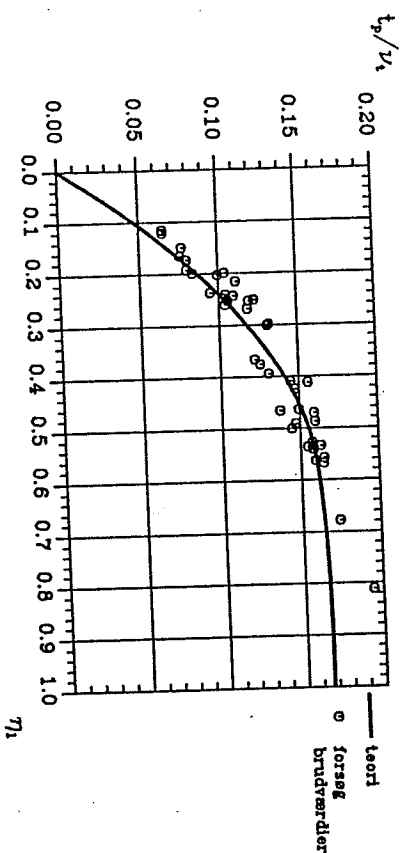
$$v_t = \begin{cases} 0,50 + \frac{k}{20} + \frac{d_{\lambda}^h}{200k} - \frac{f_c}{300} - \frac{f_y}{8000} & \text{for } k \leq 4 \\ 0,74 - \frac{f_c}{300} - \frac{f_y}{8000} & \text{for } k > 4 \end{cases} \quad (7.52)$$

For  $f_y$  i (7.52) anvendes en middelværdi af  $f_{y\beta}$  og  $f_{y\lambda}$ . Forholdet  $\lambda$  er her ikke medtaget, da indflydelsen på  $v_t$  var minimal.

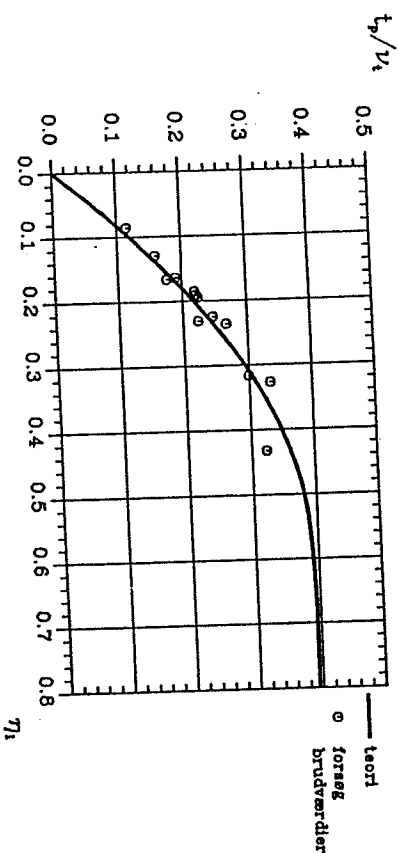
Formel (7.52) må kun anvendes for  $f_c \leq 60 \text{ N/mm}^2$ ,  $d_{\lambda}^h \leq 30 \text{ mm}$  og  $f_y \leq 1000 \text{ N/mm}^2$ .

Forsøg med vridningspåvirkede plader, se J.F. Jensen et al. [81.3], gav en værdi for  $\nu_t$  på 0,58. Indtil videre bør  $\nu_t$  derfor ikke regnes højere end denne værdi.

I figur 7.20 og 7.21 er forsøg fra forsøgsserierne sammenlignet med den teoretiske bæreevne, idet  $\nu_t$  bestemt ved (7.52) er anvendt. Overensstemmelsen mellem forsøg og teori er, som det fremgår af figurerne, tilfredsstillende.



Figur 7.20: Teori vurderet ved forsøg, for parameterbæredighe  $k = 1$  og  $\lambda = 0,52$ . (Forsøgsbæredighe  $\lambda$ -værdier lå i intervallet  $0,41 \leq \lambda \leq 0,57$ ).



Figur 7.21: Teori vurderet ved forsøg, for parameterbæredighe  $k = 1,91$  og  $\lambda = 0,70$ .

For en endelig verificering af udtrykket (7.52) bør der udføres forsøg med overarmede bjælker, hvor variationen i parameterbæredighe er mere markant. Endvidere bør der udføres forsøg med stærkt overarmede bjælker.

## 7.5 SIMPLIFICERING AF BEREKNINGSUDTRYK

De i afsnit 7.2.6 anførte beregningsudtryk er store og besværlige, og dermed delvis uhensigtsmæssige til "håndberegninger". Derfor skal der i dette afsnit dels angives nogle tilnærmelsesudtryk, og dels skal disse vurderes i forhold til den korrekte løsning. Interessen vil her primært knytte sig til de normalarmede bjælker.

Som en tilnærmelse på den sikre side kan  $\beta_\lambda$  sættes til  $\beta_\lambda = \frac{1}{2}$ , jævnfør figur 7.13 og 7.14. Den afvigelse, i forhold til den korrekte model, der herved introduceres, afhænger af størrelsen af  $\eta_b$ . For mekaniske bøjlearmingsgrader  $\phi_b$  større end  $\phi_b = 0,07$  vil afvigelsen maksimalt være cirka 10%.

En ofte anvendt tilnærmelsesmetode er i vridningsbæreevneudtrykket at anvende samme indre vridningsmomentarm for trekantarmåderne som for flangerne af det effektive tværsnit. Anvendes denne fremgangsmåde ændres vridningsbæreevneudtrykket (7.9) til

$$T_p = 2 t_c b_m^3 \beta (1-\beta) (k-\beta) \quad (7.53)$$

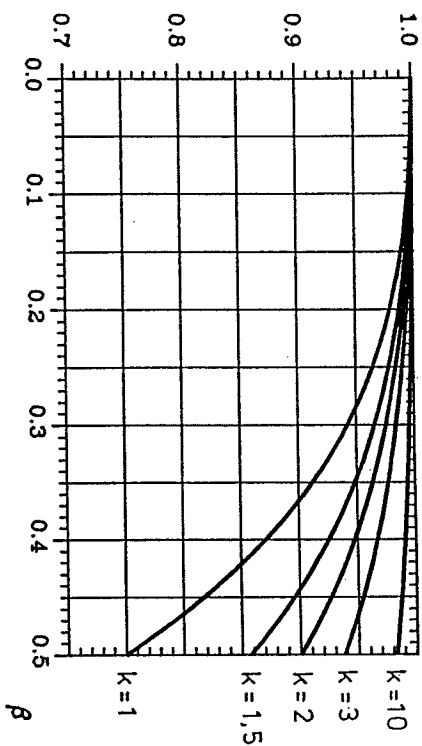
som er Breddt's formel. Regnes  $t_c$  og  $\beta$  at have samme værdi i henholdsvis formel (7.53) og (7.9), er forholdet mellem de to herved bestemte vridningsbæreevner  $\delta$ , som vist i figur 7.22.

Som det fremgår af figur 7.22, vil vridningsbæreevnen bestemt efter Breddt's formel, maksimalt på den sikre side, afvige 30% i forhold til den korrekte løsning.

Som anført i afsnit 7.3.2 kan  $t_o$  findes som en løsning til  $f_{t\lambda} + f_{tb} = \nu_t f_c$ , eller idet (7.25)-(7.26) benyttes

$$\frac{A_b f_{yb}}{t_o} + \frac{A_\lambda f_{y\lambda}}{2 t_o (h_e + b_e - 2 t_o)} = \nu_t f_c \quad (7.54)$$

6



Figur 7.22: Bredt's formel kontura formel (7.9).

For små værdier af  $t_o$ , det vil sige  $\phi_b \ll \frac{1}{2}v_t$  og  $\phi_\lambda \ll \frac{1}{2}v_t$ , ses det  $t_o$ , der indgår i parentesledet, at have en negligibel indflydelse på værdien af venstresiden i (7.54), og  $t_o$  kan som en tilnærmelse på den usikre side bestemmes af

$$t_o = \frac{1}{v_t f_c} (A_{b\lambda} f_{yb} + \frac{A_\lambda f_{y\lambda}}{2(h_e + b_e)}) \quad (7.55)$$

For store værdier af  $t_o$  kan  $t_o$ , som en tilnærmelse på den sikre side, bestemmes af

$$t_o = \frac{1}{v_t f_c} (A_{b\lambda} f_{yb} + \frac{A_\lambda f_{y\lambda}}{2h_m}) \quad (7.56)$$

Der skal ikke her foretages nogen detaljeret vurdering af den fejl, der begås ved at anvende (7.55) eller (7.56) i forhold til det korrekte udtryk (7.22). Det skal kun bemærkes, at for  $\lambda \geq 0,25$  vil afvigelsen, i det værste tilfælde, være cirka 60%.

Derimod skal interessen her knyttes til en samtidig brug af (7.55) eller (7.56) og (7.53). Som det fremgår af figur 7.22, giver udtrykket (7.53) en vridningsbæreevne på den sikre side. Kombineres nu (7.53) med  $\beta$  bestemt ved (7.55), som giver en  $\beta$ -værdi på

den usikre side, og sammenlignes den herved bestemte vridningsbæreevne med den korrekte løsning, fås det at hvis  $\lambda \geq 0,25$  og  $\phi_\lambda \leq 0,30$ , vil afvigelsen, på den usikre side, maksimalt være cirka 7%. Det bemærkes, at jo større  $\lambda$  og jo mindre  $\phi_\lambda$  er, jo mindre vil divergensen være. Benyttes i stedet for (7.55) udtrykket (7.56) til bestemmelse af  $\beta$ , vil den fundne bæreevne altid være på den sikre side. Afvigelsen, i forhold til den korrekte model, er i store træk som vist i figur 7.22.

Uden at begå nogen væsentlig fejl kan  $v_t$ , som en approksimation, sættes til  $v_t = 0,45$  for  $k \leq 3$  og  $v_t = 0,55$  for  $k \geq 4$ .

## 7.6 ANDRE TVÆRSNIT OG ARMERINGSUDFORMNINGER

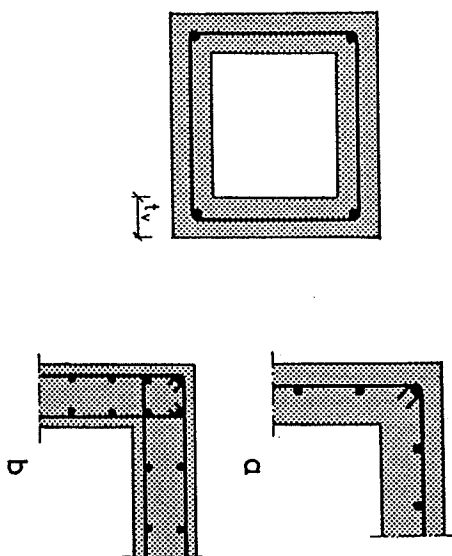
Den plasticitetsteoretiske beregningsmodel, beskrevet i de foregående afsnit, kan udstrækkes til at gælde for en vilkårlig jernbetonbjælke påvirket til vridning. I dette afsnit vil nogle overordnede forhold vedrørende bæreevnebestemmelsen i det generelle tilfælde blive berørt.

For bjælker med hult, rektangulært tværsnit, se figur 7.23, kan bæreevneudtrykkene i afsnit 7.2.1-7.2.5 anvendes direkte, idet  $\beta_\lambda$  dog højst må antage værdien  $\beta_v$ , der er bestemt ved

$$\beta_v = \frac{t_v - c}{b_m} \quad (7.57)$$

hvor  $t_v$  betegner flangernes tykkelse, jævnfør figur 7.23.

For kassedragere, det vil sige bjælker hvor  $t_v \ll \min(b, h)$ , kan beregningsudtrykkene i kapitel 3 anvendes direkte, idet  $t_v$  som en tilnærmelse kan regnes jævnt fordelt over hele flangetykkelsen  $t_v$ . Anvendes som tværamerung en enkelt lukket bøjle, som vist i figur 7.23a, anvendes for effektivitetsfaktoren  $v_t$ .



Figur 7.23: Bjælker med halvt, rektangulært tværsnit.

Består tværarmeringen derimod af lukkede bøjler i de enkelte flanger, som vist i figur 7.23b, kan effektivitetsfaktoren hæves til  $v_s$ , hvor  $v_s$  er effektivitetsfaktoren for forskydning, se afsnit 6.4.

Generelt kan vridningsbæreevnen, idet bjælkerne forudsættes normalarmerede, bestemmes af følgende udtryk

$$f_{tb} = \frac{A_{b\lambda} f_{yb}}{t_o} \quad (7.58)$$

$$f_{t\lambda} = \frac{A_{\lambda} f_{y\lambda}}{A_{ef}} \quad (7.59)$$

$$f_{t\lambda} + f_{tcb} = v_s^* f_{tc} \quad (7.60)$$

$$T_p = S_{ef} T_t = S_{ef} \sqrt{f_{tb} f_{t\lambda}} \quad (7.61)$$

Parametrene  $A_{ef}$  og  $S_{ef}$  betegner det effektive tværsnits henholdsvis areal og kræfters statiske moment om det geometriske tyngdepunkt, mens  $v_s^*$  er effektivitetsfaktoren i det generelle tilfælde.

For et givet tværsnit kan et udtryk for  $A_{ef}$  opstilles, og  $t_o$  kan findes ved hjælp af udtrykket (7.60), hvorefter vridningsbæreevnen kan bestemmes af (7.61). Som en tilnærmelse kan  $S_{ef}$  udtrykkes ved  $S_{ef} = 2 t_o A_x$ , hvor  $A_x$  er arealet af området beliggende indenfor midtlinjen af det effektive tværsnit. Anvendelse af dette udtryk fører til Bredts formel.

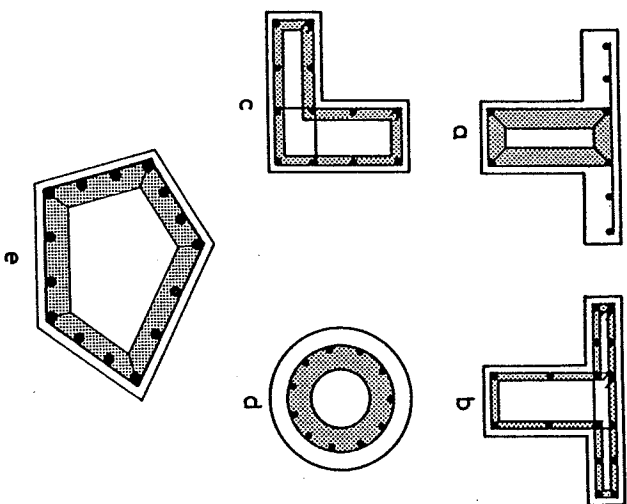
Overarmerede bjælker vil ikke blive behandlet her, kun henledes opmærksomheden på at dele af bjælketværsnittet kan være overarmet, mens resten af tværsnittet er normalarmet, hvilket blandt andet kan indtræffe for de i figur 7.24b og c viste tværsnit. Endvidere bemærkes det, at problemet med et lokalt maksimumspunkt i det normalarmerede område også optræder ved vilkårlige tværsnit. Ønskes der en mere korrekt beregning, kan principperne for bestemmelsen af  $\beta_{\lambda}$  i afsnit 7.2.5, benyttes til fastlæggelse af en tilsvarende grænseværdis  $t_{\lambda}$  for det aktuelle tværsnit.

P. Müller [76.2] har anvist en brudmekanisme for et vilkårligt polygonal tværsnit. Der henvises til referencen for en mere uddybende beskrivelse.

I figur 7.24 er eksempler på effektive tværsnit vist for nogle forskellige bjælketværsnit.

Generelt gælder det, at det effektive tværsnit kun må udstrækkes til de områder af bjælketværsnittet, hvor der optræder lukkede bøjler, eller armering der kan sidestilles hermed. Således må kun kroppen, for bjælken vist i figur 7.24a, regnes spændingsaktiv, mens det for T-bjælken vist i figur 7.24b gælder, at også flangen må medregnes til det effektive tværsnit. Den vridningsbæreevne der herved findes for førstnævnte bjælkes vedkommende vil, afhængig af flangens størrelse og armeringsudformning, være en konservativ løsning, da flangen i et vist omfang vil medvirke ved vridningsoptagelsen. Hvor stor en del af flangen, der i disse tilfælde kan medregnes til det effektive tværsnit, kan kun verificeres ved hjælp af forsøg.

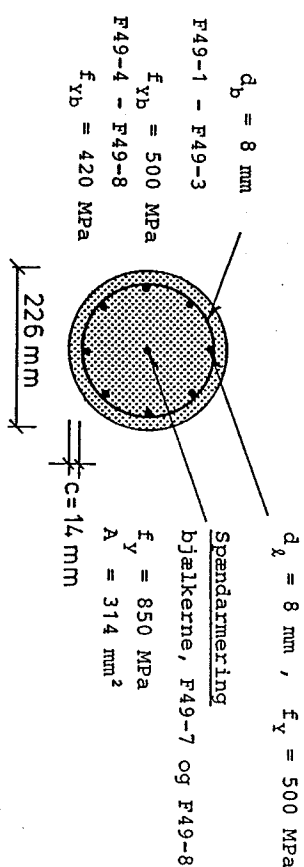
Anvendes der til eksempel for T-bjælken vist i figur 7.24b forskellig bøjlearmering i henholdsvis flange og krop, kan der regnes med en forskellig værdi af det effektive tværsnits tykkelse for de to delområder, under den forudsætning, at  $T_{t1} T_{o1}$  antager samme værdi for alle delområder af det effektive tværsnit.



Figur 7.24: Eksempler på effektive tværsnit.

Desværre eksisterer der kun en begrænset mængde forsøg med ikke rektangulære tværsnit, hvilket vanskeliggør en vurdering af effektivitetsfaktoren  $v_e^*$  i det generelle tilfælde. Er bjælketværsnittet opbygget af rektangulære delområder, ses den primære afvigelse med hensyn til  $v_e$ , der gælder for rektangulære tværsnit, at være et forøget antal overgangsområder mellem felterne med tykkelsen  $t_o$ . Hvor stor en indflydelse dette har på effektivitetsfaktoren, har det desværre ikke været muligt at afgøre. For normalarmerede bjælker kan  $v_e^* = 0,45$  dog formodentlig anvendes, indtil et bedre forsøgsmateriale foreligger.

R. Lenschow og M. Bergholdt har udført forsøg med bjælker, hvor tværsnittet var cirkulært. Resultaterne er ikke publiceret. I tabel 7.2 er en beregning baseret på  $v_e^* = 0,45$  sammenlignet med forsøgsresultaterne. Parametrene  $A_{ef}$  og  $S_{ef}$  antages her værdierne  $A_{ef} = \pi t_o (2R_e - t_o)$  og  $S_{ef} = \frac{2}{3} \pi [R_e^3 - (R_e - t_o)^3]$ , idet  $R_e$  betegner tværsnittets effektive radius. For  $\beta_x$  er værdien  $\beta_x = \frac{1}{2}$  anvendt.



| Bjælke nr. | Antal længejern | Bøjler stk./s | $f_c$ MPa | $t_o$ mm | Arm.- tilfælde | $T_p$ kNm | $T_E$ kNm |
|------------|-----------------|---------------|-----------|----------|----------------|-----------|-----------|
| F49-1      | 8               | 1/80          | 27,8      | 63       | NA             | 11,9      | 11,0      |
| F49-2      | 24              | 2/50          | 44,5      | 99       | OA             | 20,4      | 27,5      |
| F49-3      | 24              | 1/80          | 44,5      | 99       | OAL            | 14,9      | 13,8      |
| F49-4      | 8               | 2/50          | 34,9      | 99       | OAB            | 15,7      | 14,5      |
| F49-5      | 8               | 1/80          | 39,2      | 38       | NA             | 13,4      | 10,0      |
| F49-6      | 24              | 2/50          | 31,0      | 99       | OA             | 14,2      | 21,6      |
| F49-7      | 3               | 1/80          | 37,3      | 64       | NA             | 14,0      | 13,9      |
| F49-8      | 18              | 2/50          | 29,1      | 99       | OA             | 13,3      | 25,2      |

Tabel 7.2: Forsøg med bjælker hvor tværsnittet var cirkulært.

Den store afvigelse for nogle af bjælkerne vedkommende skyldes formodentlig, at afskaling enten ikke fandt sted eller var af minimalt omfang. Det eneste der med sikkerhed kan siges er, at dæklaget skallede af på bjælkerne F49-1, F49-4 og F49-7, før vridningsbæreevnen blev nået. Iøvrigt kan det om cirkulære tværsnit bemærkes, at desto mere jævnt fordelt armeringen er, desto fordelagtigere vil dette være for vridningsbæreevnen.

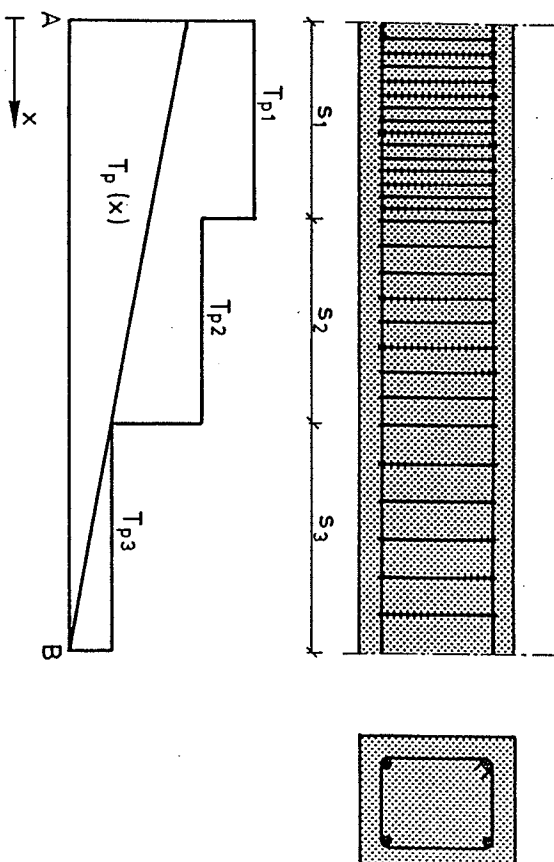
Langt de fleste bjælker, man støder på i praksis, har en armeringsudformning, som den i figur 7.2 viste, hvorfor andre typer udformninger af armeringen her kun vil blive berørt periferet.

Anvendes spiralarmring som tværarmring, kan formlerne for skævvinkelarmring bruges, jævnfør afsnit 3.6. Speciel opmærksomhed bør i dette tilfælde henledes på, hvorvidt tværarmringen er tilstrækkeligt forankret i hjørnerne.

For større kassedragere kan den langsgående spændarmring være indlagt under en vis vinkel med bjælkens længdeakse. I disse tilfælde bør, indtil yderligere undersøgelser er foretaget, kun spændarmringens komponent efter længdeaksen regnes aktiv, selvom dette formentlig fører til en konservativ beregning, da spændarmringens tværkomponent bidrager til bæreevnen, analog til opbøjet spændarmring beskrevet i afsnit 6.5.1. D. Mitchell et al. [74.1] har udført et enkelt forsøg med en bjælke som her beskrevet.

I praksis vil man sjældent opleve vridningspåvirkninger, der varierer med  $x$ , med mindre denne påvirkning er kombineret med andre snitkræfter. Ikke desto mindre skal det lidt fiktive specialtilfælde, ren vridning  $T(x)$ , behandles for at give et indtryk af de forhold, der skal tages i betragtning ved denne type belastning. Selv om spændingsforholdene i dette tilfælde minder meget om de, der optræder i det analoge forskydningsstilfælde, jævnfør afsnit 6.5.1, bør vridningsbæreevnefunktionen  $T_p(x)$  indtil videre ikke regnes større end, at den overalt opfylder betingelsen  $T_p(x) \leq T_{p1}$ , hvor  $T_{p1}$  betegner bæreevnen for de enkelte delintervaller af bjælken, hvor armeringen er uafhængig af længdekoordinaten  $x$ . Et eksempel på en sådan bæreevnebestemmelse er illustreret i figur 7.25, idet  $T_p(x)$  her er lineær og har værdien  $T_p(x) = 0$  i punktet B.

For at ovennævnte løsning er statisk tilladelig, skal der anvendes samme værdi for  $\theta$  i alle delfelterne. I overensstemmelse med afsnit 6.5.1, sker der dog næppe noget ved at bruge den optimalt værdi for  $\theta$  i hvert delfelt, specielt ikke da løsningen i forvejen er konservativ. Forsigtighed bør dog udvises i de tilfælde hvor  $\theta$ -værdierne, der hører til to nabofelter, afviger væsentligt fra hinanden.



Figur 7.25: Eksempel på hvorledes vridningsbæreevnefunktionen  $T_p(x)$  kan bestemmes.

## 7.7 ARMERINGSBESTEMMELSE

For en bjælke, der er udsat for en given vridningspåvirkning, kan den nødvendige armering bestemmes via formlerne i afsnit 3.7. Ved hjælp af tabel 3.1 findes minimalarmeringen at være bestemt ved, idet der regnes med lodrette bøjler

$$f_{tk} = \sqrt{\lambda} \cdot t_t \quad (7.62)$$

$$f_{td} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot t_t \quad (7.63)$$

hvor  $\lambda$  her antager værdien  $\lambda = \frac{f_{y2}}{f_{yb}}$ .

For bjælker med rektangulært tværsnit kan armeringsmængden således bestemmes af, idet (7.8), (7.25) og (7.26) er benyttet

$$A_{bl} = \frac{1}{f_{yb} \sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{2[\frac{4}{3} t_o^2 - (h_e + b_e) t_o + h_e b_e]} \quad (7.64)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\lambda}}{f_{yl}} \frac{\pi(h_e + b_e - 2t_o)}{[\frac{4}{3} t_o^2 - (h_e + b_e) t_o + h_e b_e]} \quad (7.65)$$

Af tabel 3.1 ses det enkeltbetontryk  $\sigma_c$ , at være bestemt ved

$$\sigma_c = \tau_t \left( \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \leq \nu_t f_c \quad (7.66)$$

For en bjælke med rektangulært tværsnit kan  $t_o$ , idet  $\sigma_c$  regnes at have værdien  $\sigma_c = \nu_t f_c$ , således fastlægges ved hjælp af ligningen

$$\frac{\pi}{2t_o [\frac{4}{3} t_o^2 - (h_e + b_e) t_o + h_e b_e]} \left( \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) = \nu_t f_c \quad (7.67)$$

Til simplificering af (7.64), (7.65) og (7.67) kan de i afsnit 7.5 angivne udtryk anvendes.

Ønskes der en bestemt armeringsmængde efter den ene retning, kan udtrykkene (3.54)-(3.55) benyttes i stedet for (7.62)-(7.63).

For bjælker med ikke rektangulære tværsnit forløber armeringsbestemmelsen efter samme procedure som angivet ovenfor, idet udtrykkene (7.58)-(7.61) benyttes. For et valgt  $\theta$ , kan  $t_o$  bestemmes af

$$\pi = S_{ef} \nu_t^* f_c \sin \theta \cos \theta = S_{ef} \nu_t^* f_c \frac{1}{\cot \theta + \tan \theta} \quad (7.68)$$

Når  $t_o$  er bestemt, kan den nødvendige armering bestemmes af

$$A_{bl} = \frac{A_b}{s} = \frac{\pi t_o}{f_{yb} S_{ef}} \tan \theta \quad (7.69)$$

$$\lambda = \frac{\pi A_{ef}}{S_{ef} f_{yl}} \cot \theta \quad (7.70)$$

Iøvrigt henvises der til de generelle betragtninger i afsnit 7.6 vedrørende bjælker med vilkårligt tværsnit.

Ved fastlæggelse af selve armeringsudformningen bør følgende forhold tages i betragtning:

- Der skal altid placeres længearmen i tværsnittets hjørner til sikring af bøjlernes forankring.
- Desto større del af længearmeringen der placeres i tværsnittets hjørner, desto gunstigere indvirkning vil dette have på vridningsbæreevnen. Af hensyn til revneviddernes størrelse bør dog for større tværsnit en vis del af længearmeringen placeres langs tværsnittets rande.
- Kun den om tyngdepunktet symmetrisk beliggende længearmeringsflydekraft må regnes aktiv.
- Bøjleafstanden  $s$  skal opfylde betingelsen  $s \leq \gamma b_m \cot \theta \leq \gamma b_m$
- Af revneviddereducerende årsager bør, indtil der eksisterer bedre metoder til bestemmelse af revnevidderne, betontrykrets hældning vælges indenfor følgende interval  $\frac{1}{2} \leq \cot \theta \leq 2$ .
- Dæklaget vælges så lille som muligt.
- Dæklaget må kun regnes med til det effektive tværsnit, hvis det kan eftervises, at der ingen fare er for afskallning. Selvom der ikke sker afskallning af dæklaget, kan dette ikke altid fuldt ud regnes aktiv ved vridningsoptagelsen.

## 8 KOMBINERET VRIDNING OG BØJNING.

I dette kapitel vil beregningsudtryk, for en bjælke påvirket til kombineret vridning og bøjning, blive udledt, således at en (T-M)-flydeflade kan konstrueres.

Kombineret vridning og bøjning er behandlet i et utal af referencer. For langt den overvejende del af disse referencer, munder den teoretiske behandling af problemstillingen ud i flydebetingelser på formen  $f = (\frac{M}{M_p}, \frac{T}{T_p})$ , hvor  $M_p$  og  $T_p$  er de rene bæreevner. Som oftest fastlægges funktionsudtrykket  $f$  ved hjælp af forsøg.

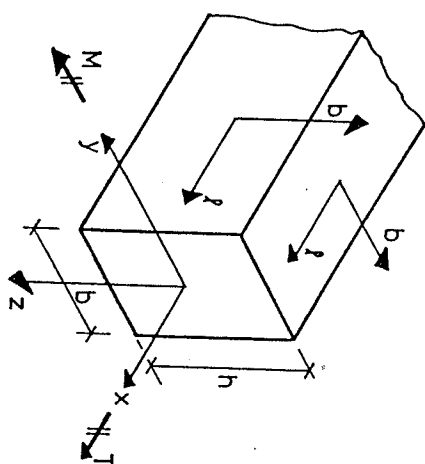
Den plasticitetsteoretiske model, der benyttes i det følgende, tager i modsætning til ovennævnte udgangspunkt i den aktuelle spændingsfordeling, således at den er generelt anvendelig for bjælker med en vilkårlig armeringsudformning, herunder armeringsmængde.

I afsnit 8.8.2 vil en simpel beregningsmodel blive anført.

### 8.1 BJÆLKEBESKRIVELSE

I det følgende betragtes en vandret jernbetonbjælke med massivt, rektangulært tværsnit. Til beskrivelse af bjælken anvendes som tidligere - se afsnit 7.1 - koordinatsystemerne vist i figur 8.1.

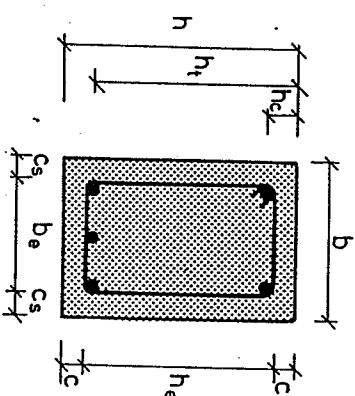
Fortegnsregningen for snitkræfterne vælges som vist i figur 8.1. Det betragtede bjælkestykke antages påvirket af et konstant positivt vridningsmoment og et konstant positivt bøjningsmoment. Bjælakens snitmomenter regnes således at være uafhængige af bjælakens



Figur 8.1: Bjælkebeskrivelse.

længdekoordinat  $x$ . Bæreevneudtrykkene, som findes i afsnit 8.2-8.7, er invariante med hensyn til fortegnet af vridningsmomentet. For negative bøjningsmomenter kan de samme bæreevneudtryk benyttes, under forudsætning af at bjælakens overside defineres at være dens underside.

Bjælakens armeringsudformning samt tværsnitsdata fremgår af figur 8.2.



Figur 8.2: Bjælketværsnit.

Vedrørende betegnelser m.m. henvises til afsnit 4.1 og 7.1. Som en simplifikation vil det blive antaget, at dæklaget i over- og undersiden samt langs siderendene er ens, det vil sige  $c = c_o = c_u$  og  $c_s = c_v = c_h$ .

Betonens ideal-plastiske trykstyrke vil, hvor der optræder både forskydnings- og normalspændinger, blive benævnt  $v_{bt} f_c$ .

Bjælkens rene bøjningsbæreevne samt vridningsbæreevne benævnes henholdsvis  $M_p$  og  $T_p$ .

For stringernes flydekrafter vil følgende betegnelser blive anvendt

$$T_t = A_{st} f_{yt}$$

(8.1)

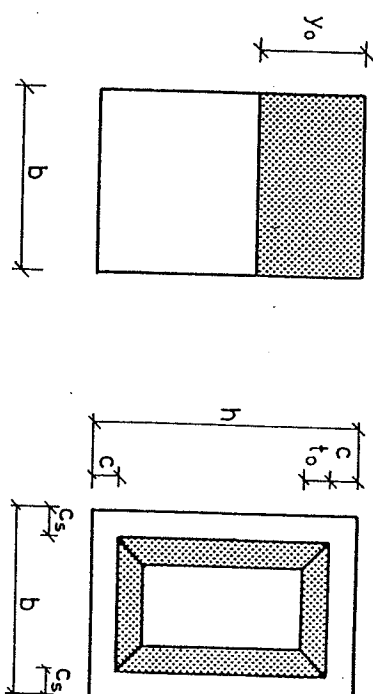
$$T_c = A_{sc} f_{yc} \quad , \quad T_c^* = A_{sc} f_{yc}^*$$

Bjælker med andre tværsnit, armeringsudformninger samt belastninger vil blive behandlet i afsnit 8.8.

## 8.2 STATISK TILLADELIG SPÆNDINGSFORDELING

De to spændingsfordelinger, vist i figur 8.3, som svarer til optagelsen af henholdsvis ren bøjning og ren vridning, skal søges kombineret til en spændingsfordeling, der gælder for kombineret vridning og bøjning.

For at opnå en rimelig simpel beregningsmodel viser det sig hensigtsmæssigt at operere med et effektivt tværsnit, der har samme tykkelse over hele tværnittet. En mere optimal spændingsfordeling kunne eventuelt være fundet ved at benytte en anden tykkelse af det effektive tværsnit, hvor der optræder normalspændinger. En sådan beregningsmodel vil dog føre til et antal ulineære ligninger, som ikke kan løses direkte analytisk. Den bæreevneforøgelse, der eventuelt ville kunne opnås ved at anvende en sådan spændingsfordeling, er dog minimal.



Figur 8.3: Trykzonen ved ren bøjning og det effektive tværsnit ved ren vridning.

Den beregningsprocedure, der vil blive benyttet i det følgende, er kort beskrevet: Analog til det rene vridningstilfælde, bestemmes, for et givent vridningsmoment, det effektive tværsnit og de hertil hørende parametre. Af betingelsen for tværnittets længde-ligevægt fastlægges trykzonehøjden, og dermed, ved hjælp af kravet om bøjningsligevægt, bøjningsbæreevnen.

Ovennævnte spændingsfordeling opfylder grænsebetingelserne, det vil sige  $M + M_p$  for  $T + 0$  og  $T + T_p$  for  $M + 0$ .

Som det fremgår af tabel 4.1, eksisterer der for ren bøjning fire beregningstilfælde afhængig af trykzonehøjden. Disse fire tilfælde vil i den følgende analyse blive fastholdt som hovedtilfælde. Indenfor det enkelte hovedtilfælde vil der, afhængig af det effektive tværsnits tykkelse, kunne fremkomme et vist antal undertilfælde. I figur 8.4 er de ialt ti beregningstilfælde, der vil kunne optræde, vist. Trykzonehøjden og tykkelsen af det effektive tværsnit er kaldt henholdsvis  $y_k$  og  $t_k$ .

Som det fremgår af figur 8.4, regnes dæklaget at optage tryknormalspændinger. I overensstemmelse med figur 7.5 kan hjørnedæklaget, eller endnu værre hele dæklaget, springe af før bæreevnen nås. Da det enaksede betontryk i trykzonen, jævnt over de følgende afsnit,

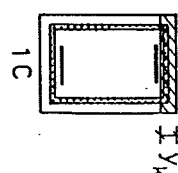
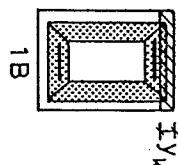
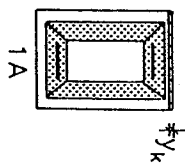
tilfælde 1  $0 \leq y_k < h_c$ 

$$y_k \leq c$$

$$c \leq y_k < h_c$$

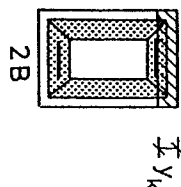
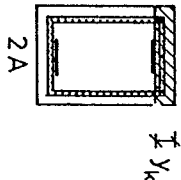
$$y_k \leq t_k + c$$

$$y_k \geq t_k + c$$

tilfælde 2  $y_k = h_c$ 

$$t_k \leq h_c - c$$

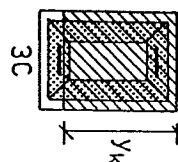
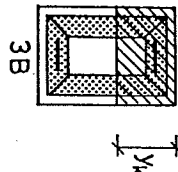
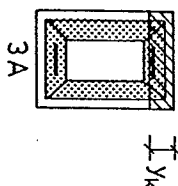
$$t_k \geq h_c - c$$

tilfælde 3  $h_c \leq y_k \leq h_t$ 

$$y_k \leq t_k + c$$

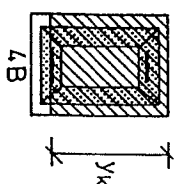
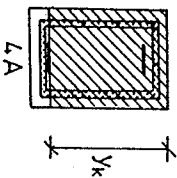
$$t_k + c \leq y_k \leq h_e + c - t_k$$

$$y_k \geq h_e + c - t_k$$

tilfælde 4  $y_k = h_t$ 

$$t_k \leq h_e + c - h_t$$

$$t_k \geq h_e + c - h_t$$



Figur 8.4: Beregningsstilfælde.

har en minimal hældning i forhold til længdeaksen, vil størrelsen af det enaksede betontryks komponent efter bjælereningen være minimal, hvilket begrænser faren for afskallning. Forsøg synes fuldt ud at bekræfte dette forhold. For bjælker, hvor trykzonehøjden antager en værdi nær ved  $h_e$ , og som samtidig er påvirket af et stort vridningsmoment, bør en vis forsigtighed dog udvises, indtil bedre undersøgelser af dette emne foreligger.

Bemærk, at for den beregningsmetode der anvendes i det følgende, vil alene størrelsesordenen af bøjningsbæreevnen være influeret af hvorvidt afskallning finder sted. Ved at se bort fra dæklaget kan en sikker bøjningsbæreevne bestemmes.

Forholdene vedrørende afskallningen af dæklaget, herunder specielt hvilken indflydelse dette har på bæreevnebestemmelsen, vil blive yderligere behandlet i afsnit 8.7.

### 8.3 BÆREEVNEBESTEMMELSE

I dette afsnit vil selve beregningsudtrykkene blive udledt. For at simplificere problemstillingen, regnes der kun med vridningspåvirkninger, der er mindre end eller lig med bjælkernes rene vridningsbæreevne. I afsnit 8.4 udvides beregningsmodellen til også at omfatte vridningspåvirkninger, der er større end de, der svarer til den rene vridningsbæreevne.

#### 8.3.1 Beregningsmetode

For et kendt vridningsmoment,  $T \leq T_p$ , kan tykkelsen  $t_k$  af det effektive tværsnit bestemmes, idet der ses bort fra de til bøjningsmomentet hørende normalspændinger. Da de spændinger, der optræder i bøjlerne, alene stammer fra vridningsmomentet, vil  $t_k$  blive bestemt således, at bøjlearmeringen udnyttes optimalt. Dette betyder, at det enaksede betontryks vinkel med længdeaksen, vil være bestemt ved den størst mulige hældning.

Det enaksede betontryks komponent efter længdeaksen vil blive benævnt  $\sigma_t$  - positiv som tryk. For ren vridning er det længdear-

meringens opgave at holde ligevægt med trykspændingen  $\sigma_t$ . Da vridningsmomentet her er forudsat valgt således, at  $T \leq T_p$ , vil resultanten af spændingen  $\sigma_t$  altid være mindre end eller lig med flydekraftresultanten af den om bjælketværnsnittets tyngdepunkt symmetrisk beliggende langedarmering.

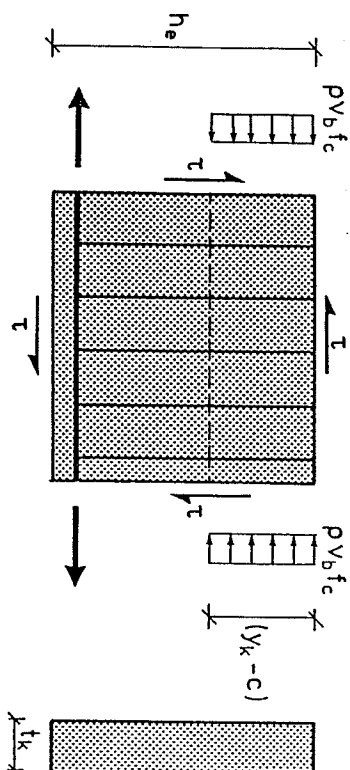
Medfører vridningspåvirkningen, at langedarmeringen i bjælketværnsnittets underside ikke er fuldt udnyttet til flydning, vil der kunne optages et bøjningsmoment  $M$ , der svarer til, at der kommer flydning i undersideaarmeringen, forudsat at den hertil svarende trykkræfteresultant kan optages af bjælketværnsnittet. De ti beregningsstilfælde, vist i figur 8.4, fremkommer derfor som en funktion af undersideaarmeringens flydekraftreserve, idet det primært er denne, der afgør højden af trykzonen - det vil sige værdien af  $Y_k$ .

Trykzonehøjden  $Y_k$  bestemmes af betingelsen for tværsnittets længdeligevægt. I denne ligevægtsligning indgår følgende spændinger og stringerkræfter:

- trækstringerkræften  $A_{st}f_{yt}$  (gælder dog ikke tilfælde 4).
- trykstringerkræften i form af trækkræften  $A_{tc}f_{yc}$  for tilfælde 1 og trykkræften  $A_{tc}f_{yc}^*$  for tilfældene 3 og 4.
- trykspændingen  $v_b f_c$  for de felter i trykzonen, hvor der ikke optræder forskydningspændinger.
- den reducerende trykspænding  $\rho v_b f_c$  ( $= \sigma_x$ ) for de felter i trykzonen, hvor der optræder forskydningspændinger.
- trykspændingen  $\sigma_t$  for de felter udenfor trykzonen, hvor der er forskydningspændinger.

Når  $Y_k$  er bestemt, kan bøjningsmomentet  $M$  bestemmes via kravet om bøjningsligevægt.

Betragtes et af de lodrette delfelter i det effektive tværsnit, jævnfør figur 8.3, fås således denne at have de ydre påvirkninger vist i figur 8.5.



Figur 8.5: Spændingspåvirkninger på det effektive tværsnits lodrette delfelter.

I de følgende afsnit vil beregningsudtryk til bestemmelse af ovenstående parametre blive givet.

### 8.3.2 Bestemmelse af $t_k$

I overensstemmelse med formel (7.8) fås af betingelsen for vridningsligevægt

$$T = 2t_k t_k \left[ \frac{4}{3} t_k^2 - (h_e + b_e) t_k + h_e b_e \right] \quad (8.2)$$

Idet bøjlerne forudsættes at flyde, fås af ligevægtsligningen efter bøjleretningen, jævnfør formel (7.18)

$$A_{b\lambda} f_{yb} = v_t f_c t_k \sin^2 \theta_k \quad (8.3)$$

Intern forskydningsligevægt i bjælken kræver, se formel (7.13)

$$t_k = v_t f_c \cos \theta_k \sin \theta_k \quad (8.4)$$

Elimineres  $\theta_k$  af (8.3) og (8.4) fås  $t_k$  at være bestemt ved

$$t_k = \frac{1}{t_k} \sqrt{A_{b\lambda} f_{yb} (v_t f_c t_k - A_{b\lambda} f_{yb})} \quad (8.5)$$

Indsættes  $t_c$  bestemt ved (8.5) i (8.2) fås følgende ligning til bestemmelse af  $t_k$

$$2 \sqrt{A_{b\lambda} f_{yb} (v_c f_c t_k - A_{b\lambda} f_{yb})} \left[ \frac{4}{3} t_k^2 - (h_e + b_e) t_k + h_e b_e \right] - T = 0 \quad (8.6)$$

Denne ligning kan kun løses med hensyn til  $t_k$  ved hjælp af iteration. Den fundne løsning for  $t_k$  kontrolleres for, om den ligger i det tilladelige interval.

Det effektive tværsnits tykkelse kan bestemmes af (8.6), sålænge bøjlernes kan regnes at flyde. Dette krav kan ikke regnes opfyldt, hvis det efter bøjleretningen gælder, dels at det enaksede betontryks komponent er for lille, og dels at armeringsmængden er for stor.

For at bøjlernes kan regnes at flyde, kræves ifølge (8.3)

$t_k \geq \frac{A_{b\lambda} f_{yb}}{v_c f_c}$ . Dette krav ses at stemme overens med den grænseværdi for  $t_k$ , der fås ved at lade  $T + 0$  i (8.6). Selv om  $T + 0$  ikke fører til  $t_k + 0$ , kan udtrykket (8.6) dog godt bruges for  $T + 0$ , idet det i overensstemmelse med (8.5) gælder, at  $t_c + 0$  for  $T + 0$ . Ovenstående forudsætter dog, at  $A_{b\lambda} f_{yb} < \frac{1}{2} v_c f_c b_m$  eller, idet parametrene fra kapitel 7 anvendes,  $\phi_b < v_c$ .

For  $\phi_b \geq v_c$  fås det umiddelbart, at  $t_k = \frac{1}{2} b_m$ . Indsættes denne værdi for  $t_k$  i (8.2) fås  $t_c$  i dette tilfælde at være bestemt ved

$$t_c = \frac{2T}{(k - \frac{1}{3}) b_m^3} \quad (8.7)$$

Ovenstående beregningsprocedure medfører at for  $T + 0$  vil

$$t_k + \frac{A_{b\lambda} f_{yb}}{v_c f_c} \text{ og } \theta_k + \frac{\pi}{2}.$$

Betontykhældninger af denne størrelsesorden accepteres sjældent ved dimensionering på grund af faren for store revnevidder. Ved at indføre en grænseværdi for hældningen af det enaksede betontryk, her kaldet  $\theta_{\lambda\lambda}$ , kan  $\theta_k$ , når  $\theta_{\lambda\lambda}$  nås, sættes til  $\theta_k = \theta_{\lambda\lambda}$ .

Benævnes det til  $\theta_{\lambda\lambda}$  hørende vridningsmoment  $T_{\lambda\lambda}$ , gælder det altså, at for  $T \geq T_{\lambda\lambda}$  anvendes ligningerne (8.2)-(8.7), mens for  $T \leq T_{\lambda\lambda}$ , hvor  $\theta_k = \theta_{\lambda\lambda}$ , kan  $t_c$  bestemmes direkte af (8.4) og dermed  $t_k$  af (8.2). Bemærk, at  $t_c$  har samme værdi for alle  $T \leq T_{\lambda\lambda}$ , samt at det her gælder, at  $t_k + 0$  for  $T + 0$ .

### 8.3.3 Bestemmelse af $\sigma$ ,

Det enaksede betontryks komponent efter længdeaksen er bestemt ved

$$\sigma_t = v_c f_c \cos^2 \theta_k \quad (8.8)$$

Regnes bøjlernes at flyde ved brud, det vil sige  $t_k$  er bestemt efter (8.6), kan  $\theta_k$  findes af (8.3). Indsættes den herved fundne værdi for  $\theta_k$  i (8.8), kan  $\sigma_t$  bestemmes af

$$\sigma_t = v_c f_c - \frac{A_{b\lambda} f_{yb}}{t_k} \quad (8.9)$$

Kan bøjlernes ikke regnes at flyde, det vil sige  $\phi_b \geq v_c$ , kan  $\theta_k$  bestemmes af (8.4), idet det vides at  $\theta_k \geq \frac{\pi}{4}$ . For  $\theta_k$  fås i dette tilfælde

$$\theta_k = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{Arcsin} \left( \frac{2T}{v_c f_c} \right) \quad (8.10)$$

og dermed  $\sigma_t$  af (8.8).

Indføres grænsebetingelsen  $\theta_k \geq \theta_{\lambda\lambda}$ , fås  $\sigma_t$  direkte af (8.8) for  $T \leq T_{\lambda\lambda}$ , ved at anvende værdien  $\theta_k = \theta_{\lambda\lambda}$ .

### 8.3.4 Bestemmelse af $\rho$ ,

Som det fremgår af figur 8.4, kan trykzonehøjden være så stor, at der vil være felter indenfor trykzonen, i hvilke der optræder

forskydningsspændinger. For disse felter kan der ikke regnes med en trykzonesspænding på  $\nu_b f_c$ , men derimod en reduceret tryknormalspænding  $\sigma_x = \rho \nu_b f_c < \nu_b f_c$ .

Betragtes den del af spændingsfeltet i figur 8.5, hvor der er en normalspænding på  $\rho \nu_b f_c$ , vil det blive antaget, at forholdene her kan regnes identiske med de i afsnit 3.5 angivne. Forskydnings-spændingen  $\tau_t$  regnes givet ved formlerne i afsnit 8.3.2. Opgaven er således at fastsætte netop den normalspænding  $\sigma_x = \rho \nu_b f_c$ , der giver anledning til flydning.

Betragtes figur 3.16 ses det, at flydebetingelsen (3.42) vil kunne anvendes for et vilkårligt  $\tau$  til bestemmelse af  $\sigma_x$ .

Da trykarmeringen indgår i længdeligevægtsligningen som en stringer, ses der bort fra denne armering, og (3.42) får med de her anvendte symboler følgende udseende

$$-(\nu_b f_c - \sigma_x) \sigma_x + \tau_t^2 = 0 \quad (8.11)$$

Løses denne ligning med hensyn til  $\sigma_x$  fås

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\nu_b f_c + \sqrt{(\nu_b f_c)^2 - 4\tau_t^2}) \quad (8.12)$$

En betingelse for anvendelse af (8.12) er, at det enaksede betontryks komponent efter bøjlerenningen kan optages af bøjlerne, det vil sige

$$\nu_b f_c t_k \sin^2 \theta_{bt} \leq A_{bl} f_{yb} \quad (8.13)$$

eller idet  $\theta_{bt}$  elimineres og der for  $\sigma_x$  anvendes  $\rho \nu_b f_c$ .

$$(\rho \nu_b - \nu_{bt}) \geq - \frac{A_{bl} f_{yb}}{t_k f_c} \quad (8.14)$$

Er (8.14) ikke opfyldt, kan  $\sigma_x$  regnes bestemt ved

$$\sigma_x = \nu_b f_c - \frac{A_{bl} f_{yb}}{t_k} \quad (8.15)$$

### 8.3.5 Bestemmelse af $Y_k$ og $M$

Trykzonehøjden  $Y_k$  og bøjningsmomentet  $M$  bestemmes efter samme princip som angivet i kapitel 4. Udtrykkene for de enkelte beregningsstørrelser, vist i figur 8.4, er angivet nedenfor, idet arealet af det effektive tværsnit er benævnt  $A_{ef}$ . Denne har, for en rektangulær bjælke, værdien

$$A_{ef} = 2t_k (b_e + h_e - 2t_k) \quad (8.16)$$

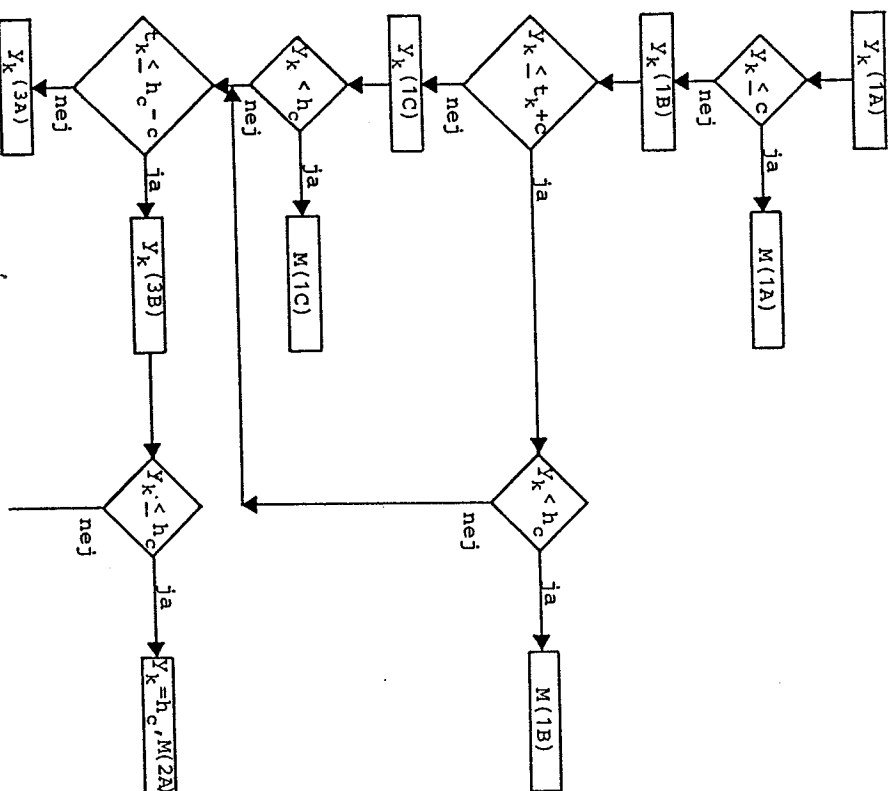
| tilfælde 1A                                                                                                                    |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| betingelse: $Y_k \leq c$                                                                                                       |  |
| $Y_k = \frac{T_t + T_c - A_{ef} \sigma_t}{b \nu_b f_c}$                                                                        |  |
| $M = \frac{1}{2} b Y_k (h - Y_k) \nu_b f_c + (h_t - \frac{1}{2} h) T_t - (\frac{1}{2} h - h_c) T_c$                            |  |
| tilfælde 1B                                                                                                                    |  |
| betingelse: $c \leq Y_k < h_c$ , $Y_k \leq t_k + c$                                                                            |  |
| $Y_k = \frac{T_t + T_c + b_e c (\sigma_x - \sigma_t - \nu_b f_c) - A_{ef} \sigma_t}{2c \nu_b f_c + b_e (\sigma_x - \sigma_t)}$ |  |
| $M = [\frac{1}{2} b_e c (h - c) + Y_k c (h - Y_k)] \nu_b f_c$                                                                  |  |
| $+ \frac{1}{2} b_e (Y_k - c) (h - c - Y_k) (\sigma_x - \sigma_t)$                                                              |  |
| $+ (h_t - \frac{1}{2} h) T_t - (\frac{1}{2} h - h_c) T_c$                                                                      |  |

| tilfælde 1C                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| betingelse: $c \leq Y_K < h_c$ , $Y_K \geq t_K + c$                                                                                                                                                                                                                                         |  |
| $Y_K = \frac{\pi_t + \pi_c - t_K(b_e - 2c - 2t_K)(\sigma_x - \sigma_t - \nu_b f_c) - A_e f_c \sigma_t}{(b - 2t_K)\nu_b f_c + 2t_K(\sigma_x - \sigma_t)}$                                                                                                                                    |  |
| $M = [\frac{1}{2}b_e c(h - c) + Y_K c_s(h - Y_K)]\nu_b f_c$ $+ \frac{1}{2}(b_e - 2t_K)(Y_K - c - t_K)(h - c - Y_K - t_K)\nu_b f_c$ $+ t_K[\frac{1}{2}(b_e - 2t_K)(h_e - t_K) + (Y_K - c)(h - c - Y_K)](\sigma_x - \sigma_t)$ $+ (h_t - \frac{1}{2}h)\pi_t - (\frac{1}{2}h - h_c)\pi_c$      |  |
| tilfælde 2A                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
| betingelse: $Y_K = h_c$ , $t_K \leq h_c - c$                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| $Y_K = h_c$                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
| $M = [b_e c(h_c - \frac{1}{2}c) + c_s h_c^2]\nu_b f_c$ $+ \frac{1}{2}(b_e - 2t_K)(h_c - c - t_K)^2\nu_b f_c$ $+ [(b_e - 2t_K)(h_c - c - \frac{1}{2}t_K) + (h_c - c)^2]t_K \sigma_x$ $- [(b_e - 2t_K)(h_e + c - h_c - \frac{1}{2}t_K) + (h_e + c - h_c)^2]t_K \sigma_t$ $+ (h_t - h_c)\pi_t$ |  |

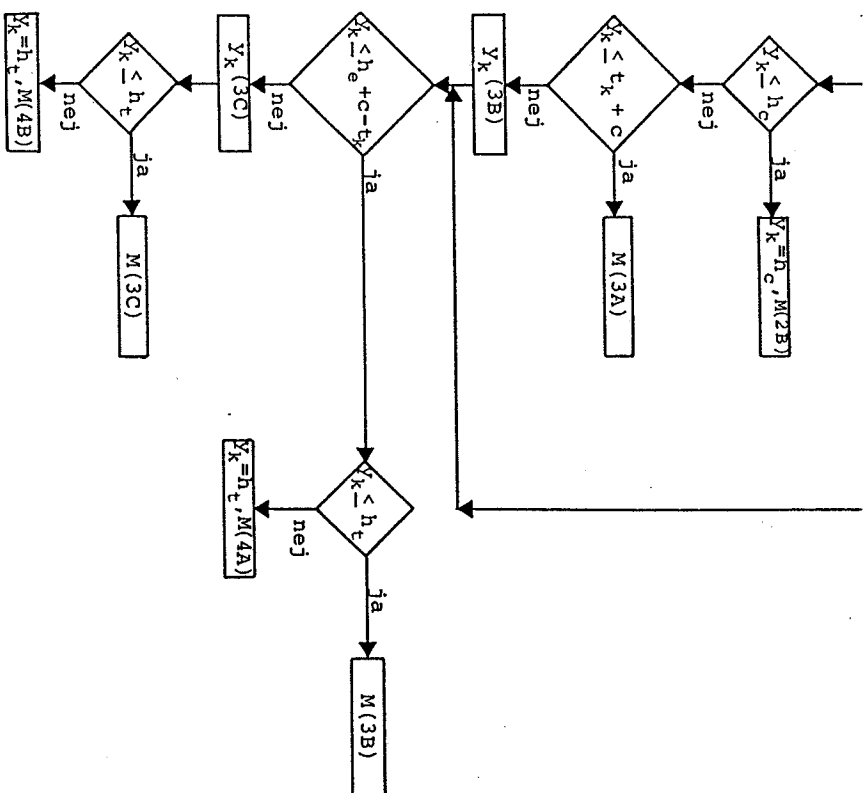
| tilfælde 2B                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| betingelse: $Y_K = h_c$ , $t_K \geq h_c - c$                                                                                                                                                                                                                                             |  |
| $Y_K = h_c$                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
| $M = [b_e c(h_c - \frac{1}{2}c) + c_s h_c^2]\nu_b f_c + \frac{1}{2}b_e(h_c - c)^2\sigma_x$ $- [(b_e - 2t_K)(h_e + c - h_c - \frac{1}{2}t_K) + (h_e + c - h_c)^2]t_K \sigma_t$ $- \frac{1}{2}(b_e - 2t_K)(t_K + c - h_c)^2\sigma_t$ $+ (h_t - h_c)\pi_t$                                  |  |
| tilfælde 3A                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
| betingelse: $h_c < Y_K \leq h_t$ , $Y_K \leq t_K + c$                                                                                                                                                                                                                                    |  |
| $Y_K = \frac{\pi_t - \pi_c^* + b_e c(\sigma_x - \sigma_t - \nu_b f_c) - A_e f_c \sigma_t}{2c\nu_b f_c + b_e(\sigma_x - \sigma_t)}$                                                                                                                                                       |  |
| $M = [\frac{1}{2}b_e c(h - c) + Y_K c_s(h - Y_K)]\nu_b f_c$ $+ \frac{1}{2}b_e(Y_K - c)(h - c - Y_K)(\sigma_x - \sigma_t)$ $+ (h_t - \frac{1}{2}h)\pi_t + (\frac{1}{2}h - h_c)\pi_c^*$                                                                                                    |  |
| tilfælde 3B                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
| betingelse: $h_c < Y_K \leq h_t$ , $t_K + c \leq Y_K \leq h_e + c - t_K$                                                                                                                                                                                                                 |  |
| $Y_K = \frac{\pi_t - \pi_c^* - t_K(b_e - 2c - 2t_K)(\sigma_x - \sigma_t - \nu_b f_c) - A_e f_c \sigma_t}{(b - 2t_K)\nu_b f_c + 2t_K(\sigma_x - \sigma_t)}$                                                                                                                               |  |
| $M = [\frac{1}{2}b_e c(h - c) + Y_K c_s(h - Y_K)]\nu_b f_c$ $+ \frac{1}{2}(b_e - 2t_K)(Y_K - c - t_K)(h - c - Y_K - t_K)\nu_b f_c$ $+ t_K[\frac{1}{2}(b_e - 2t_K)(h_e - t_K) + (Y_K - c)(h - c - Y_K)](\sigma_x - \sigma_t)$ $+ (h_t - \frac{1}{2}h)\pi_t + (\frac{1}{2}h - h_c)\pi_c^*$ |  |

|                                                                                                                                                               |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| tilfælde 3C                                                                                                                                                   |  |
| betingelse: $h_c < Y_k \leq h_t$ , $Y_k \geq h_e + c - t_k$                                                                                                   |  |
| $Y_k = \frac{T_t - T_c^* - [b_e c + (b_e - 2t_k)(h_e - 2t_k)]v_b f_c + b_e(h_e + c)(\sigma_x - \sigma_t) - A_e f_c^2}{2c v_b f_c + b_e(\sigma_x - \sigma_t)}$ |  |
| $M = [\frac{1}{2}b_e c(h - c) + Y_k c(h - Y_k)]v_b f_c$                                                                                                       |  |
| $+ \frac{1}{2}b_e(h_e + c - Y_k)(Y_k - c)(\sigma_x - \sigma_t)$                                                                                               |  |
| $+ (h_t - \frac{1}{2}h)T_t + (\frac{1}{2}h - h_c)T_c^*$                                                                                                       |  |
| tilfælde 4A                                                                                                                                                   |  |
| betingelse: $Y_k = h_t$ , $t_k \leq h_e + c - h_t$                                                                                                            |  |
| $Y_k = h_t$                                                                                                                                                   |  |
| $M = [b_e c(h_t - \frac{1}{2}c) + c h_t^2]v_b f_c$                                                                                                            |  |
| $+ \frac{1}{2}(b_e - 2t_k)(h_t - c - t_k)^2 v_b f_c$                                                                                                          |  |
| $+ [(b_e - 2t_k)(h_t - c - \frac{1}{2}t_k) + (h_t - c)^2]t_k \sigma_x$                                                                                        |  |
| $- [(b_e - 2t_k)(h_e + c - h_t - \frac{1}{2}t_k) + (h_e + c - h_t)^2]t_k \sigma_t$                                                                            |  |
| $+ (h_t - h_c)T_c^*$                                                                                                                                          |  |
| tilfælde 4B                                                                                                                                                   |  |
| betingelse: $Y_k = h_t$ , $t_k \geq h_e + c - h_t$                                                                                                            |  |
| $Y_k = h_t$                                                                                                                                                   |  |
| $M = [b_e c(h_t - \frac{1}{2}c) + c h_t^2]v_b f_c$                                                                                                            |  |
| $+ (b_e - 2t_k)(h_e - 2t_k)(h_t - \frac{1}{2}h)v_b f_c$                                                                                                       |  |
| $+ [(b_e - 2t_k)(h_t - c - \frac{1}{2}t_k) + (h_t - c)^2]t_k \sigma_x$                                                                                        |  |
| $+ \frac{1}{2}(b_e - 2t_k)(h_t - h_e - c + t_k)^2 \sigma_x$                                                                                                   |  |
| $- \frac{1}{2}b_e(h_e + c - h_t)^2 \sigma_t + (h_t - h_c)T_c^*$                                                                                               |  |

Det er ikke her muligt at opskrive betingelserne for anvendelse af de enkelte beregningstilfælde uafhængig af  $Y_k$  og  $t_k$ , som det var tilfældet i kapitel 4. I figur 8.6 er angivet et rute-diagram, efter hvilket det korrekte beregningstilfælde kan fastlægges.



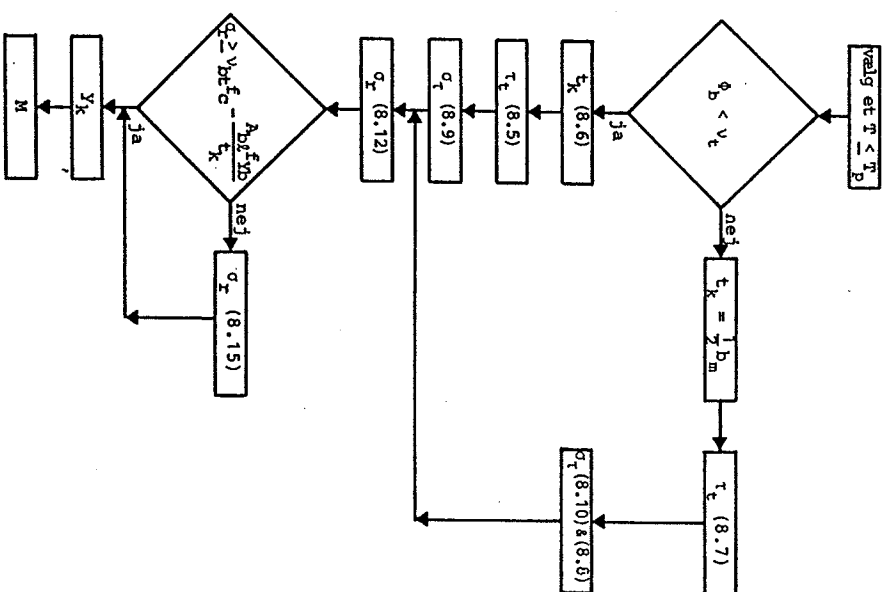
fortsættes



Figur 8.6: Rutediagram til bestemmelse af  $Y_k$  og  $M$ .

### 8.3.6 Beregningsprocedure

Ved hjælp af ligningerne, angivet i afsnit 8.3.2-8.3.5, er det muligt at fastlægge den i figur 8.2 viste bjælkes bæreevne ved kombineret vridning og bøjning. Selve beregningsproceduren er i figur 8.7 vist i form af et rutediagram.



Figur 8.7: Diagram for beregning af bøjningsbæreevnen ved kendt vridningspåvirkning.

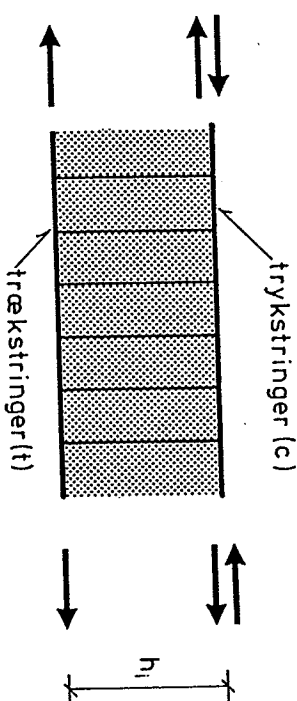
## 8.4 MAKSIMALE VRIDNINGSBÆREEVNE

Nogle jernbetonbjælker kan, under forudsætning af en vis bøjningspåvirkning, optage vridningsmomenter, der er større end deres rene vridningsbæreevne.

Som illustration af beregningsprincippet vil indledningsvis en simpel beregningsmodel blive gennemgået. Derefter vil denne beregningsmodel blive søgt indføjet i den i afsnit 8.3 angivne beregningsprocedure.

### 8.4.1 Simpel beregningsmodel

Stringerbjælken vist i figur 8.8 betragtes.



Figur 8.8: Stringerbjælke.

De i figur 8.8 viste stringere, regnes at have flydekræfterne  $T_t$ ,  $T_c$  og  $T_c^*$ , jævnfør afsnit 8.1.

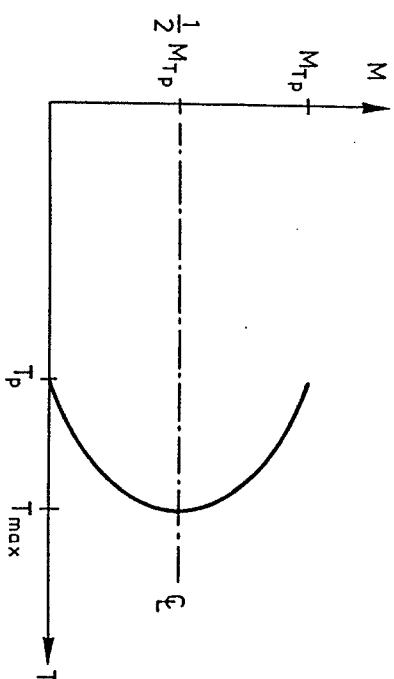
Om stringerbjælken forudsættes dels at  $T_c < T_t$ , og dels at  $t_k < \frac{1}{2} h_m$  for alle tilfældige værdier af vridningsmomentet.

Det optredende bøjningsmoment, som alene optages af de to stringere, regnes bestemt ved  $M = h_i T_m$ , hvor  $T_m$  således er den del af kraften i stringerne, der går til optagelsen af bøjningsmomentet.

Den trækraft, der efter bjælkens længdeakse skal bruges for at optage vridningspåvirkningen  $T$ , vil blive benævnt  $T_k$ . Denne trækraft må for ren vridning  $T_p$  højst sættes til  $T_k = 2T_c$ .

Under forudsætning af vridningspåvirkningen  $T_p$ , vil der i trækstringeren være en kraftreserve på  $(T_t - T_c)$ , således at der vil kunne optages et bøjningsmoment af størrelsen  $M_{Tp} = h_i T_m = h_i (T_t - T_c)$ , hvis betingelsen  $|T_c - T_m| = |2T_c - T_t| \leq T_c^*$  er opfyldt.

Antages bjælken påvirket af  $T = T_p$  og  $M = M_{Tp}$ , ses en reduktion af  $M$  til  $M = h_i T_m$ , at føre til en trækraftreserve i trækstringeren på  $(T_t - T_c - T_m)$ . Er den fornødne trækraft tilstede i trækstringeren, det vil sige  $(T_t - T_c - T_m) < T_m$ , kan vridningsbæreevnen øges svarende til udnyttelse af den forøgede trækraft  $T_k = 2T_c + 2(T_t - T_c - T_m) = 2(T_t - T_m)$  efter bjælkens længdeakse. Af ovennævnte krav til trykstringeren, findes det umiddelbart, at det  $T_k$  der svarer til ren vridning, højst kan øges med  $2T_m = (T_t - T_c)$ , således at den maksimale trækraft efter længdeaksen vil være  $T_{k,max} = 2T_c + (T_t - T_c) = (T_t + T_c)$ . Bjælkens maksimale vridningsbæreevne  $T_{max}$  fremkommer ved bøjningspåvirkningen  $M = h_i T_m = \frac{1}{2} h_i (T_t - T_c) = \frac{1}{2} M_{Tp}$ . Da bjælkens flydeflade for  $0 \leq M \leq M_{Tp}$  er symmetrisk om  $M = \frac{1}{2} M_{Tp}$ , hvilket kan ses af ovenstående, er flydefladen således fuldstændig fastlagt i ovennævnte interval for ovenstående bøjningsmomenter. De kvalitative forhold vedrørende flydefladens udseende, i ovenstående interval, er vist i figur 8.9.



Figur 8.9: De kvalitative forhold vedrørende flydefladens forløb for  $T \geq T_p$ .

## 8.4.2 Korrekt beregningsmodel

Som det fremgår af afsnit 8.3.5, regnes de fra bøjningsmomentet stammende tryknormalspændinger ikke koncentreret i en stringer. Dette betyder, at den efter afsnit 8.3.5 bestemte værdi af  $M_{Tp}$ , ikke stemmer overens med den i afsnit 8.4.1 anførte. Anvendes således beregningsmodellen anført i afsnit 8.4.1, i beregningsproceduren vist i afsnit 8.3.6, vil der opstå en diskontinuitet i flydefladen. I det følgende skal en beregningsmodel, som er i overensstemmelse med beregningsproceduren i afsnit 8.3.5, anføres.

Den maksimale trækstyrke efter længdeaksen fandtes ifølge afsnit 8.4.1, at være  $T_{l,max} = T_t + T_c$ . Da det er underordnet om trykspændingerne stammende fra bøjningsmomentet er placeret i selve stringeren eller omkring denne, vil  $T_{l,max}$  også her have ovenstående værdi. Det bemærkes, at dette kun gælder  $T_t > T_c$ , idet den maksimale vridningsbæreevne vil være  $T_{max} = T_p$  for  $T_t \leq T_c$ .

Den maksimale vridningsbæreevne kan beregnes ved, i formlerne for vridning - se kapitel 7 - i stedet for  $\phi_l$ , at anvende den *fiktive mekaniske længdearmningsgrad*, defineret ved

$$\phi_{lf} = \frac{T_t + T_c}{b_e h_e f_c} = \frac{A_{lc} f_{yt} + A_{lc} f_{yc}}{h_e b_e f_c} \quad (8.17)$$

Det bemærkes, at vridningsbæreevnen kun vil kunne forøges udover  $T_p$ , hvis bjælkerne er enten NA eller OAB med hensyn til den normale beregning vedrørende ren vridning. Er bjælken NA med hensyn til  $T_{l,max}$ , vil  $Y_k$  antage værdien  $Y_k = 0$ .

Det til  $T_{max}$  svarende bøjningsmoment vil ikke her kunne forventes at være  $\frac{1}{2} M_{Tp}$ , hvor  $M_{Tp}$  regnes bestemt efter afsnit 8.3.5. Symmetribetragningen i foregående afsnit kan således ikke anvendes her.

Beregningsen for bøjningsmomenter større end det, der hører til  $T_{max}$  forløber efter samme procedure som angivet i afsnit 8.3.6.

For bøjningsmomenter mindre end det, der svarer til  $T_{max}$ , forløber beregningen også efter proceduren angivet i afsnit 8.3.6, med undt-

gelse af selve bøjningsbæreevnebestemmelsen. For et valgt  $T_p \leq T_{max}$ , kan  $t_k$  og  $\sigma_t$  bestemmes. Vridningsmomentet kræver følgende trækkræfter efter længdeaksen.

$$T_l = A_{ef} \sigma_t \quad (8.18)$$

og dermed en trækkræfter på  $\frac{1}{2} T_l$  i bjælakens overside. Bøjningsmomentet skal således yde et tryk i bjælkeoversiden på

$$T_M = \frac{1}{2} T_l - T_c \quad (8.19)$$

hvorved bøjningsmomentet kan bestemmes af udtrykket

$$M = (h_t - h_c) T_M = (h_t - h_c) \left( \frac{1}{2} A_{ef} \sigma_t - A_{lc} f_{yc} \right) \quad (8.20)$$

Med ovenstående formelsæt er der hermed fundet en fuldstændig flydeflade for rektangulære bjælker påvirket til kombineret vridning og bøjning.

## 8.5 GEOMETRISK MULIG BRUDFIGUR

Regnes bjælkerne at have et spændingsaktivt tyndfilaget tværsnit, som er ens armeret, langs randene, det vil sige  $t_k$  og  $Y_k$  antager små værdier, og forudsættes bøjningsmomentet alene optaget af over- og underflangen, kan en brudmekanisme af typen vist i figur 7.17, eftervises at føre til den statisk tilladelige løsning anført i afsnit 8.3. Bemærk, at brudliniens hældning med længdeaksen ikke nødvendigvis er den samme i sideflanger og underflange. For en mere detaljeret beskrivelse henvises til P. Müller [76.2].

## 8.6 EFFEKTIVITETSFAKTOREN

I de foregående afsnit er der, udover de allerede kendte effektivitetsfaktorer  $v_t$  og  $v_b$ , introduceret en ny effektivitetsfaktor,

nemlig  $v_{bt}$ . Værdien af denne kan, som det var tilfældet for  $v_s$  og  $v_t$ , kun fastlægges ved hjælp af forsøg.

For  $T + 0$ , vil i overensstemmelse med beregningsmodellen  $t_k + 0$ , og dermed ifølge formel (8.12)  $\sigma_x + v_{bt} f_c$ . Opfyldelse af grænsebetingelsen  $M + M_p$  for  $T + 0$ , kræver således at  $v_{bt} + v_b$  for  $T + 0$ .

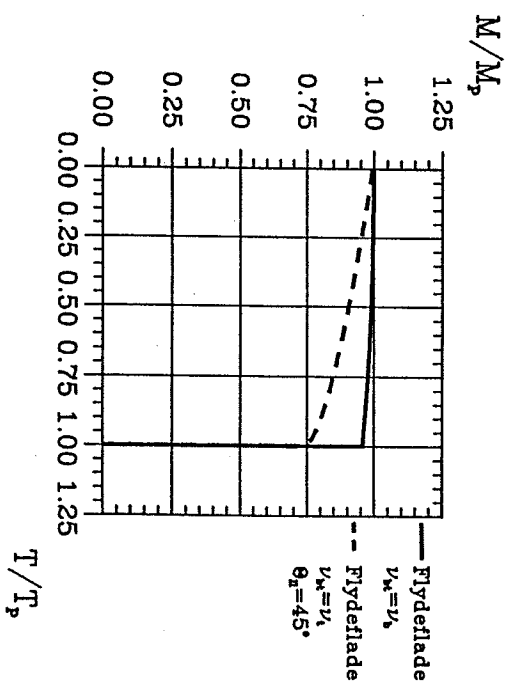
Som det fremgår af afsnit 4.2.3 og afsnit 7.4 gælder det at  $v_t < v_b$ , hvilket betyder, at tilstedeværelsen af forskydningsspændinger, der hører til en vridningspåvirkning, reducerer værdien af effektivtetsfaktoren. Det synes således rimeligt at konkludere, at  $v_b$  udgør en øvre grænse for  $v_{bt}$ .

Ved bestemmelsen af  $v_t$ , jævnfør afsnit 7.4, blev det blandt andet analyseret hvorvidt  $v_t$  var en funktion af det enaksede betontryks hældning  $\theta_t$  med længdeaksen. Denne undersøgelse viste ikke nogen signifikant indflydelse af  $\theta_t$  på  $v_t$ . Da  $\theta_{bt}$ , jævnfør afsnit 8.3.4, altid vil være mindre end  $\theta_t$ , hvilket har en gunstig indflydelse på effektivtetsfaktoren, se nærmere herom i afsnit 2.4.3 synes det rimeligt at antage, at  $v_{bt}$  sjældent vil være mindre end  $v_t$ . En sikker værdi for  $\sigma_x$  vil under alle omstændigheder kunne bestemmes ved at benytte  $v_{bt} = v_t$  i udtrykket (8.12), for derefter at multiplicere hele højresiden i (8.12) med  $v_b$ . Denne fremgangsmåde vil dog formodentlig føre til en konservativ bæreevne.

Til en forsøgsmæssig bestemmelse af  $v_{bt}$  kræves forsøg med totalt overarmerede bjælker, det vil sige bjælker for hvilke ingen del af armeringen flyder ved brud, uanset belastningskombinationen. En bjælke, der opfylder et sådant krav, tilfredsstiller betingelserne  $\phi_b > v_{bt}$  og  $\gamma_k = h_t$ . Desværre, til trods for en stor mængde forsøgsdata, har det ikke været muligt at finde forsøgsbjælker med en sådan armeringsudformning, hvilket naturligvis umuliggør en vurdering af værdien for  $v_{bt}$ .

Betragtes en totalt overarmet bjælke, som beskrevet ovenfor, udgør i overensstemmelse med ovennævnte forhold, en flydeflade bestemt på basis af værdierne  $v_{bt} = v_b$  og  $\theta_{kL} = \frac{\pi}{2}$ , en øvre grænse for beliggenheden af flydefladen. Sættes nu for den samme bjælke  $\theta_{kL} = \frac{\pi}{4}$ , jævnfør afsnit 8.3.2, og  $v_{bt} = v_t$ , vil den herved frembragte flyde-

flade efter al sandsynlighed udgøre en nedre grænse for beliggenheden af flydefladen. Bemærk, at da  $t_k + 0$  for  $T + 0$ , er grænsebetingelsen  $M + M_p$  for  $T + 0$  opfyldt, for en vilkårlig værdi af  $v_{bt}$ . Begge ovenfor beskrevne flydeflader er vist grafisk i figur 8.10. Det kan umiddelbart indses, at den værdi der benyttes for  $v_{bt}$ , kun øver indflydelse på størrelsen af det bøjningsmoment, der kan optages.



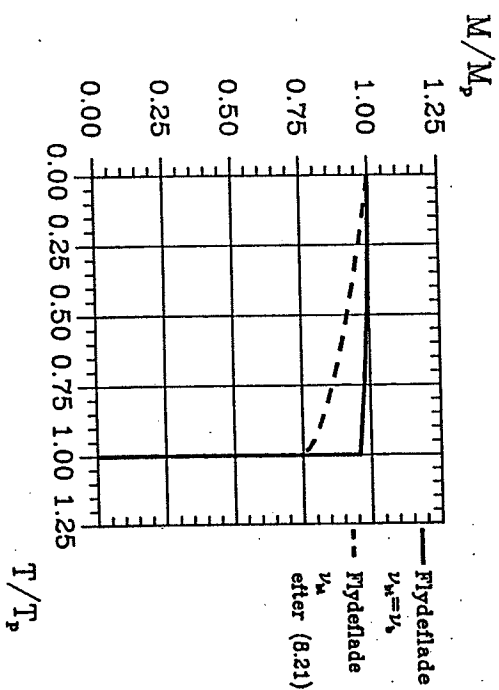
Figur 8.10: Øvre og nedre grænse for beliggenheden af flydefladen.

Ønskes den optimale beregningsmodel, hvor  $\theta_{kL} = \frac{\pi}{2}$ , fastholdt, vil anvendelsen af  $v_{bt} = v_b$  føre til en løsning på den usikre side. Som en løsning på den sikre side kan interpolationsformlen

$$v_{bt} = \frac{T}{T_p} v_t + (1 - \frac{T}{T_p}) v_b \quad (8.21)$$

benyttes. For  $T > T_p$  sættes  $v_{bt} = v_t$ . I figur 8.11 er den flydeflade, der hører til benyttelse af (8.21) vist sammen med den der fremkommer ved anvendelse af  $v_{bt} = v_b$ .

Ved en sammenligning mellem flydefladerne vist i figur 8.10 og figur 8.11, kan det konkluderes, at  $v_{bt}$  bestemt ved (8.21), sandsynligvis vil føre til en sikker flydeflade.



Figur 8.11: Flydefladens udseende ved benyttelse af interpolationsformlen (8.21) for  $v_{bt}$ .

Desværre eksisterer der kun forsøg med bjælker, hvor trykzonehøjden  $y_k$  er forholdsvis lille, det vil sige  $y_k \ll h_t$ . Da størrelsen af  $v_{bt}$  for bjælker af denne type kun har en minimal indflydelse på bøjningsbæreevnen, kan  $v_{bt} = v_b$  her anvendes uden problemer. Se iøvrigt nærmere her om i afsnit 8.8.2.

## 8.7 TEORI VURDERET VED FORSØG

Beregningsmodellen angivet i afsnit 8.2 og 8.3 er i appendiks A-H sammenlignet med forsøg.

Som det fremgår af ovennævnte appendikser er overensstemmelsen mellem teori og forsøg tilfredsstillende, ikke mindst i form af flydesøgsresultaternes bekræftelse på det principielle forløb af flydefladen. Desværre er afvigelsen mellem teori og forsøg i visse tilfælde af en sådan karakter, at en mere detaljeret vurdering er påkrævet.

Et nærmere studium af diagrammerne i ovennævnte appendikser afslører, at afvigelsen, hvis en sådan er tilstede, altid har samme karakter, nemlig at forsøgspunkterne er ensidigt forskudt efter  $T/T_p$ -aksen i forhold til den teoretiske flydeflade. Årsagen til divergensen mellem teori og forsøg kan således umiddelbart indses at være knyttet til bestemmelsen af vridningsbæreevnen. Interessant i denne sammenhæng er det iøvrigt også at bemærke, at for flere seriers vedkommende kan der for samme bøjningspåvirkning være en betydelig spredning på de forsøgsmæssigt bestemte vridningsbæreevner.

Selv om det ikke entydigt har været muligt at angive nogen årsag til ovennævnte afvigelser, hvilket primært skyldes dårlige beskrivelser af forsøgene, er der dog næppe tvivl om, at forklaringen skal søges i dæklagsproblematikken, jævnfør afsnit 7.2.1.

I figurerne G1 og H1 i appendiks G og H er nogle af forsøgsserierne fra de to appendikser sammenlignet med de tilhørende teoretiske flydeflader, idet en del af dæklaget er inkluderet i det effektive tværsnit. Overensstemmelsen mellem teori og forsøg ses herved at blive endog særdeles tilfredsstillende. Når dæklaget specielt for disse to forsøgsseriers vedkommende giver et ikke ubetydeligt bidrag til bæreevnen, hænger det dels sammen med, at dæklaget er stort i forhold til bjælkerens dimensioner, men også at alle bjælkerne er overarmerede med hensyn til ren vridning.

Betrages specielt forsøgsserierne Rb-I i appendiks G, samt 4 og 6 i appendiks H, ses der at være en markant spredning på de eksperimentelle værdier. Dette skyldes formodentlig, at vridningsbæreevnen har været af samme størrelsesorden som  $T_{sp}$  hvor  $T_{sp}$  angiver den vridningspåvirkning, der fører til afskaling af dæklaget. Billeder af nogle af forsøgsbjælkerne bekræfter, at afskaling fandt sted for nogle bjælker og ikke for andre.

Hvorvidt afskaling fandt sted for bjælkerne i appendiks A og B, vides der ikke noget om. Skulle dette ikke være tilfældet, ville der under alle omstændigheder ikke være nogen væsentlig bæreevneforgøvelse at hente. Selv om bjælkerne i appendiks A mere eller mindre er overarmerede med hensyn til ren vridning, er dæklaget her så beskeden, at det ikke ville/vil kunne forøge bæreevnen

markant. Derimod er dæklaget for bjælkerne i appendiks B forholdsvis stort sammenholdt med bjælkerne bredde og højde. Når dæklaget her ikke har nogen afgørende indflydelse på bæreevnen, skyldes det, at bjælkerne er normalarmerede med hensyn til ren vridning, endda således at  $t \ll \frac{1}{2} b_m$ .

For mere detaljerede vurderinger af forsøgssammenligningerne henvises der til de enkelte appendikser.

Som det fremgår af ovenstående, spiller afskalningstendensen ved vridning en afgørende rolle for, hvorvidt den i dette kapitel anførte teori stemmer overens med forsøg. Desværre har det, som tidligere anført i afsnit 7.2.1, ikke været muligt at vurdere, hvorvidt de angivne forslag til beregning af  $T_{sp}$  stemmer overens med forsøg. Skulle det lykkes at finde et udtryk til bestemmelse af  $T_{sp}$ , ville der stadig tilhagstå et ikke uvæsentligt problem, nemlig, hvor stor en del af dæklaget må inddrages i det effektive tværsnit. Som det tydeligt fremgår af figurerne G1 og H1 i appendiks G og H, vil det i visse tilfælde give bæreevner klart på den usikre side, at inddrage hele dæklaget.

## 8.8 GENERELT OM FLYDEFLADEN

I dette afsnit vil der blive givet en beskrivelse af de forhold, der i primær grad øver indflydelse på flydefladens udseende. Herudover vil der, for de tilfælde hvor trykzonehøjden antager små værdier, blive givet en simpel beregningsmodel, som baserer sig på stringermetoden.

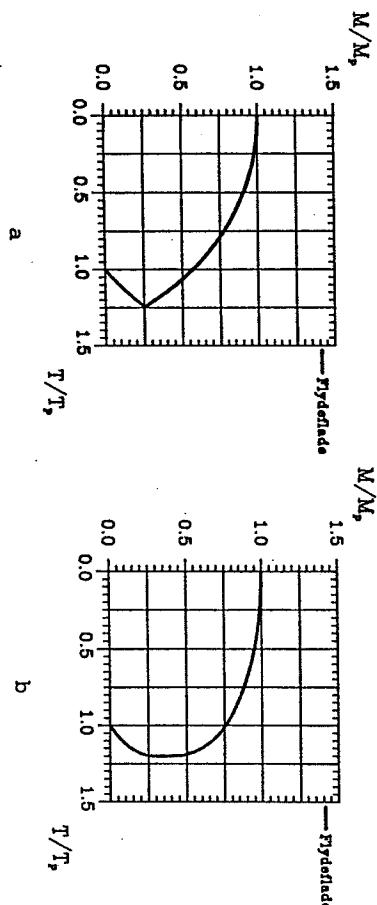
### 8.8.1 Flydefladens udseende

Som det fremgår af forsøgsbehandlingen i afsnit 8.7, kan flydefladens udseende variere stærkt, alt afhængig af armeringsmængden, det vil sige størrelsen af de mekaniske armeringsgrader, herunder værdier af alses indbyrdes forhold. Flydefladens form kan inddeles i

fire hovedtilfælde, som har hvert sine karakteristika. I det følgende vil nogle af de forhold, der netop afgør til hvilket hovedtilfælde en aktuel bjælke hører, blive summarisk beskrevet.

For at en bjælke kan optage vridningsmomenter, der er større end dens rene vridningsbæreevne  $T_p$ , skal bjælken udover naturligvis at være påvirket af et vist bøjningsmoment, dels have en længdearmering i undersiden, der har større trækflydekraft end længdearmeringen i oversiden, det vil sige  $\phi_c > \phi_c$ , og dels være enten NA eller OAB med hensyn til ren vridning.

Er ovenstående betingelser opfyldt, kan den maksimale vridningsbæreevne  $T_{max}$ , som det fremgår af afsnit 8.4.2, bestemmes ved at benytte  $\phi_{kf}$ , jævnfør formel (8.17), istedet for  $\phi_k$  i udtrykkene til bestemmelse af den rene vridningsbæreevne, se kapitel 7. Før denne beregning til, at bjælken stadig er NA eller OAB, vil flydefladens form typisk være som vist i figur 8.12a.

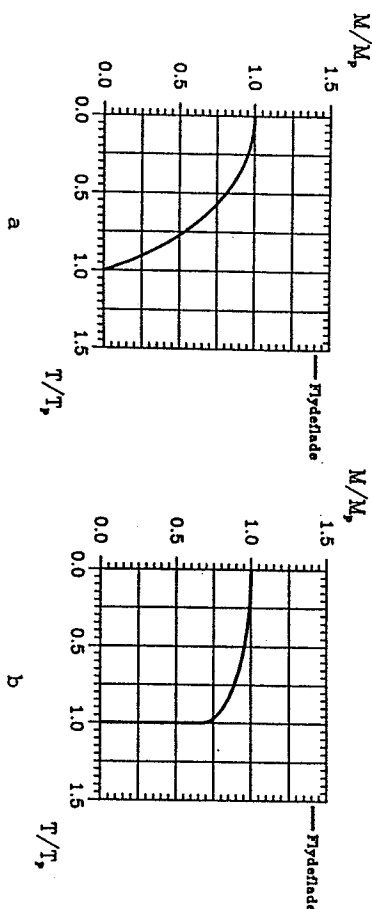


Figur 8.12: Flydeflader i de tilfælde hvor  $T_{max} > T_p$ .

Fører beregningen af  $T_{max}$  til at bjælken enten er OAB eller OAT, med hensyn til denne påvirkning, vil flydefladens udseende udpræget være som vist i figur 8.12b, det vil sige  $T_{max}$  kan optrede for et vist interval af bøjningspåvirkninger.

Er de i indledningen anførte betingelser ikke opfyldt, gælder det at  $T_{max} = T_p$ . For bjælker hvor  $\phi_c = \phi_c$  og for hvilke det gælder,

at de er NA med hensyn til ren vridning, vil flydefladens form være som vist i figur 8.13a.



Figur 8.13: Flydefladen i de tilfælde hvor  $T_{\max} = T_p$ .

Er  $\phi_t > \phi_c$ , og/eller er bjælken enten OAT eller OAT med hensyn til ren vridning, får flydefladen typisk et udseende, som vist i figur 8.13b, med en plan flade, hvis udstrækning er en funktion af det bøjningsmoment, bjælken netop kan optage for vridningspåvirkningen  $T_p$ .

Da flydefladen selv indenfor det enkelte hovedtilfælde kan variere stærkt, alt afhængig af bjælkens armeringsforhold, er det ikke umiddelbart muligt at angive flydefladen på den simple form  $f(\frac{M}{M_p}, \frac{T}{T_p})$ . Til eksempel kan det nævnes, at flydefladen vist i figur 8.13a kan have en frentonning, der dels er cirkulær, dels parabelformet og dels tilnærmelsesvis lineær. Vedrørende dette tilfælde henvises iøvrigt til M.P. Nielsen [71.2].

### 8.8.2 Stringermodel

Som oftest vil bjælkernes trykzone have en relativt beskeden højde. Det vil derfor i disse tilfælde være hensigtsmæssigt at opfatte trykzonen som en stringer, analog til forskydningsstilfældet, jævnfør afsnit 6.2.

Ved bestemmelsen af det effektive tværsnits tykkelse  $t_x$ , samt det enaksede betontryks komposant efter længdeaksen  $\sigma_t$ , benyttes som tidligere principperne og formlerne i afsnit 8.3.2 og 8.3.3. Efter længdeaksen skal en bjælke således kunne optage en trækraft på  $\sigma_t A_{ef}$ , hvor  $A_{ef}$  er arealet af det effektive tværsnit, jævnfør formel (8.16). I overensstemmelse med figur 8.8 regnes bjælken at optage normalspændingerne efter længdeaksen, ved hjælp af en trækstringer og en trykstringer. De to stringere skal således hver optage en trækraft på  $\frac{1}{2} \sigma_t A_{ef}$ . Regnes denne kraft, for trykstringerens vedkommende, henført til trykarmeringen, kan bjælkernes bøjningsbæreevne på simpel vis bestemmes ved benyttelse af formlerne i tabel 4.1, idet  $\phi_t$ ,  $\phi_c$  og  $\phi_c^*$  erstattes af

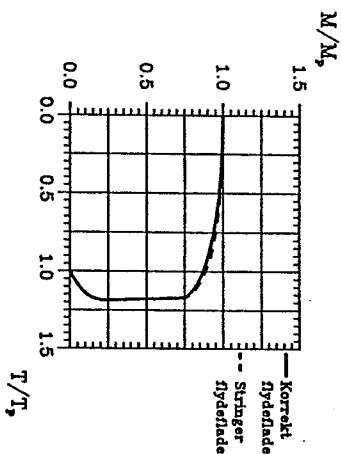
$$\phi_{tt} = \frac{(A_{lt} f_{yt} - \frac{1}{2} \sigma_t A_{ef})}{b h_t f_c} \quad (8.22)$$

$$\phi_{ct} = \frac{(A_{lc} f_{yc} - \frac{1}{2} \sigma_t A_{ef})}{b h_t f_c} \quad (8.23)$$

$$\phi_{ct}^* = \frac{(A_{lc} f_{yc} + \frac{1}{2} \sigma_t A_{ef})}{b h_t f_c} \quad (8.24)$$

og det naturligvis checkes, at  $y_o < \mu h_t$ , hvor der for  $\mu$  indtil videre kan benyttes værdien  $\mu = 0,3$ .

Ovenstående beregningsprocedure tager ikke højde for den styrke-reduktion, der fremkommer i trykstringeren på grund af forskydningspændingerne, det vil sige  $\rho$  regnes at antage værdien  $\rho = 1$ . En detaljeret undersøgelse har dog vist, at den fejl, der herved begås, er minimal og i de fleste tilfælde uden indflydelse på værdien af  $M$ . Et eksempel herpå er vist i figur 8.14. Trykzonehøjden var her  $\sim 0,3 h_t$ , mens tykkelsen af det effektive tværsnit i det værste tilfælde stort set dækkede hele trykzonen. Ovennævnte simplificerede beregningsmodel ses at være analog til stringermodellen, der benyttes ved forskydning, jævnfør afsnit 6.2.1, idet forskydningspændingerne indflydelse på bøjningskapaciteten også der negligeres.



Figur 8.14: Korrekt beregningsmodel kontinua strængemodellen.

For en simplificeret bestemmelse af det effektive tværsnits trykkelse  $t_k$ , henvises der til betragtningerne i afsnit 7.5.

## 8.9 ANDRE TVÆRSNIT OG ARMERINGSUDFORMNINGER

Beregningsmodellen anført i afsnit 8.2 og 8.3 kan udstrækkes til at gælde for bjælker med vilkårlige tværsnit og armeringsudformninger.

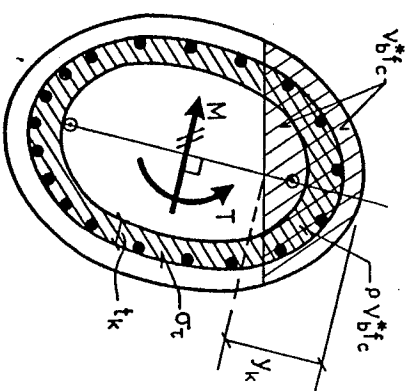
For en given vridningspåvirkning kan en bjælkes bøjningsbæreevne generelt fastlægges ved anvendelse af følgende beregningsprocedure:

- Tykkelsen af det effektive tværsnit bestemmes ved hjælp af kravet om
  - vridningsligevægt
  - forskydningsligevægt
  - ligevægt efter b-aksen

Idet tværarmeringen regnes at flyde. Alternativt kan der vælges en fast værdi for hældningen af det enaksede betontryk i det effektive tværsnit, hvorved alene de to første betingelser gælder, idet det dog forudsættes, at tværarmeringen har den fornødne

kapacitet til optagelse af betontrykkets komponent efter tværretningen.

- Værdierne af  $\sigma_t$  og  $\rho$  fastlægges via formlerne i afsnit 8.3.3 og 8.3.4.
- Arealet af trykzonen bestemmes ved hjælp af kravet om tværsnittets længdeligevægt. I denne ligevægtsligning indgår parametrene beskrevet i afsnit 8.3.2, samt eventuelt ekstra længdearmering placeret i tværsnittets midte.
- Trækarmeringens trykdepunkt fastlægges.
- Via kravet om at det statiske moment for trykzonen skal være nul omkring linien, der er vinkelret på bøjningsvektoren og går gennem trækarmeringens trykdepunkt, kan udseendet af trykzonen og dermed dennes trykdepunkt bestemmes.
- Af bøjningsligevægtsligningen fastlægges bøjningsbæreevnen.



Figur 8.15: Bæreevnebestemmelsen i det generelle tilfælde.

Ovennævnte beregningsprocedure, som er en generel beregningsmodel, kan føre til forholdsvis komplicerede beregninger. Gælder det således, at trykzonenhøjden  $Y_0$ , der hører til ren bøjning, opfylder kravet  $Y_0 \leq 0,3 h_t$ , kan den simplificerede stringermodel benyttes. Når  $\sigma_t$  er bestemt, kan tryk- og trækstringeren regnes at skulle optage trækkræften  $\frac{1}{2} \sigma_{t,ef}$ , hvor  $A_{ef}$  betegner arealet af det effektive tværsnit. Den resterende kapacitet i stringerne kan derefter udnyttes til bøjningsoptagelsen. Forefindes der en ekstra længearmring mellem tryk- og trækstringeren, kan denne udnyttes til at optage en del af kræften  $\sigma_{t,ef}$ , idet det dog understreges, at  $\sigma_{t,ef}$  skal optages symmetrisk om tværsnittets geometriske tyngdepunkt.

For mere detaljerede beskrivelser af de specielle forhold der gælder bjælker med vilkårligt tværsnit og armeringsudformning, henvises der til afsnit 4.4 og 7.6.

Bemærk specielt, at for kassedragere kan teorien i Kapitel 3 med fordel benyttes, og at trækzonen og/eller trykzonen for bøjning kan udstrækkes til også at inkludere de lodrette flanger.

For effektivitetsfaktorerne  $v_b^*$ ,  $v_t^*$  og  $v_{bt}^*$  anvendes i mangel af bedre  $v_b$ ,  $v_t$  og  $v_{bt}$ . For bjælker, der har forholdsvis store værdier af  $Y_k$  og/eller  $t_k$ , bør en vis forsigtighed dog udvises, eventuelt ved benyttelse af mere konservative værdier for effektivitetsfaktorerne. Dette gælder dog ikke bjælker med tværsnit, der er tilnærmelsesvis rektangulære.

Varyerer  $T$  med  $x$  vil ovennævnte beregningsmodel også kunne benyttes, da (2.5) stadig er opfyldt. For  $M$  varierende med  $x$  vil der optræde forskydningskræfter. For dette tilfælde henvises til Kapitel 9.

## 8.10 ARMERINGSBESTEMMELSE

Da langt den overvejende del af de bjælker, der optræder i praksis, vil have en relativt lille trykzonenhøjde, vil dette tilfælde blive behandlet særskilt. Afslutningsvis vil det generelle tilfælde, det vil sige bjælker med store trykzonenhøjder, blive berørt.

### 8.10.1 Stringerbjælker

Indledningsvis betragtes en bjælke med rektangulært tværsnit. Alle spændinger efter længeaksen regnes optaget af en stringer beliggende i henholdsvis bjælkens over- og underside.

I overensstemmelse med afsnit 7.7 kan tykkelsen af det effektive tværsnit, for et vilkårligt tværsnit, bestemmes af ligningen

$$T = S_{ef} v_t^* f_c \frac{1}{(\cot \theta + \tan \theta)} \quad (8.25)$$

Idet  $\theta$  kan vælges frit. Af hensyn til brugsstatiet bør  $\theta$  indtil videre vælges i overensstemmelse med det i afsnit 7.7 anbefalede.

Den nødvendige bjælearmring er fastlagt ved

$$A_{b,l} = \frac{A_b}{s} = \frac{T t_k}{f_{yb} S_{ef}} \tan \theta \quad (8.26)$$

Efter længeaksen skal trækkræften

$$T_k = \frac{T A_{ef}}{S_{ef}} \cot \theta \quad (8.27)$$

optages.

Ved hjælp af kravet om momentligevægt omkring trækstringeren kan størrelsen af  $Y_k$  bestemmes. I denne ligevægtsligning indgår trykkraften  $T_k$ , der angribes i det effektive tværsnits tyngdepunkt. Betonen regnes i trykstringeren at kunne optage tryknormalspændingen  $v_b f_c$ . Deklaget regnes overalt at være  $c$ .

For en bjælke med rektangulært tværsnit er  $Y_k$  således bestemt ved, idet der ses bort fra trykarmering

$$Y_k = h_t - \sqrt{h_t^2 - \frac{2M - T_k (2h_t - h_e - 2c)}{v_b f_c b}} \quad (8.28)$$

Findes  $Y_k$  bestemt ved (8.28) at opfylde betingelsen  $0 < Y_k < 0,3 h_t$  er der ikke behov for nogen længdearmering i oversiden. Længdearmeringen i undersiden er bestemt ved

$$A_{k,c} = \frac{1}{f_{y,c}} (T_k + v_{b,c} f_{y,c} Y_k) \quad (8.29)$$

Fører udtrykket (8.28) til en værdi for  $Y_k$ , der er større end  $0,3 h_t$ , benyttes fremgangsmåden beskrevet i afsnit 8.10.2.

Gælder det at  $Y_k$  bestemt ved (8.28) bliver negativ, skal der armers mere både i bjælkens over- og underside. Den nødvendige armering er bestemt ved

$$A_{k,c} = \frac{T_k (h_t - \frac{1}{2} h_c - c) - M}{f_{y,c} (h_t - h_c)} \quad (8.30)$$

$$A_{k,t} = \frac{T_k (\frac{1}{2} h_c + c - h_c) + M}{f_{y,t} (h_t - h_c)} \quad (8.31)$$

Det bemærkes, at minimalarmeringen ikke nødvendigvis fremkommer for  $\theta = 45^\circ$ , jævnfør afsnit 7.7, men afhænger af bøjningsmomentets værdi.

Ovennævnte beregningsmetode kan uden videre udstrækkes til at gælde for vilkårlige tværsnit, blot skal det understreges, at  $T_k$  skal optages symmetrisk om det effektive tværsnits geometriske tyngdepunkt, hvilket kan gøre, at der skal indlægges en ekstra længdearmering mellem træk- og trykstringeren. Ved bestemmelse af armeringen i stringerne skal der tages højde herfor.

Indlægges, uanset symmetriforholdene, en armering mellem stringerne, kan denne naturligvis indtages i den nødvendig armering til optagelse af  $T$  og  $M$ , blot ovennævnte krav til  $T_k$ 's optagelse er opfyldt. Iøvrigt henvises vedrørende vilkårlige tværsnit til afsnit 4.4 og 7.6.

### 8.10.2 Bjælker med store trykzoner

For bjælker med store bøjningspåvirkninger, det vil sige  $Y_k \geq 0,3 h_t$ , skal der tages hensyn til den reduktion af forskydningsspændingerne over på den normalspænding, der kan optages i trykzonen.

Formlerne (8.25)-(8.27) kan benyttes til at fastlægge  $t_k$ ,  $A_{b,k}$  samt  $T_k$  og dermed

$$\sigma_t = \frac{T_k}{A_{ef}} \quad (8.32)$$

Forskydningsspændingen  $\tau_t$  i det effektive tværsnit er bestemt ved

$$\tau_t = \frac{T_k}{S_{ef}} \quad (8.33)$$

Af udtrykket (8.12) kan  $\sigma_r$  fastlægges og dermed  $\rho = \frac{\sigma_r}{v_{b,c} f_c}$ . Indtil videre kan der for  $v_{b,t}$  anvendes værdien  $v_t$ .

Ved hjælp af kravet om momentligevægt omkring trækstringeren kan  $Y_k$  fastlægges, idet der i denne beregning indgår parametrene  $\rho$ ,  $v_{b,c}$  og  $\sigma_r$ . Desværre er det ikke muligt at opstille generelle formler for denne beregning, da ligningerne afhænger af  $Y_k$ 's værdi. Ud fra værdien af  $Y_0$ , det vil sige trykzonehøjden, der hører til den rene bøjningspåvirkning, kan en rimelig optimal værdi for  $Y_k$  dog relativt hurtigt fastlægges.

Af kravet om længdeligevægt kan den nødvendige armering  $A_{k,t}$  fastlægges. Det bemærkes, at i dette ligevægtsudtryk vil parametrene  $\sigma_r$ ,  $\rho$  og  $v_{b,c}$  også optræde.

For  $T$  varierende med  $x$ , kan ovennævnte model også benyttes, blot kravene i afsnit 7.6 og 7.7 overholdes. Varierer derimod  $M$  med  $x$ , hvilket betyder, at det optræder forskydningskræfter, henvises til kapitel 9.

## 9 KOMBINERET VRIDNING BØJNING OG FORSKYDNING

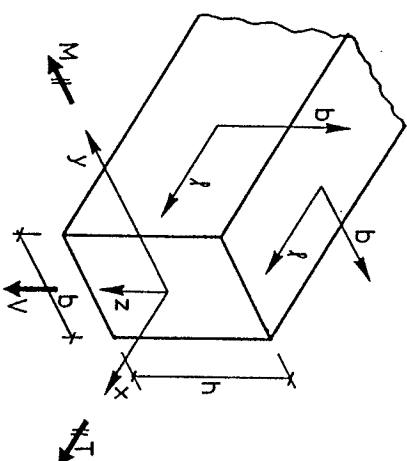
For de hidtil behandlede snitkrafttilfælde, har det været muligt at opstille forholdsvis simple og i de fleste tilfælde korrekte spændingsfordelinger. Desværre udgør kombineret vridning, bøjning og forskydning et så kompliceret problem, at hvis rimeligt simple og dermed overskuelige, spændingsfordelinger skal opnås, må der indføres en del tilnærmelser. Ovennævnte betyder også, at det ikke har været muligt at foretage nogle vurderinger af de her angivne løsninger ved hjælp af øvregrænsmetoden.

### 9.1 BJÆLKEBESKRIVELSE

I det følgende betragtes en jernbetonbjælke med massivt, rektangulært tværsnit. Til beskrivelse af bjælken anvendes som tidligere - se afsnit 7.1 - koordinatsystemerne vist i figur 9.1.

Fortegnsregningen for snitkræfterne vælges i overensstemmelse med figur 9.1.

Det betragtede bjælkestykke regnes påvirket af et konstant positivt vridningsmoment  $T$ , en konstant forskydningskraft  $V$  samt det hertil hørende bøjningsmoment. De to førstnævnte snitkræfter regnes således uafhængige af  $x$ . De bæreevneudtryk, der opstilles i afsnit 9.2.3, er invariante med hensyn til fortegnet af snitkræfterne, blot den side der hører til bøjningsmomentets trækresultant defineres at være bjælkens underside.



Figur 9.1: Bjælkebeskrivelse.

Bjælkens armeringsudformning samt tværsnitsdata regnes i overensstemmelse med afsnit 8.1, herunder afsnit 4.1 og 7.1, samt afsnit 6.1. Udover de i ovenstående afsnit angivne parametre, indføres her den mekaniske længdearmeringsgrad  $\phi_{lv}$  for forskydning, defineret ved

$$\phi_{lv} = \frac{A_s f_{yl}}{b h_1 f_c} \quad (9.1)$$

hvor  $h_1$  er bjælkens indre momentarm, mens  $A_s f_{yl}$  betegner den om tyngdepunktet symmetriske beliggende flydekraft for længdearmeringen.

Bjælker med andre tværsnitsudformninger samt armeringsarrangementer, herunder snitkræfter der varierer med  $x$ , vil blive behandlet i afsnit 9.4.

## 9.2 STATISK TILDELIG SPÆNDINGSFORDELING

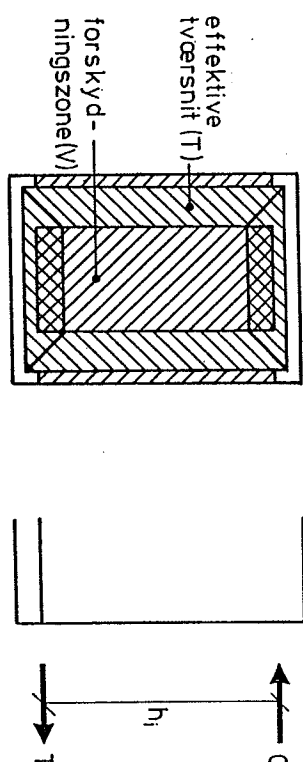
For langt den overvejende del af de bjælker, der optræder i praksis, vil det gælde, at trykzonehøjden  $Y_k$  er af en sådan størrelsesorden, at trykzonen beregningsmæssig vil kunne opfattes som en stringer. Derfor vil interessen i dette afsnit primært knytte sig til de bjælker, der opfylder kravet  $Y_k \leq \mu h_e$ , hvor  $\mu$  er en faktor  $\mu \ll 1$ . Sidst i dette afsnit vil det tilfalde, hvor trykzonen ikke kan antages at være en stringer, kort blive berørt.

### 9.2.1 Beregningsmetode

Den beregningsprocedure, der benyttes, vil blive tilrettelagt således, at der for en given vridningspåvirkning  $T$  bestemmes en V-M-flydeflade. En fuldstændig flydeflade kan herefter fastlægges ved at bestemme alle de niveaukurver i V-M-planen, der hører til værdiintervallet  $0 \leq T \leq T_{\max}$ .

Når det er valgt at konstruere niveaukurverne i V-M-planen, skyldes det ikke, at beregningsudtrykkene derved bliver simplere, tværtimod, men derimod, dels at det herved er muligt at tage hensyn til hvorvidt forskydningskraften fremkommer direkte eller indirekte, jævnfør afsnit 6.2.4, og dels at man via betingelsen (6.12) netop kan fastlægge det aktuelle belastningspunkt i V-M-planen.

For en kendt vridningspåvirkning  $T$  kan tykkelsen af det effektive tværsnit  $t_k$ , samt det enaksede betontryks komponent  $\sigma_t$  efter længdaksen, bestemmes ved at benytte principperne og formlerne i afsnit 8.3.2 og 8.3.3, blot  $A_{b,fyb}$  erstattes af  $\Omega$ , hvor  $\Omega < A_{b,fyb}$  betegner den del af bjælernes flydekraft, der udnyttes til vridningsoptagelsen. Bjælkens forskydningsbæreevne, herunder bøjningsbæreevne, kan nu fastlægges ved hjælp af formlerne i afsnit 6.2, idet de anvendte bjælkeparametre korrigeres under hensyntagen til vridningspåvirkningen. Spændingsfordelingen er vist i figur 9.2. Ovennævnte beregningsmetode tilfredsstiller betingelsen, at flydefladens grænsepositioner netop svarer til bæreevneudtrykkene for de rene påvirkninger.



Figur 9.2: Statisk tilledelig spændingsfordeling.

Det kan umiddelbart indses, at ovennævnte beregningsmodel ikke fører til en optimal bæreevnebestemmelse, da der opereres med samme tykkelse af det effektive tværsnit for alle delfielder. Til eksempel er det indlysende, at forskydningskraften vil reducere tykkelsen af det effektive tværsnits højre, lodrette delfelt, se figur 9.2, hvorved dette felt får en større indre momentarm, hvilket fører til en forøget vridningsbæreevne. En beregningsmodel, der tager hensyn til et stort antal ulineære ligninger, som kun kan løses ved iteration. Da vridningspåvirkningen i praksis som oftest er af sekundær betydning, og da forskydnings- og bøjningsbæreevnen ikke reduceres mærkbart ved benyttelse af ovennævnte model, vil denne blive fastholdt, ikke mindst på grund af dens simpelhed. Det bemærkes, at den anvendte spændingsfordeling ikke fuldt ud opfylder ligevægtsbetingelsen (2.5).

Ovennævnte anførte model kan kun anvendes så længe trykzonen kan opfattes som en stringer. Desværre har det ikke inden for rammerne af dette projekt været muligt at finde en rimelig optimal spændingsfordeling for det tilfælde, hvor forskydningsspændingerne indflydelse på normalspændingskapaciteten ikke længere kan negligeres. Dette hænger blandt andet sammen med, at ligevægtsbetingelsen (2.5), som omtalt i afsnit 6.2.3, leder til særdeles komplicerede spændingsfordelinger. Den simple model, der er skitseret

sidst i afsnit 6.2.3 kan dog benyttes, blot trykzonen reduceres til kun at omfatte de dele af bjælken, hvor der optræder forskydningspændinger, der hører til forskydningskraften, hvilket i praksis betyder at bjælkens bredde ved bestemmelse af  $\gamma_x$  reduceres med  $2t_x$ .

Alternativt kan man starte med forskydningsberegningen, idet forskydningspændingerne regnes jævnt fordelt over hele tværsnittet efter den simple metode angivet sidst i afsnit 6.2.3. Hvis  $\sigma_c \leq v_c f_c$  kan den resterende betonstrykke benyttes til optagelse af vridningsmomentet, idet spændingerne, der stammer herfra, regnes at overlejlre forskydningspændingerne, der stammer fra forskydningskraften. Ved bestemmelse af  $\gamma_x$  kan hele bjælkens bredde regnes spændingsaktiv, da (2.5) er opfyldt.

## 9.2.2 Kombineret forskydnings og vridning

I overensstemmelse med formel (6.12) vil der altid i en bjælke, hvor der optræder forskydningskræfter, være bøjningsmomenter. Derfor er specialtilfældet kombineret forskydnings og vridning et relativt fiktivt belastningstilfælde, omend der i en bjælke kan optræde snit, hvor bøjningsmomentet er nul. Når dette tilfælde alligevel behandles relativt detaljeret, skyldes det, at V-T-flydefladen, som en grænsekurve til V-T-M-flydefladen, har en vis betydning for konstruktionen af sidstnævnte, idet det er indres, at beregningsproceduren til dels baserer sig på en bestemmelse af M for givne værdier af V og T.

I tabel 9.1 er den plastiske løsning, der hører til specialtilfældet "ren forskydnings", anført. Bæreevnen vil i dette tilfælde blive benævnt  $V_p$ . Bemærk, at  $h_1$  her antager værdien  $h_1 = (h_c - h_e)$ . Den rene vridningsbæreevne  $T_p$  bestemmes ved hjælp af formlerne i kapitel 7.

I overensstemmelse med afsnit 9.2.1, kan  $t_x$ , for et givent vridningsmoment, bestemmes af ligningen

$$2 \sqrt{\Omega (v_c t_x - \Omega)} \left[ \frac{4}{3} t_x^2 - (h_e + b_e) t_x + b_e h_e \right] - T = 0 \quad (9.2)$$

| Armerings-tilfælde | Betingelse                                                                               | $\theta$                                                 | $\sigma_c$               | $\left(\frac{f_s}{f_c}\right)$       |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| NA                 | $\phi_{LV} + \psi \leq v_s$                                                              | $\text{Arctan}\left(\frac{\psi}{\phi_{LV}}\right)$       | $(\phi_{LV} + \psi) f_c$ | $\sqrt{\phi_{LV} \psi}$              |
| OAL                | $\phi_{LV} + \psi > v_s$<br>$\phi_{LV} > \frac{1}{2} v_s$<br>$\psi \leq \frac{1}{2} v_s$ | $\text{Arctan} \sqrt{\frac{\psi}{v_s - \psi}}$           | $v_s f_c$                | $\sqrt{\psi (v_s - \psi)}$           |
| OAB                | $\phi_{LV} + \psi > v_s$<br>$\phi_{LV} \leq \frac{1}{2} v_s$<br>$\psi > \frac{1}{2} v_s$ | $\text{Arctan} \sqrt{\frac{v_s - \phi_{LV}}{\phi_{LV}}}$ | $v_s f_c$                | $\sqrt{\phi_{LV} (v_s - \phi_{LV})}$ |
| OAT                | $\phi_{LV} > \frac{1}{2} v_s$<br>$\psi > \frac{1}{2} v_s$                                | $45^\circ$                                               | $v_s f_c$                | $\frac{1}{2} v_s$                    |

Tabel 9.1: Bæreevne ved ren forskydnings.

Idet  $\Omega$  kan vælges frit, blot løsningen er statisk tilladelig. Ligningen (9.2) kan kun benyttes så længe  $\Omega$  opfylder kravet  $\Omega < \frac{1}{2} v_c f_c b_m$ . Er denne betingelse ikke opfyldt er  $t_x = \frac{1}{2} b_m$ . For en mere detaljeret beskrivelse af disse forhold henvises der til afsnit 8.3.2.

Når  $t_x$  er bestemt, kan  $\theta_{xt}$ , som er det enaksede betontryks hældning med længdeaksen, fastlægges og dermed  $\sigma_t$  ved hjælp af formlerne i afsnit 8.3.3. Ud af den samlede trækcapacitet på  $A_s f_{yk}$  efter længdeaksen, beslaglægger vridningsoptagelsen en kraft af størrelsesordenen  $\sigma_t A_{ef}$ , hvor  $A_{ef}$  betegner arealet af det effektive tværsnit.

Den forskydningskraft, som bjælken kan optage for en given vridningspåvirkning T, kan nu bestemmes via formlerne i tabel 9.1, idet der for  $b$ ,  $\psi$  og  $\phi_{LV}$  anvendes følgende korrigerede værdier

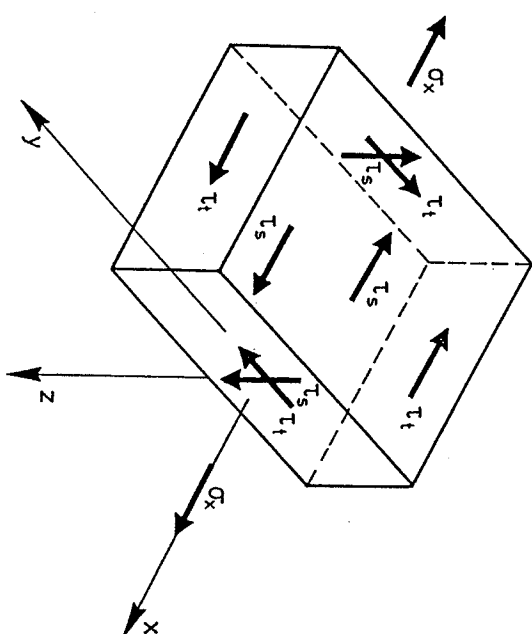
$$b' = b - 2t_x \quad (9.3)$$

$$\psi' = \frac{2(A_b f_{yb} - \Omega)}{b' f_c} \quad (9.4)$$

$$\phi'_{\lambda V} = \frac{(A_{\lambda} f_{y\lambda} - \sigma_{\tau} A_{ef})}{b' h_1 f_c} \quad (9.5)$$

Umiddelbart kan det ud fra en fysisk betragtning synes absurd at anvende  $b'$  bestemt ved (9.3), da dette fører til, at forskydningskraften optages dels af tværsnittet indenfor det effektive tværsnit og dels af dæklaget, jævnfør figur 9.2. Når denne fremgangsmetode er anvendt skyldes det, at grænsebetingelsen herved er opfyldt, det vil sige  $V \rightarrow V_p$  for  $T \rightarrow 0$ . Under alle omstændigheder understreges det, som anført i indledningskapitlet, at der her er tale om en beregningsmodel, og ikke noget forsøg på at beskrive den virkelige spændingstilstand.

Den anvendte beregningsmodel er ikke fuldt ud statisk tilladelig, idet der i delområdet af det effektive tværsnits over- og underflange optræder en triaksial spændingstilstand, se figur 9.2 og 9.3. Da trækspændingerne optages analog til de rene påvirkninger, vil disse kunne optages uden problemer, jævnfør løvrigt afsnit 9.3. Derimod giver betontrykkene anledning til nogle overvejelser. En korrekt beregning af det største betontryk leder til lange og komplicerede beregninger, se Bent S. Andreasen [85.3]. For anvendelse i praksis synes det derfor rimeligt at foretage en simplificasjon. Findes betontrykket  $\sigma_c$ , der hører til forskydningsberegningen, at være lille, det vil sige  $\sigma_c \ll v_s f_c$ , er bjælken normalarmet og betontrykkene har ingen indflydelse på bæreevnen. Er derimod værdien af  $\sigma_c$  i nærheden af  $v_s f_c$  skal en vis forsigtighed udvises. Eksempelvis kunne der indføres en størrelse  $\rho_s \leq 1$ , således at  $\sigma_c$  altid skal opfylde  $\sigma_c \leq \rho_s v_s f_c$ . For små værdier af  $t_x$ , det vil sige  $t_x \ll \frac{1}{2} b_m$ , vil ovennævnte delområder kun udgøre en mindre del af forskydningszonen, og  $\rho_s = 1$  kan umiddelbart benyttes. Er derimod værdien af  $t_x$  nær  $\frac{1}{2} b_m$ , udgør ovennævnte delområder en ikke uvæsentlig del af forskydningszonen. Det er dog værd at bemærke, at den forskydningskraft, der kan optages, nu er forholdsvis lille. Da det effektive tværsnit under alle omstændigheder vil medvirke ved optagelsen af forskydningskraften,



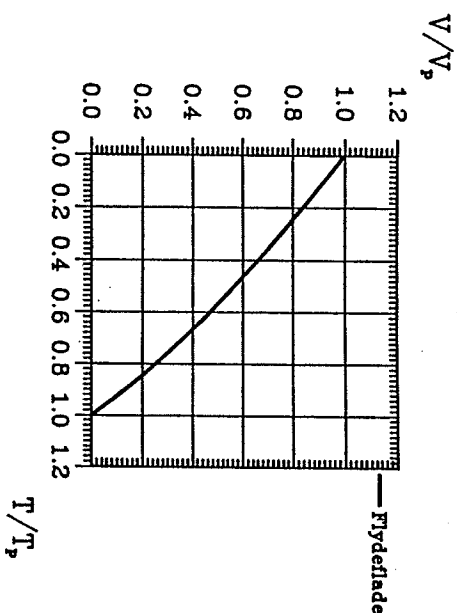
Figur 9.3: Zone hvor der optræder forskydningspændinger fra både tværdning og forskydning.

og der her benyttes en effektivitetsfaktor  $v_t \sim 0.7 v_s$ , vil det være rimeligt at antage, at  $\rho_s$  også i disse tilfælde vil kunne sættes til  $\rho_s = 1$ .

Med udgangspunkt i ovennævnte er  $\rho_s = 1$  benyttet i det følgende. En V-T-flydeflade kan nu konstrueres ved, for en given vridningspåvirkning, at finde den værdi for  $\Omega$ , der fører til en optimal forskydningsbæreevne. En V-T-flydeflade, baseret på en sådan fremgangsmetode, er vist i figur 9.4.

Det bemærkes, at ovenstående beregningsmodel fører til, at  $\Omega \rightarrow 0$ , og dermed  $t_x \rightarrow 0$ , for  $T \rightarrow 0$ .

Ovennævnte fremgangsmetode til bestemmelse af en optimal værdi for  $\Omega$ , kaldet  $\Omega_o$ , er besværlig, hvorfor der vil blive søgt et



Figur 9.4: Optimal flydeflade for parameterverdierne  $\phi_k = 0,1173$ ,  $\phi_p = 0,0878$ ,  $\psi = 0,0734$  og  $\phi_{\lambda v} = 0,1125$ .

tilnærmelsesudtryk for  $\Omega_0$ .

En optimal værdi for  $\Omega$  findes ved, at udtrykke forskydningsbæreevnen  $V$  som en funktion af  $\Omega$ , og derefter optimere på dette udtryk. En sådan fremgangsmåde leder desværre til særdeles komplicerede beregninger, hvorfor en alternativ, og mere overslagsmæssig, metode er benyttet.

En detaljeret numerisk analyse, som omfattede en stor mængde data med varierende værdier af de primære parametre, pegede ikke i retning af et rimeligt simpelt udtryk for  $\Omega_0$ . Derimod afslørede analysen, at  $\theta_{kt}$  stort set ikke varierede for  $0 \leq T \leq T_p$ , og at  $\theta_{kt}$  tilnærmelsesvis antog værdien  $\theta_t$ , hvor  $\theta_t$  er det enaksede betontryks hældning med længdeaksen ved ren vridning, jævnfør tabel 7.1. Den største afvigelse mellem  $\theta_{kt}$  og  $\theta_t$  optræder for  $T = 0$  og var da maksimalt cirka  $3^\circ$ . En sammenligning mellem flydeflader bestemt ved hjælp af  $\theta_{kt} = \theta_t$  og ovenfor anførte optimalmetode viste ikke nogen nævneværdig afvigelse, således at  $\theta_{kt} = \theta_t$  som en tilnærmelse kan anvendes ved fastlæggelsen af  $t_k$ .

I overensstemmelse med formel (8.4) kan der således regnes med en konstant forskydningsspænding, det vil sige uafhængig af  $V$ , af størrelsen

$$\tau_t = \nu_t f_c \cos \theta_t \sin \theta_t \quad (9.6)$$

i det effektive tværsnit. Hermed fås det også umiddelbart ved hjælp af formel (8.2), at  $t_k$  kan bestemmes af

$$2\nu_t f_c \cos \theta_t \sin \theta_t \left[ \frac{4}{3} t_k^2 - (h_e + b_e) t_k + h_e b_e \right] - T = 0 \quad (9.7)$$

så længe løsningen opfylder kravet  $t_k \leq \frac{1}{2} b_m$ . Den optimale værdi for  $\Omega$ , det vil sige den del af bøjlerens flydekræft, der benyttes til vridningsoptagelsen, er bestemt ved

$$\Omega_0 = \nu_t f_c t_k \sin^2 \theta_t \quad (9.8)$$

### 9.2.3 Bæreevnebestemmelse

Med formlerne og beregningsprincipperne angivet i kapitel 6 og 8 samt afsnit 9.2.2 kan grænseflydefladerne for henholdsvis  $T = 0$ ,  $V = 0$  og  $M = 0$  i V-T-M-systemet fastlægges.

Den rumlige flydeflade kan nu fastlægges. Dette kan for eksempel ske ved for alle værdier af  $T$ , at bestemme de hertil hørende ( $V$ ,  $M$ )-flydeflader, idet der optimeres med hensyn til  $\Omega$ .

For en kendt værdi af  $T$  og  $\Omega$  kan  $t_k$  og  $\sigma_t$  bestemmes i overensstemmelse med formlerne anført i afsnit 9.2.2 og 8.3.3.

Fremkommer forskydningskraften direkte, kan ( $V$ ,  $M$ )-flydefladen bestemmes ved hjælp af formlerne i afsnit 6.2.2, blot parametrene  $b$ ,  $\psi$  og  $\phi_s$  korrigeres under hensyntagen til vridningspåvirkningen, således at følgende reducerede værdier benyttes

$$b' = b - 2t_k \quad (9.9)$$

$$\psi' = \frac{2(\lambda_b f_{yb} - \Omega)}{b' f_c} \quad (9.10)$$

$$\phi'_s = \frac{(\lambda_b f_{yt} - \frac{1}{2} \sigma_{ref})}{b' h_i f_c} \quad (9.11)$$

idet det dog bemærkes, at det herved bestemte  $t_s$  er defineret ved  $t_s = V/h_i (b - 2t_k)$ .

I det indirekte tilfælde kan simplifikationer i afsnit 6.2.4 benyttes. Det bemærkes, at bjælker, som er belastet ved deres overside, normalt henhører under dette tilfælde. Afvigelse herfra kan dog forekomme, eksempelvis hvis længdearmningen varierer med  $x$  og  $z$ , se nærmere herom i afsnit 6.5.1.

For den indre momentarm  $h_i$  benyttes en værdi, der fastlægges på basis af det snit hvor trykkraften  $C$ , der hører til bøjningsmomentet, antager sin maksimale værdi, dog således at  $h_i$  højst sættes til  $h_i = (h_t - h_c)$ .

Ovennævnte beregningsmetode forudsætter, at trykzonen er equivalent med en stringer, det vil sige  $Y_k \leq \mu h_t$ . For  $\mu$  kan værdien 0,3 benyttes indtil videre.

For begge ovennævnte metoder gælder, at det skal sikres, at trykstringeren for alle værdier af  $x$  har den fornødne styrke både med hensyn til træk og tryk. For trækstringeren kontrolleres, at denne har den fornødne styrke med hensyn til træk for alle værdier af  $x$ .

Parameteren  $\Omega$  er en optimeringsparameter, jævnfør afsnit 9.2.2. Den optimale værdi af  $\Omega$ , kaldet  $\Omega_o$ , kan bestemmes ved for givne værdier af  $T$  og  $M$ , at optimere på størrelsen af  $V$ . De maksimalt tilladte værdier for  $T$  og  $M$  findes for planen hvor  $V = 0$ . Gælder det, at  $T_{\max} = T_p$ , kan  $\Omega_o$  som en tilnærmelse regnes bestemt ved formel (9.8).

Hvis  $T_{\max} > T_p$  kan (9.8) ikke anvendes, i hvert fald ikke for værdier af  $T > T_p$ . Begrundelsen herfor er, at  $(\lambda_b f_{yb} - \Omega_o)$  ville være nul i hele ovennævnte interval, svarende til at der ikke kan optages nogen forskydningskraft. Dette kan umiddelbart indses ikke at være

korrekt. Formel (9.8) kan dog som en tilnærmelse anvendes, blot benyttes det  $\theta_c$ , der hører til  $T_{\max}$ . Dette princip kan umiddelbart anvendes for værdier af  $M$ , der er større end det  $M$ , der hører til  $T_{\max}$ . For det resterende interval kan eventuelt en retlinjet interpolation benyttes.

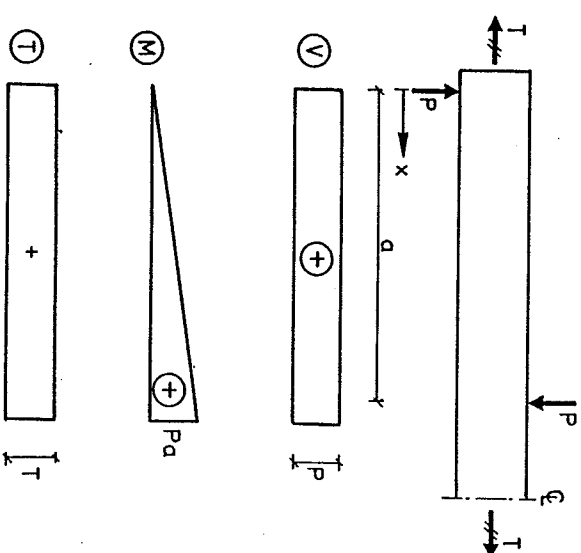
### 9.2.4 Teori vurderet ved forsøg

Desværre har det ikke indenfor rammerne af dette projekt været muligt, at kontrollere teorien med forsøg.

Dette skyldes ikke, at der ikke eksisterer forsøgsmateriale, tværtimod er der verden over lavet en mængde forsøg.

Problemet er knyttet til selve vurderingen af teorien ud fra forsøgene, idet dette vil kræve en grundig analyse ved hjælp af EDB, hvis en sådan analyse skal lede til et fornuftigt resultat.

Et eksempel på ovennævnte problem fås ved at betragte forsøgsbjælken vist i figur 9.5.



Figur 9.5: Forsøgsopstilling for kombineret V-T-M.

Bjælken vist i figur 9.5 regnes at have samme armering over strækningen  $a$ , der udgør forsøgsområdet.

Da det ikke vidnes, hvor i området  $a$  bruddet vil indtræffe, skal den rumlige flydeflade anvendes. Selv om betingelsen  $V = \frac{dM}{dx}$  eventuelt ville kunne benyttes, ville dette ikke hjælpe her, da der i stedet ville være indført en ny variabel, nemlig  $x$ .

For kombineret  $T$  og  $M$  var det muligt grafisk, at vurdere teorien med forsøg. Dette er desværre ikke muligt her, da der er tale om en rumlig afbildning. Som målestok for teoriens egnethed kan der imod forsøgspunktets mindste afstand til flydefladen benyttes. Sådan en beregning er kompliceret og tidskrævende blandt andet fordi der indgår en optimeringsparameter  $\eta$ .

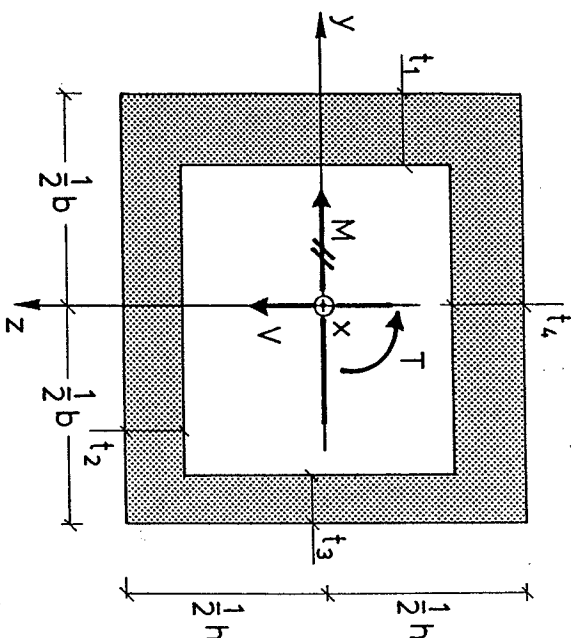
Værd at bemærke om den opstillede beregningsmodel er det, at der kun er indført én ny parameter, nemlig  $\rho_s$ . I afsnit 9.2.2 er denne parameter, ud fra nogle teoretiske betragtninger, ansat til at have en værdi i nærheden af  $\rho_s = 1$ . For brug i praksis bør indtil en ordentlig dokumentation forligger, en vis konservatisme udvises ved fastlæggelse af  $\rho_s$ . Bemærk, at for at der kan være fuldstændig konsistens, vil  $\rho_s$  være en ikke lineær funktion af  $T$  eller  $V$ , idet for  $V + V_p$  skal  $\rho_s + 1$ , se ellersagt nærmere herom i afsnit 9.2.2.

### 9.3 ANDRE TVÆRSNIT OG ARMERINGSUDFORMNINGER

Kassedrageren i figur 9.6 betragtes.

Indledningsvis regnes  $T$  og  $V$  uafhængig af  $x$ , således at  $M$  varierer lineært med  $x$ .

Kassedrageren regnes at være sammensat af fire skiver, der er armeret, som vist i figur 7.23.



Figur 9.6: Kassedrager.

Højden af de lodrette skiver sættes til

$$h_1 = h - \frac{1}{2}t_2 - \frac{1}{2}t_4 \quad (9.12)$$

mens bredden af de vandrette skiver sættes til

$$b_1 = b - \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_3 \quad (9.13)$$

I hver skive er indlagt et lokalt koordinatsystem som vist i figur 7.1. Fortegnsregningen regnes i overensstemmelse med figur 9.6.

Bøjningsmomentet  $M$  antages alene optaget af de to vandrette skiver. De hertil hørende spændinger er, idet træk regnes positiv

$$\sigma_{2M} = \frac{M}{t_2 b_1 h_1} \quad (9.14)$$

$$\sigma_{4M} = - \frac{M}{t_4 b_1 h_1} \quad (9.15)$$

Fra vridningsmomentet fås spændingerne, jævnfør fortegneregningen i figur 9.7.

$$\tau_{1T} = \frac{T}{2b_1 h_1 t_1} \quad (9.16)$$

Lidt i henviser til den enkelte skive. Bemærk, at ligevægt kræver, at  $\tau_{1T} t_1 = \tau_{2T} t_2 = \tau_{3T} t_3 = \tau_{4T} t_4$  er opfyldt.

Fra forskydningskraften fås ved hjælp af kravet om momentligevægt følgende spændinger i de lodrette flanger, jævnfør fortegneregningen i figur 9.7

$$\tau_{1V} = \frac{V(b - t_3)}{2h_1 b_1 t_1} \quad (9.17)$$

$$\tau_{3V} = \frac{V(b - t_1)}{2h_1 b_1 t_3} \quad (9.18)$$

I de vandrette skiver varierer forskydningsspændingerne lineært med  $y$ , jævnfør ligevægtsbetingelsen (2.5). Af kravet om ligevægt mellem de enkelte skiver fås hermed, se figur 9.7

$$\tau_{4V}^1 = \frac{V(b - t_3)}{2h_1 b_1 t_4} \quad (9.19)$$

$$\tau_{4V}^3 = \frac{V(b - t_1)}{2h_1 b_1 t_4} \quad (9.20)$$

$$\tau_{2V}^1 = \frac{V(b - t_3)}{2h_1 b_1 t_2} \quad (9.21)$$

$$\tau_{2V}^3 = \frac{V(b - t_1)}{2h_1 b_1 t_2} \quad (9.22)$$

Bemærk, at for  $t_1 \sim t_3$  og/eller  $(t_1, t_3) \ll b$ , kan  $(b - t_1)$  og  $(b - t_3)$  tilnærmelsesvis regnes at være  $b_1$ , hvorved følgen-

de simplificerede formler opnås

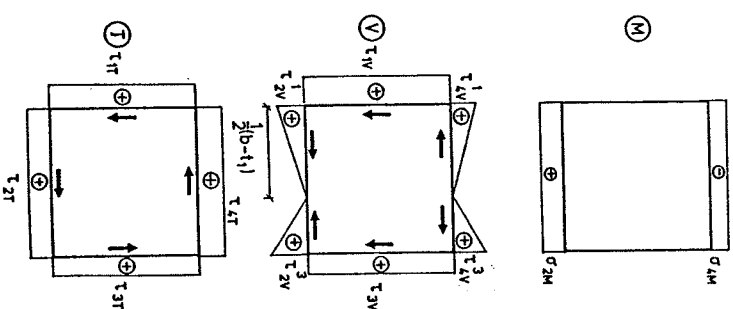
$$\tau_{1V} = \frac{V}{2h_1 t_1} \quad (9.23)$$

$$\tau_{3V} = \frac{V}{2h_1 t_3} \quad (9.24)$$

$$\tau_{4V}^1 = \tau_{4V}^3 = \frac{V}{2h_1 t_4} \quad (9.25)$$

$$\tau_{2V}^1 = \tau_{2V}^3 = \frac{V}{2h_1 t_2} \quad (9.26)$$

Spændingerne i de enkelte skiver kan nu bestemmes ved at summere ovennævnte spændinger under hensyntagen til den aktuelle fortegneregning, jævnfør figur 9.7.



Figur 9.7: Spændinger og fortegneregning.

For bjælker med lille bredde anvendes for de vandrette skiver den numerisk største forskydningspænding. For bjælker med stor bredde kan der eventuelt tages hensyn til den aktuelle spændingstilstand.

Ovennævnte spændingstilstand ses at opfylde de statiske betingelser i afsnit 2.1.3.

Det bemærkes, at normalspændingerne i de vandrette skiver ikke fuldt ud opfylder kravene til ligevægt om z-aksen. Dette betyder dog ikke noget, da normalspændingskapaciteten er uafhængig af forskydningspændingerens retning, således at  $b$  kunne være anvendt i (9.14) og (9.15) i stedet for  $b_1$ .

Vedrørende vridning bemærkes det specielt, at dæklaget her er medregnet ved spændingsoptagelsen. Hvorvidt dette er rimeligt afhænger af armeringsarrangementet, jævnfør afsnit 7.6, og hvorvidt  $t_1 \ll b$  eller  $h$ . I specielle tilfælde, det vil sige ved enkelt lukket bøjle for hele tværsnittet og  $t_1 \sim \frac{1}{2}b$  eller  $\frac{1}{2}h$ , bør en vis konservatisme udvises.

For  $v$  kan i skiverne 1, 2 og 3 benyttes  $v_s$ , hvis der anvendes lukkede bøjler, eller armering der kan sidestilles hermed, i hver enkelt skive. Anvendes en enkelt lukket bøjle for hele tværsnittet, anvendes for  $v$  en lineær interpoleret værdi i intervallet  $v_t \leq v_s$ . For skive nr. 4 kan ligeledes anvendes en lineær interpoleret værdi mellem  $v_t$ ,  $v_s$  og  $v_b$ . Hvis  $t_1 \ll h$ , og der optræder et rimeligt bøjningsmoment kan  $v_b$  dog anvendes uden problemer, jævnfør afsnit 8.6.

Bæreevnen kan nu bestemmes ved at benytte flydebetingelserne i afsnit 3.5 for hvert enkelt skivefelt. Udfra de herved bestemte spændinger kan  $V$ ,  $T$  og  $M$  bestemmes. Bemærk, at  $V$ - $T$ -fladen er lineær, det vil sige kan skivefelterne optage  $T_{ip}$ , er forskydningspændingen  $T_{1V}$ , der hører til forskydning, bestemt ved  $(T_{ip} + T_{1T})$ , idet minus-tegnet gælder for samme fortegn af  $T_{1T}$  og  $T_{1V}$ .

Ovennævnte metode kan umiddelbart udstrækkes til også at gælde massive tværsnit, idet tykkelserne  $t_1$  kan optimeres således, at  $\sigma_c = v_f$  i hvert enkelt skivefelt. For små armeringsgrader vil et rimeligt godt gæt på  $t_1$ , idet det dog forudsættes at  $\sigma_c \leq v_f$ , er opfyldt

overalt, fører til værdier for  $V$ ,  $T$  og  $M$  nær på det optimale, således at iterationsprocessen for beregningen kan reduceres.

For store kassedragere skal der foretages lokale undersøgelser for overførsel af kræfterne. Et eksempelvis bjælken belastet af en jævnt fordelt last ved oversiden, skal der undersøges for de herved fremkaldte snitkræfter. Den hertil hørende spændingstilstand skal der tages højde for ved ovennævnte globale beregning.

Ovennævnte model kan udstrækkes til at gælde vilkårlige variationer af snitkræfterne med  $x$ . Opfyldelse af (2.5) medfører dog, at der ikke vil være en lineær variation af forskydningspændingerne i de vandrette skiver. Ovennævnte værdier vil dog stadig gælde.

Beregningsmodellen kan uden videre også udstrækkes til at gælde for vilkårlige tværsnit, jævnfør f.eks. afsnit 6.5 og 7.6.

På tilsvarende vis kan beregningsmodellen anført i afsnit 9.2 udstrækkes til vilkårlige variationer af snitkræfterne med  $x$  og tværsnitsudformninger, under tagtagelse af de i afsnit 4.4, 6.5 og 7.6 anførte principper.

## 9.4 ARMERINGSBESTEMMELSE

Indledningsvis betragtes en bjælke med rektangulært tværsnit og en spændingsfordeling som anført i afsnit 9.2. Snitkræfterne  $V$ ,  $T$  og  $M$  regnes givet.

Ved hjælp af formel (4.16) bestemmes  $Y_0$  for tværsnittet med det maksimale moment. Er  $Y_0 \leq 0,3h$  ikke opfyldt, ændres tværsnitsdimensionerne indtil dette krav er opfyldt. Den nødvendige armering i trækstringeren, for optagelse af momentet, fastlægges ved hjælp af formel (4.17). Den indre momentarm  $h_1$  bestemmes.

Ved brug af formlerne i afsnit 7.7 kan  $t_0$  og  $A_{b1T}$ , for et valgt  $\theta$ , bestemmes. Den til vridningen hørende kraftkomponent efter længdeaksen er bestemt ved

$$T_1 = \frac{T A_{ef}}{S_{ef}} \cot \theta \quad (9.27)$$

Kraften angriber i tværsnittets tyngdepunkt.

For et valgt  $\theta$ , kan den til forskydningsopdagelsen nødvendige bøjllearmering  $A_{bV}$  bestemmes, idet formel (6.44) benyttes. For  $b$  anvendes den fulde bredde  $b$ , idet  $r_s$  regnes bestemt på basis af det fulde tværsnit. Det bemærkes, at der på grund af vridningen skal anvendes lodrette bøjler. Betontrykket kontrolleres af formlen

$$\sigma_c = \frac{r_s b}{(b - 2t_o)} (\cot\theta + \tan\theta) \leq \rho_s v_s f_c \quad (9.28)$$

Desværre vides det ikke på nuværende tidspunkt, hvilken værdi der skal anvendes for  $\rho_s$ . Konservativt og i mangel af bedre foreslås  $\rho_s \sim 0,8$ , jævnfør iøvrigt afsnit 9.2.4.

Efter længdeaksen optræder kraften  $V \cot\theta$ , angribende midt mellem stringerne.

Regnes med en lineær variation af  $M$  og dermed konstant  $V$ , samt konstant  $T$  fås kræfterne i stringerne at være bestemt ved, jævnfør figur 6.4

$$T = \frac{M}{h_i} + \frac{1}{2} V \cot\theta + \frac{1}{2} T_\lambda \quad (9.29)$$

$$C = \frac{M}{h_i} - \frac{1}{2} V \cot\theta - \frac{1}{2} T_\lambda \quad (9.30)$$

Idet  $T$  regnes positiv som træk, mens  $C$  regnes positiv som tryk. Optræder forskydningskraften direkte benyttes (9.29) og (9.30) for alle værdier af  $x$ . Er der derimod tale om det indirekte tilfælde, kan beregningen simplificeres, jævnfør afsnit 6.2.4.

Både træk- og trykstringeren kontrolleres for om den fornødne kapacitet er til stede for alle værdier af  $x$ . Bemærk, at der kan optræde træk i trykstringeren.

Optræder der en længdearmring mellem stringerne (symmetrisk fordelt) kan denne benyttes til at reducere bidragene fra forskydnings og vridning i formlerne (9.29) og (9.30).

Den nødvendige bøjllearmering er, hvis der anvendes 2-snitbøjler, bestemt ved

$$A_{bL} = \frac{A_b}{s} = A_{bLT} + A_{bLV} \quad (9.31)$$

Anvendes flersnitbøjler, kan  $A_{bLV}$  reduceres under hensyntagen hertil. Det understreges, at  $A_{bLT}$  skal ligge yderst i tværsnittet, samt at  $A_{bLV}$  skal optages jævnt over tværsnittet, medmindre der er tale om større værdier af  $t_o$ , og der armeres med bøjler tæt op ad det effektive tværsnitts lodrette inderside, som ved en traditionel bjælke med bredden  $(b - 2t_o - 2c)$ .

Ovennævnte metode kan uden videre anvendes for en vilkårlig variation af snitkræfterne, blot de generelle krav anført i afsnit 6.6 og 7.7 overholdes.

Ovennævnte model kan udstrækkes til at gælde for vilkårlige tværsnit under lagttagelse af kravene anført i afsnit 4.4.3, 6.5 og 7.6. En vis forsigtighed bør dog udvises. Indtil videre, og i mangel af bedre, kan metoden anført i afsnit 9.3 anvendes. For givne værdier af  $T$ ,  $V$  og  $M$  vælges værdier for  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  og  $t_4$ . Herefter bestemmes spændingerne i de enkelte skiver, jævnfør formlerne i afsnit 9.3. For hver enkelt skive benyttes armeringsformlerne i afsnit 3.7, idet betontrykkene også kontrolleres. Vedrørende værdien af  $v$  henvises til afsnit 9.3. Er  $\sigma_c \ll v f_c$ , kan der vælges nye værdier af trykkelserne, indtil  $\sigma_c$  er i nærheden af  $v f_c$ . For store kassebjælger, hvor  $t_1 \ll \min(b, h)$  anvendes blot flangetykkelserne direkte. Kræfter stammende fra lokale overførsler skal inddrages i spændingsundersøgelsen, jævnfør afsnit 9.3.

# 10 KOMBINEREDE PÅVIRKNINGER GENERELT

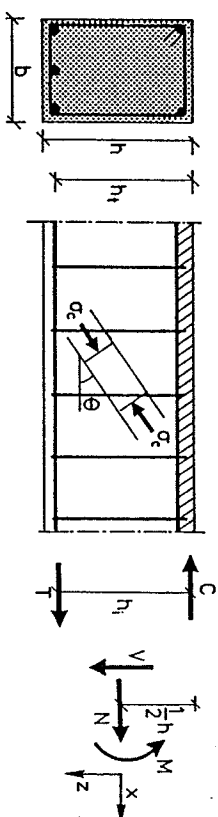
De grundlæggende snitkrafttilfælde er behandlet i kapitlerne 4-9. I dette kapitel skal andre og ikke behandlede snitkraftkombinationer kort berøres. Behandlingen vil ikke blive detaljeret, dels da rammerne for dette arbejde ikke tillader det, og dels fordi disse snitkraftkombinationer mere eller mindre kan baseres på de tidligere anførte spændingsfordelinger og de hertil hørende principper. De angivne beregningsmodeller vil blive baseret på nedrevardimetoden, det vil sige bæreevnebestemmelsen vil være på den sikre side. De angivne løsninger er dermed ikke nødvendigvis eksakte plastiske løsninger. Desværre har der indenfor rammerne af dette projekt ikke været tid for en detaljeret sammenligning med forsøg, hvoraf der 100% rigt kun eksisterer en begrænset mængde.

## 10.1 KOMBINERET N, V OG M

Som det fremgår af afsnit 6.2.3, har det ikke været muligt, indenfor rammerne af dette projekt, at finde en tilfredsstillende spændingsfordeling for de tilfælde, hvor trykzonen ikke kan regnes at være en stringer. Dette betyder, at alene stringermodellen vil blive betragtet i dette afsnit.

### 10.1.1 Statisk tilnærmelig spændingsfordeling

Stringerbjælken i figur 10.1 betragtes.



Figur 10.1: Stringerbjælke.

Bjælkens geometriske og materialemassige data regnes at være i overensstemmelse med afsnit 4.1, 5.1 og 6.1.

Snitkræfterne  $V$ , der regnes positivt, og  $N$  forudsættes uafhængige af længdekoordinaten  $x$ .

Forudsættes bøjlerne at flyde, kræver ligevægt efter  $z$ -aksen

$$\psi f_c = \sigma_c \sin^2 \theta \quad (10.1)$$

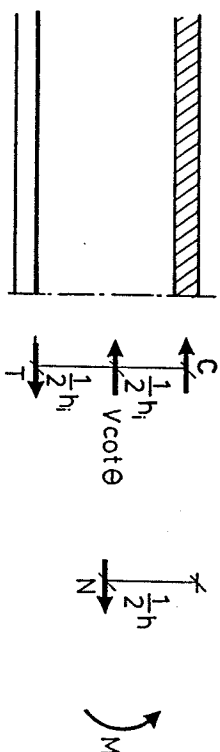
Forskydningsligevægt fører til ligningen

$$V = b h_1 \sigma_c \cos \theta \sin \theta \quad (10.2)$$

I overensstemmelse med figur 10.2 er stringerkræfterne bestemt ved

$$C = \frac{M}{h_1} - \frac{1}{2} V \cot \theta - \frac{N(h_c - \frac{1}{2}h)}{h_1} \quad (10.3)$$

$$T = \frac{M}{h_1} + \frac{1}{2} V \cot \theta + \frac{N(\frac{1}{2}h + h_1 - h_c)}{h_1} \quad (10.4)$$



Figur 10.2: Kræfter efter længdeaksen.

Ovennævnte spændingsfordeling ses at opfylde randbetingelserne, det vil sige  $\frac{dT}{dx} = \frac{dC}{dx} = \frac{V}{h_1}$ , hvorved den er statisk tilladelig.

### 10.1.2 Det direkte tilfælde

Forskydningskraften antages ført direkte ind i bjælken som en jævnt fordelt forskydningsspænding, jævnfør afsnit 6.2.4.

Selvom det ikke fremgår direkte af udtrykkene og figurerne i afsnit 10.1.1, vil forskydningszonen bidrage til optagelsen af  $N$ . Dette kan eksemplificeres ved, at betragte det tilfælde, hvor bjælkens optimale tryknormalkapacitet ønskes bestemt, for en kendt værdi af  $V$  og dermed  $M$ . Desto større  $V \cot \theta$  er, desto større krav stilles der til trækcapaciteten efter længdeaksen, og desto større tryknormalkraft kan dermed optages. Der er dog en grænse for, hvor stor  $V \cot \theta$  kan vælges, idet flydebetingelserne i afsnit 3.5 skal overholdes i forskydningszonen.

Af udtrykket (3.38) kan det umiddelbart indses, at den største forskydningskraft, der overhovedet kan optages, er bestemt af (6.20), idet det forudsættes at  $\sigma_c = v_s f_c$ , og at stringerne har den fornødne kapacitet til, at optage de kræfter der optræder efter længdeaksen. Dette kan eventuelt nødvendiggøre, at der optræder en tryknormalkraft af en vis værdi.

Regnes længdearmeringen at kunne optage trykspændinger, samt antages trykzonens højde højst at måtte være  $\mu h_t$ , jævnfør afsnit 6.2.1, fås stringerne at have følgende træk- og trykcapaciteter

$$T_t = A_{lt} f_{yt} \quad (10.5)$$

$$T_c = A_{lc} f_{yc} \quad (10.6)$$

$$T_t^* = v_{bn} f_c \mu (h - h_c) b + A_{lt} f_{yt}^* \quad (10.7)$$

$$T_c^* = v_{bn} f_c \mu h_t b + A_{lc} f_{yc}^* \quad (10.8)$$

Vedrørende værdien af  $v_{bn}$  henvises til afsnit 5.3.

En bjælkes  $N$ - $V$ - $M$ -flydeflade kan fastlægges ved benyttelse af følgende metode:

Den maksimale forskydningsbæreevne fastlægges ved hjælp af (6.20), og dermed kan  $\theta$  bestemmes af (6.21). Når  $\theta$  er bestemt, er dermed også  $V \cot \theta$  i (10.3)-(10.4) kendt. Ud fra stringerkapaciteterne (10.5)-(10.8) kan for et givent  $M$  eller  $N$ , enten  $N$  eller  $M$  bestemmes, idet alle snit i bjælken betragtes.

For små værdier af  $V$ , målt i forhold til  $V_p$ , vil det være konservativt at benytte  $v_s$  for forskydningszonen. For  $V \rightarrow 0$  vil man kunne regne værdien af effektivitetsfaktoren gående mod  $v_n$ . Der kan således regnes med en lineær interpolationsformel for  $v$  i forskydningszonen. Det vil dog altid være på den sikre side at benytte  $v_s$ .

Benyttes skrå bøjler, anvendes samme fremgangsmetode ved fastsættelse af flydefladen, blot ændres formlerne for forskydningszonen, jævnfør afsnit 3.6 og 6.5.1.

Ovennævnte metode kan, i overensstemmelse med afsnit 6.5.1, tilnærmelsesvis anvendes for vilkårlige forskydningsnitkraftkurver. Derimod er beregningsmodellen ikke direkte anvendelig i de tilfælde hvor  $N$  varierer med  $x$ , idet ligevægtsbetingelsen (2.5) nu ikke længere er opfyldt, og dermed er den valgte forskydningsspændingsfordeling ikke statisk tilladelig. Hvis den del af normalkraften, der varierer med  $x$ , alene kan optages af stringerne, vil som tidligere modellen tilnærmelsesvis kunne anvendes.

### 10.1.3 Det indirekte tilfælde

Beregnes analog til det direkte tilfælde, blot andres kravene til stringerne i snit, hvor  $M_{\max}$  optræder, således at bidraget  $1/2 V_{\cot\theta}$  i udtrykkene (10.3)-(10.4) kan udelades.

### 10.1.4 Armeringsbestemmelse

På basis af snittet med  $M_{\max}$  fastlægges en værdi for  $h_1$ .

Som i afsnit 6.6 vælges en værdi for  $\cot\theta$ , idet de anførte grænser overholdes. Det bemærkes, at regnes der at optræde en tryknormalspænding i forskydningszonen, kan den øvre grænse for  $\cot\theta$  øges. Hvor meget afhænger af størrelsesordenen af  $N$ . Hvis  $V + 0$  og  $N + N_p$  vil det være rimeligt at vælge  $\cot\theta + \infty$ . For  $N + 0$  er den øvre grænse som anført i afsnit 6.6. Ved valg af  $\cot\theta$  skal det sikres, at den angivne spændingstilstand for forskydningszonen er indenfor flydefladen, jævnfør afsnit 3.5. Er  $N$  en trækraft ilægges blot den nødvendige armering, uden hensyntagen til forskydningsberegningen.

Når  $\cot\theta$  er fastlagt, og ovennævnte forhold er i orden, kan stringerkræfterne bestemmes og dermed den nødvendige armering. Overstiger trykkene i stringerne det tilladelige, vælges en ny værdi for  $h_1$ . Bemærk dog, at trykzonen højst bør udgøre  $\sim 0,3 h_t$  af tværsnittets højde. Er denne trykzonehøjde ikke tilstrækkelig, bør bjælkehøjden øges, svarende til at trykzonehøjden netop svarer til  $\sim 0,3 h_t$ .

## 10.2 KOMBINERET T OG N

Optræder der sammen med vridningseffekten en normalkraft, kan forskellige statistisk tilladelige spændingsfordelinger benyttes.

I det følgende forudsættes  $T$  og  $N$ , at være konstante over det betragtede bjælkestykke. De geometriske og materialemæssige data er som anført i afsnit 5.1 og 7.1.

En statistisk tilladelig løsning kan opstilles ved at lade  $N$  indgå i ligestrømsligningen (7.16). Regnes  $N$  positiv som træk, vil  $N$  indgå som et additionsbidrag på højresiden i (7.16). For et givent  $N$  kan vridningsbæreevnen nu bestemmes efter principperne angivet i kapitel 7, idet det forudsættes at  $N \leq N_p$ . For  $V$  kan som en sikker værdi  $V_t$  anvendes. For  $N + N_p$  vil det dog være rimeligt, at lade værdien af  $V$  gå mod  $V_n$ , jævnfør afsnit 5.3, således at der for  $V$  anvendes en interpoleret værdi beliggende i intervallet  $V_t \leq V \leq V_n$ . I overensstemmelse med afsnit 7.2.1 regnes dæklaget ikke spændingsaktivt ved vridningsoptagelsen på grund af afskallingsproblemet. Som anført i afsnit 8.2, vil tendensen til afskallning for store værdier af  $N$  dog være minimal, og dæklaget kan inddrages til optagelse af en del af normalkraften, idet der regnes med tryknormalspændingskapaciteten  $V_{nc}$ . Ovennævnte spændingsfordeling opfylder kravet  $N + N_p$  for  $T + 0$  og  $T + T_p$  for  $N + 0$ . Det bemærkes, at en given tryknormalkraft vil kunne føre til vridningsbæreevner større end  $T_p$ , jævnfør principperne anført i afsnit 8.4. Flydefladens udseende vil i store træk være som vist i figur 3.16.

Som en alternativ fremgangsmåde kan principperne anført i afsnit 8.3.1 benyttes. For en given vridningseffekt kan  $t_k$  og  $\sigma_x$  bestemmes som anført i afsnit 8.3.2 og 8.3.4. Ved fastlæggelse af  $\sigma_x$  kan principperne for  $V$  anført i afsnit 8.6 benyttes, blot erstatte  $V_b$  af  $V_n$ . Når  $t_k$  og  $\sigma_x$  er fastlagt, kan normalkraftkapaciteten bestemmes ved at regne med normalspændingskapaciteterne  $V_{nc}$  henholdsvis udenfor og indenfor det effektive tværsnit, og  $\sigma_x$  i det effektive tværsnit.

Ovennævnte beregningsmetode kan umiddelbart udstrækkes til at gælde for en vilkårlig variation i vridningssnitkraftkurven. For  $N$  varierende med  $x$  gælder derimod samme forhold som anført i afsnit 10.1.2. Dette betyder, at varierer  $N$  med  $x$  kan stringermodellen benyttes, og den del af  $N$  der varierer med  $x$  regnes alene optaget af stringerne.

For givne snitkræfter, hvor en armering ønskes fastlagt, bestemmes først den armering, der kræves ifølge afsnit 7.7 til optagelse af vridningsmomentet. Ved valg af  $\cot\theta$ , gælder principperne beskrevet i afsnit 10.1.4. Når armeringen er fastlagt, kan, alt efter

størrelsen af normalkraften, den nødvendige armering efter længdeaksen fastlægges, eventuelt i form af at der ikke er behov for nogen armering efter længdeaksen. Det kontrolleres, hvis der er tale om en tryknormalkraft, at trykket kan optages, idet der ved denne beregning tages højde for den reduktion, der er på normal-spændingerne i det effektive tværsnit.

### 10.3 KOMBINERET T, N OG M

Beregningen er analog til den i kapitel 8 angivne, blot skal der ved bestemmelsen af  $Y_k$  og  $M_k$  tages højde for normalkraften, idet denne indgår i ligevægtsligningen efter længdeaksen og momentligvægtsligningen, jævnfør afsnit 8.3.5. For  $v_b$  anvendes i stedet  $v_n$ , se afsnit 5.3. For  $M \rightarrow 0$  tages der højde for de i afsnit 10.2 anførte forhold.

Ud over ovennævnte spændingsfordeling, eksisterer der også andre anvendelige, eksempelvis i form af stringermodellen. Principperne for anvendelse af denne er identiske med de i afsnit 10.1 og 10.2 anførte forhold.

### 10.4 KOMBINERET T, V, N OG M

Betragtes den i afsnit 9.2 beskrevne spændingstilstand for kombineret V, T og M, skal denne udstrækkes til også at omfatte normalkræfter. N regnes uafhængig af x.

Er der tale om en træknormalkraft, kan kapaciteten bestemmes ved hjælp af den om tyngdepunktet symmetrisk fordelte længdearmering, der ikke udnyttes til optagelse af V, T og M. Et eventuelt tryk i trykstringeren kan omregnes til en fiktiv armering med en vis trækkapacitet.

For en tryknormalkraft benyttes følgende procedure, idet højden af trykstringeren regnes givet.

For et givent T og N kan  $t_o$  og  $t_e$  i det effektive tværsnit bestemmes. For den del af de lodrette flanger (skiver) i det effek-

tive tværsnit der ligger udenfor stringerne, og som samtidig er symmetrisk om den vandrette tyngdepunktslinje, kan en normal-spænding svarende til formel (8.12) optages.

For tværsnitshæbden  $(b - 2t_o)$ , og under hensyntagen til  $(A_{b,f_yb} - N)$ , kan forskydningsspændingen  $\tau_s$ , der hører til forskydningskraften V, optages. For dette område kan formel (8.12) således igen benyttes til bestemmelse af normalspændingskapaciteten.

Vedrørende V for ovennævnte delområder henvises til afsnit 10.1 og 10.2.

Endelig kan der for et givent M være en vis kapacitet til overs i stringerne, idet der dog højst må regnes med den om tyngdepunktet symmetrisk beliggende kapacitet.

Normalkraftkapaciteten er hermed fastlagt ved summen af ovennævnte normalspændinger og stringerkræfter.

Varierer N med x, skal den del af N, der varierer med x optages i stringerne, jævnfør afsnit 10.1.

For givne værdier af V, T, N og M kan armeringen bestemmes ved hjælp af principperne angivet i afsnit 9.4 og 10.1.

Er N en træknormalkraft lægges blot en armering til optagelse af kraften, idet denne skal være symmetrisk fordelt om tyngdepunktet. Et eventuelt tryk i trykstringeren kan regnes at svare til en fiktiv armeringsmængde.

Er N en tryknormalkraft, kan principperne angivet i afsnit 10.1.4 benyttes, blot skal der nu tages hensyn til to delsystemer, nemlig et med forskydning og et med vridding. Sidstnævnte tilfælde beregnes fuldstændig analogt til forskydningsstilfældet.

Anvendes for tilfældet kombineret V, T og M en spændingstilstand som angivet i afsnit 9.3, kan N delvis optages af skiverne, og hvis der er tale om en massiv bjælke, delvis af området indenfor skiverne. Vigtigt er det dog, at understrege at N skal optages symmetrisk om tyngdepunktet, og at ligevægtsbetingelserne i afsnit 2.1.3 skal overholdes. Vedrørende V for skiverne henvises til betragningerne i afsnit 10.1 og 10.2.

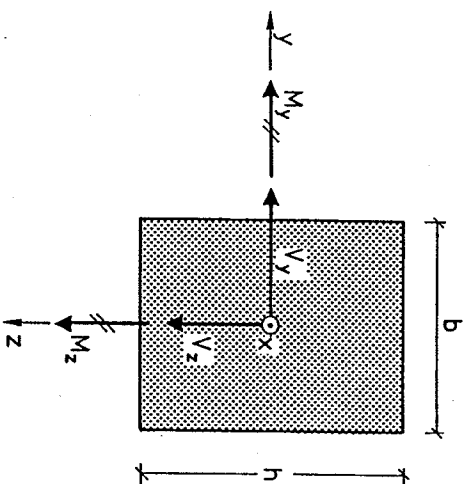
## 10.5 SKÆV BØJNING MED FORSKYDNING

Tilfældet skæv bøjning, dog under hensyntagen til at der ikke optræder forskydningskræfter, er behandlet i afsnit 4.4. Optræder der forskydningskræfter, kan denne model naturligvis stadig anvendes, under hensyntagen til de generelle forhold beskrevet i afsnit 6.5.

Desværre kan anvendelse af ovennævnte model medføre store problemer med forskydningsberegningen. Et eksempel herpå er et rektangulært tværsnit udsat for skæv bøjning, idet en traditionel beregning ville medføre bøjler, der ikke følger randen.

I disse tilfælde kan modellen for tyndfligede tværsnit med fordel benyttes. Eksempelvis ved at lade forskydningskraften optage i tyndfligede tværsnit følgende randen, og forbindende trykstringeren og trækstringeren.

Modellen anvist i figur 6.22 kan også anvendes. De hertil knyttede spændinger er givet i afsnit 9.3, idet der ses bort fra vridding. Snitkræfterne regnes at være som vist i figur 10.3.



Figur 10.3: Snitkræfter.

Der regnes med et tyndfliget tværsnit, som vist i figur 9.6. Spændingsfordelingen, der hører til  $M_y$ , er bestemt ved formlerne (9.14) og (9.15), blot erstatte  $M$  af  $M_y$ . Spændingsfordelingen knyttet til  $V_z$  er bestemt ved (9.17)-(9.22), blot erstatte  $V$  af  $V_z$ . Spændingsfordelingerne hørende til ovennævnte er vist i figur 9.7.

For  $M_z$  fås spændingerne

$$\sigma_{3M_z} = \frac{M_z}{t_3 b_1 h_1} \quad (10.9)$$

$$\sigma_{1M_z} = -\frac{M_z}{t_1 b_1 h_1} \quad (10.10)$$

Tilsvarende fås for  $V_y$  spændingerne, jævnfør figur 10.4

$$\tau_{2V_y} = \frac{V_y (h - t_4)}{2h_1 b_1 t_2} \quad (10.11)$$

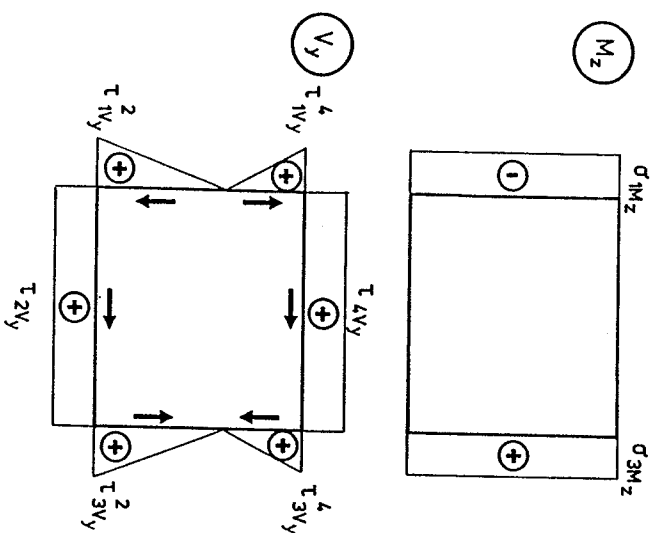
$$\tau_{4V_y} = \frac{V_y (h - t_2)}{2h_1 b_1 t_4} \quad (10.12)$$

$$\tau_{1V_y}^2 = \frac{V_y (h - t_4)}{2h_1 b_1 t_1} \quad (10.13)$$

$$\tau_{1V_y}^4 = \frac{V_y (h - t_2)}{2h_1 b_1 t_1} \quad (10.14)$$

$$\tau_{3V_y}^2 = \frac{V_y (h - t_4)}{2h_1 b_1 t_3} \quad (10.15)$$

$$\tau_{3V_y}^4 = \frac{V_y (h - t_2)}{2h_1 b_1 t_3} \quad (10.16)$$



Figur 10.4: Spændinger og foretegneregning.

Spændingerne i de enkelte skiver kan nu udregnes, og en bærebe-stemmelse eller dimensionering kan herefter ske efter principperne angivet i afsnit 9.3 og 9.4.

Det bemærkes, at det bør sikres, at normalspændingsfordelingen fø-  
rer til ligevægt med momenterne. Dette kan for store værdier af  $t_1$  betyde, at der må regnes med en reduceret spænding i forhold til  $v f_c$ .

Ovennævnte spændingsfordeling opfylder kravene angivet i afsnit 2.1.3, hvis der er tale om M-værdier, der varierer lineært med  $x$ . For andre variationer henvises til bemærkningerne i afsnit 9.3. Eventuelle vridningsmomenter og normalkræfter kan umiddelbart med-regnes, jævnfør afsnit 9.3 og 10.4.

Af hensyn til brugsstadiet, bør ovennævnte beregning eventuelt sup-  
pleres med den traditionelle bøjningsberegning givet i afsnit 4.4.,

idet en elastisk fordeling anvendes, se M.P. Nielsen [74.2]. Her-  
med sikres mod store bøjningsrevner i det trækpåvirkede hjørne.

## REFERENCE

- [10.1] C. Bach & O. Graf:  
Versuche mit Eisenbetonbalken. Dritter teil.  
Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 90-91, Berlin 1910.
- [14.1] C. Bach & O. Graf:  
Versuche mit bewehrten und unbewerten Betonköpern, die durch zentrischen und exzentrischen Druck belastet wurden.  
Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 166-169, Berlin 1914.
- [31.1] E. Suenson:  
Jærnbeton.  
4. udgave, København 1931.
- [51.1] W.H. Price:  
Factors Influencing Concrete Strength.  
Journal of the American Concrete Institute, Proceedings Vol.47, Feb. 1951, p.p. 417-432.
- [57.1] J.W. Murdock & C.E. Kesler:  
Effect of Length to Diameter Ratio of Specimen

- on the Apparent Compressive Strength of Concrete.  
ASTM Bulletin, April 1957, p.p. 68-73.
- [60.1] S. Thaulow:  
Innflytelsen av friksjonen i trykkriatene ved bestemmelse av betongens trykkfasthet ved prøvelegemer av forskjellig høyde.  
Nordisk Betong, 1960:4, p.p. 321-324.
- [61.1] A.H. Mattock & L.B. Kriz:  
Ultimate Strength of Nonrectangular Structural Concrete Members.  
Journal of the American Concrete Institute, Proceedings Vol. 57, 1961, p.p. 737-766.
- [64.1] H. Gesund, F.J. Schvette, G.R. Buchanan & G.A. Gray:  
Ultimate Strength in Combined Bending and Torsion of Concrete Beams Containing both Longitudinal and Transverse Reinforcement.  
Journal of the American Concrete Institute, Proceedings Vol. 61-II, 1964, p.p. 1509-1522.
- [66.1] K. Okada, I. Nishibayashi & T. Abe:  
Experimental studies on the strength of rectangular reinforced and prestressed concrete beams under combined flexure and torsion.  
Transactions, Japanese Society of Civil Engineering, No. 131, July 1966, p.p. 39-51.
- [68.1] S. Mängel:  
Beitrag zur Prüfung von Betonwürfeln.  
Betonstein - Zeitung, Heft 4, 1968, p.p. 197-200.
- [68.2] G.S. Pandit & J. Warwaruk:  
Reinforced Concrete Beams in Combined Bending

and Torsion.  
American Concrete Institute, Publication SP-18,  
1968, p.p. 133-163.

[68.3] M.P. Collins, P.F. Walsh, F.E. Archer & A.S. Hall:

Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Torsion and Bending. American Concrete Institute, Publication SP-18, 1968, p.p. 379-402.

[68.4] C.D. Goode & M.A. Helmy:

Bending and Torsion of Reinforced Concrete Beams. Magazine of Concrete Research, Vol. 20, No. 64, Sept. 1968, p.p. 155-166.

Findes også i:

Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams in Combined Bending and Torsion. American Concrete Institute, Publication SP-18, 1968, p.p. 357-376.

[68.5]

K.T.S.R. Iyengar & B.V. Rangan:  
Strength and stiffness of reinforced concrete beams under combined bending and torsion. American Concrete Institute, Publication SP-18, 1968, p.p. 403-440.

[69.1]

M.P. Nielsen:  
Om jernbetonskivers styrke. Polyteknisk Forlag, København 1969.

[70.1]

A.E. McMullen & J. Warwaruk:  
Concrete beams in bending, torsion and shear. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST5, May 1970, p.p. 885-903.

[71.1]

N.Jackson & R.A. Estanero:  
The plastic flow law for reinforced concrete beams under combined flexure and torsion. Magazine of Concrete Research, Vol.23, No. 77, 1971, p.p. 169-180.

[71.2]

M.P. Nielsen:  
Kombineret bøjning og vridning af jernbetonbjælker. Rapport nr. R 7103, Bygningsafdelingen, Danmarks Ingeniørakademi, Aalborg, 1971.

[73.1]

H.V.S. Gangarao & P.Zia:  
Rectangular Prestressed Beams in Torsion and Bending. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 1, Jan. 1973, p.p. 183-198.

[74.1]

D. Mitchell & M.P. Collins:  
The Behavior of Structural Concrete Beams in Pure Torsion. Publication 74-06, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 1974.

[74.2]

M.P. Nielsen:  
Beton 1, del 1, del 2 og del 3. Den private Ingeniørfond ved DTH, 1974.

[74.3]

F. Leonhardt & G. Schelling:  
Torsionsversuche an Stahlbetonbalken. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H. 239, Berlin 1974.

[75.1]

P. Lange-Hansen:  
Generel plasticitetsteori II, Flydelastsetning. Forelæsningsnotat nr. F 56, Afdelingen for Bæ-

rende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1975.

[76.1]

B.C. Jensen:

Nogle plasticitetsteoretiske beregninger af beton og jernbeton.

Rapport nr. 111, Institutet for Husbbygning, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1976.

[76.2]

P. Müller:

Failure Mechanisms for Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending.

Bericht Nr. 65, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zurich, September 1976.

[77.1]

P. Lange-Hansen:

General plasticitetsteori I. Konstitutive ligninger for idealt plastiske konstruktioner. Endydighedssætninger.

Forelæsningsnotat nr. F 55, 2. udgave, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1977.

[77.2]

M.P. Nielsen, L. Pilegaard Hansen & A. Rathjen:

Rumlige spændings- og deformationstilstande.

Mekanik 2.2, Del 1 og 2, 2. udgave, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, 1977.

[78.1]

M.P. Nielsen, M.W. Bræstrup, B.C. Jensen & F. Bach:

Concrete Plasticity.

Dansk Selskab for Bygningsstatik, Specialpublikation, Lyngby, oktober 1978.

[78.2]

J.F. Jensen, V. Jensen, H.H. Christensen, F. Bach & M.P. Nielsen:

On the behaviour of Cracked Reinforced Concrete

beams in the Elastic Range.

Rapport R 103, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1978.

[78.3]

P.T. Wang, S.P. Shah & A.E. Naaman:

Stress-Strain Curves of Normal and Lightweight Concrete in Compression.

Journal of the American Concrete Institute, Proceedings Vol. 75, p.p. 603-611.

[78.4]

C. Pedersen, J.F. Jensen, M.P. Nielsen & F. Bach:

Opbøjet længearmring som forskydningsarmring. Rapport R 100, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1978.

[78.5]

J.F. Jensen, M.W. Bræstrup, F. Bach & M.P. Nielsen:

Nogle plasticitetsteoretiske bjælkeløsninger. Rapport R 101, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1978.

[79.1]

J. Wasth:

Failure Criteria for Concrete under Multiaxial Stress States.

IABSE-Colloquium, Plasticity in Reinforced Concrete, Copenhagen 1979, p.p. 3-10.

[79.2]

H. Exner:

On the Effectiveness Factor in Plastic Analysis of Concrete.

IABSE-Colloquium, Plasticity in Reinforced Concrete, Copenhagen 1979, p.p. 35-42.

[80.1]

M.P. Nielsen & F. Bach:

Beregning af forskydningsarmring efter diagonaltrykmotoden.

Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. 51, Nr. 3-4, 1980, p.p. 75-139.

- [80.2] Betonhandbok, Material. Svensk Byggtjänst, 1980.

- [81.1] A.M. Neville:  
Properties of Concrete. Pitman, 3. udgave, 1981.

- [81.2] J.F. Jensen:  
Plasticitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton.  
Rapport R 141, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1981.

- [81.3] J.F. Jensen, F. Bach, J. Rasmussen & M.P. Nielsen:  
Jernbetonplader med hjørnelast.  
Rapport I 68, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, 1981.

- [83.1] B. Feddersen & M.P. Nielsen:  
Effektivitetsfaktoren ved vridding af jernbetonbjælker.  
Rapport R 174, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.

- [83.2] M.P. Nielsen & B. Feddersen:  
Effektivitetsfaktoren ved bøjning af jernbetonbjælker.  
Rapport R 173, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.

- [83.3] J.S. Nielsen:  
A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams - Especially Over-Reinforced Beams - Sub-

jected to Torsion. Part I. Theory.  
Rapport R 170, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.

- [83.4] J.S. Nielsen:  
A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams - Especially Over-Reinforced Beams - Subjected to Torsion. Part II. Experiments.  
Rapport R 171, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.

- [83.5] H. Exner:  
Betonbjælkers bøjningsbæreevne.  
Rapport nr. R 176, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.

- [83.6] H. Exner:  
Plasticitetsteori for Coulomb materialer.  
Rapport R 175, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.

- [83.7] B. Feddersen & M.P. Nielsen:  
Revneteorier for enaksede spændingstilstande.  
Rapport R 162, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.

- [83.8] Bent Feddersen & M.P. Nielsen:  
Revneteori for biaksiale spændingstilstande.  
Rapport R 163, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.

- [84.1] M.P. Nielsen:  
Limit Analysis and Concrete Plasticity. Prentice-Hall 1984.

- [84.2] Dansk Ingeniørforenings norm for betonkonstruktioner.

Dansk Standard DS 411, 3. udgave, marts 1984.

[84.3]

B. Feddersen & M.P. Nielsen:  
Plastic analysis of reinforced concrete beams in pure bending or pure torsion.  
Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. IV, Nr. 2. juni 1984.

[84.4]

J.S. Nielsen:  
The Effect of Stirrup Spacing on the Ultimate Load of Reinforced Concrete Beams Subjected to Pure Torsion.  
Rapport R 180, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1984.

[84.5]

J. Rasmussen, Søren B. Christensen, H. Exner & M.P. Nielsen:  
Plasticitetsteoretisk analyse af beregningsmetoder for jernbetonbjælkers forskydningsbæreevne.  
Rapport R 137, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1984.

[85.1]

Beton-bogen.  
CTO, 1985.

[85.2]

B. Feddersen & M.P. Nielsen:  
Opbøjet spendarmering som forskydningsarmering.  
Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. 56, No.1, 1985.

[85.3]

Bent S. Andreasen & M.P. Nielsen:  
Armering af beton i det tredimensionale tilfælde.  
Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. 56, No. 2-3, 1985.

[88.1]

Chen Ganwei:  
Plastic Analysis of Shear in Beams, Deep Beams and Corbels.  
Rapport R 237, Afdelingen for Bærende Konstruk-

tioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1988.

[89.1]

B. Feddersen:  
Betonbjælkers forskydningsbæreevne under hensyntagen til buvirkning.  
Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. 60, No. 1, marts 1990.

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Department of Structural Engineering  
Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

SERIE R  
(Tidligere: Rapporter)

- R 230. RIBERHOLT, H.: Woodflanges under tension, 1988.  
R 231. HOLKMANN OLSEN, N.: Implementation, 1988. (public. pending).  
R 232. HOLKMANN OLSEN, N.: Uniaxial, 1988. (public pending)  
R 233. HOLKMANN OLSEN, N.: Anchorage, 1988. (public pending)  
R 234. HOLKMANN OLSEN, N.: Heat Induced, 1988. (public pending)  
R 235. SCHEEL, HELLE: Rotationskapacitet, 1988. (public pending)  
R 236. NIELSEN, MONA: Arbejdslister, 1988. (public pending)  
R 237. GANWEI, CHEN: Plastic Analysis of Shear in Beams. Deep Beams and Corbels, 1988.  
R 238. ANDREASEN, BENT STEEN: Anchorage of Deformed Reinforcing bars, 1988.  
R 239. ANDREASEN, BENT STEEN: Anchorage Tests with deformed Reinforcing Bars in more than one layer at a Beam Support, 1988.  
R 240. GIMSING, N.J.: Cable-Stayed Bridges with Ultra Long Spans, 1988.  
R 241. NIELSEN, LEIF OTTO: En Reissner-Mindlin Plade Element Familie, 1989.  
R 242. KRENK, STEEN og THORUP, ERIK: Stochastic and Concrete Amplitude Fatigue Test of Plate Specimens with a Central Hole, 1989.  
R 243. AARKROG, P., THORUP, E., KRENK, S., AGERSKOV, H. and BJØRNBAK-HANSEN, J.: Apparat til Udmattelsesforsøg, 1989.  
R 244. DITLEVSEN, OVE og KRENK, STEEN: Research Workshop on Stochastic Mechanics, September 13-14, 1988.  
R 245. ROBERTS, J.B.: Averaging Methods in Random Vibration, 1989.  
R 246. Resumeoversigt 1988 - Summaries of Papers 1988, 1989.  
R 247. GIMSING, N.J., JAMES D. LOCKWOOD, JAEHO SONG: Analysis of Erection Procedures for Cable-Stayed Bridges, 1989.  
R 248. DITLEVSEN, O. og MADSEN, H.O.: Proposal for a Code for the Direct Use of Reliability Methods in Structural Design, 1989.  
R 249. NIELSEN, LEIF OTTO: Simplex Elementet, 1989.  
R 250. THOMSEN, BENTE DAHL: Undersøgelse af "shear lag" i det elasto-plastiske stadium, 1990.  
R 251. FEDDERSEN, BENT: Jernbetonbjælkers bæreevne, 1990.  
R 252. FEDDERSEN, BENT: Jernbetonbjælkers bæreevne, Appendix, 1990.  
R 253. AARKROG, PETER: A Computer Program for Servo Controlled Fatigue Testing Documentation and User Guide, 1990.  
R 254. HOLKMANN OLSEN, DAVID & NIELSEN, M.P.: Ny Teori til Bestemmelse af Revnestand og Revnevidder i Betonkonstruktioner, 1990.  
R 255. YAMADA, KENTARO & AGERSKOV, HENNING: Fatigue Life Prediction of Welded Joints Using Fracture Mechanics, 1990.  
R 256. Resumeoversigt 1989 - Summaries of Papers 1989, 1990.  
R 257. HOLKMANN OLSEN, DAVID, GANWEI, CHEN, NIELSEN, M.P.: Plastic Shear Solutions of Prestressed Hollow Core Concrete Slabs, 1990.  
R 258. GANWEI, CHEN & NIELSEN, M.P.: Shear Strength of Beams of High Strength Concrete, 1990.  
R 259. GANWEI, CHEN, NIELSEN, M.P. NIELSEN, JANOS, K.: Ultimate Load Carrying Capacity of Unbonded Prestressed Reinforced Concrete Beams, 1990.  
R 260. GANWEI, CHEN, NIELSEN, M.P.: A Short Note on Plastic Shear Solutions of Reinforced Concrete Columns, 1990.  
R 261. GLUYER, HENRIK: One Step Markov Model for Extremes of Gaussian Processes, 1990.